Def.- Sea X un cjto. Decimos que $d: X^2 \to \mathbb{R}$ es una métrica si, y solo si

- $\forall x, y \in X \; d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $\forall x, y \in X \; d(x,y) = d(y,x)$
- $\forall x, y, z \in X \; d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

y al par (X, d) le llamaremos espacio métrico

Obs.- Sean $x, y \in X \Rightarrow 0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x)$
$\Rightarrow 2d(x,y) \Rightarrow d(x,y) \geq 0$

$\therefore \; Im(d) \subseteq \mathbb{R}^+$

Ejercicio.- Sea X cjto y $d: X^2 \to \mathbb{R}$ una función. Demostrar que d es métrica si, y solo si:

- $\forall x, y \in X, \; d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $\forall x, y, z \in X, \; d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

Ejemplos:

* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, donde $|\cdot|: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $d(x,y) = |x-y|$

* $(\mathbb{R}^n, d_2)$, donde $d_2: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$d_2((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

* $(\mathbb{R}^n, d_p)$, donde $d_p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por

$$d_p((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$

* La métrica discreta definida por $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$

* Sea $X^\omega = \{ f: \mathbb{N} \to X \mid f \text{ es función} \}$. La métrica canónica sobre X^ω es la función $d: (X^\omega)^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(f,g) = \begin{cases} 0 & \text{si } f = g \\ \dfrac{1}{2^{\Delta(f,g)}} & \text{si } f \neq g \end{cases}$$

Donde $\Delta(f,g) = \min\{ n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n) \}$

Escaneado con CamScanner

Dem.-

(1) $d(f,g)=0 \iff f=g$ ✓

(2) $d(f,g)=d(g,f)$

Si $f=g$ se cumple y si $f\neq g \Rightarrow \Delta(f,g)=\Delta(g,f)$ y así $d(f,g)=d(g,f)$

(3) Sean $f,g,h \in X^{\mathbb{N}}$ queremos demostrar que $d(f,g)\leq d(f,h)+d(h,g)$

- Caso 1. Si $f=g \Rightarrow d(f,g)=0 \leq d(f,h)+d(h,g)$

- Caso 2. Si $f\neq g$, observemos que $h\neq f$ ó $h\neq g$

h.-

* Subcaso 1 si $h\neq f$ y $h=g$ entonces $d(f,g)=d(f,h)\leq d(f,h)+d(h,g)$

* Subcaso 2 si $h\neq g$ y $h=f$ Análogo

* Subcaso 3 si $f\neq h$ y $f\neq g$. Sea n arbitrario t.q. $n<\Delta(f,h)$ y $n<\Delta(g,h)$ entonces tendremos que $f(n)=h(n)$ y $g(n)=h(n) \Rightarrow f(n)=g(n)$

$\Rightarrow \Delta(f,g)\geq \min\{\Delta(f,h),\Delta(g,h)\}$

$\Rightarrow \frac{1}{2^{\Delta(f,g)}} \leq \max\left\{\frac{1}{2^{\Delta(f,h)}}, \frac{1}{2^{\Delta(h,g)}}\right\} \leq \frac{1}{2^{\Delta(f,h)}}+\frac{1}{2^{\Delta(h,g)}}$

$\Rightarrow d(f,g)\leq d(f,h)+d(h,g)$

Def.- Sea (X,d) esp. métrico, decimos que d es una ultramétrica si, y solo si $\forall x,y,z\in X$

$$d(x,y)\leq \max\{d(x,z),d(z,y)\}$$

Ejemplo.-

Sea (X,d) E.M. Decimos que $f: X\to\mathbb{R}$ es admisible si $\forall x,y\in X$ $|f(x)-f(y)|\leq d(x,y)\leq f(x)+f(y)$

Sea $E(X,d)=\{f \mid f \text{ es admisible}\}$ y $d_E: [E(X,d)]^2\to\mathbb{R}$ con $d_E(f,g)=\sup_{x\in X}\{|f(x)-g(x)|\}$ es una métrica

Dem.- Sean $f, g \in E(\mathbb{X}, d)$, fijemos $y_0 \in \mathbb{X}$. Sea x arbitrario.

Como f es admisible

$$f(x) - f(y_0) \leq d(x, y_0)$$

Como g es admisible

$$d(x, y_0) \leq g(x) + g(y_0)$$

$\Rightarrow f(x) - f(y_0) \leq g(x) + g(y_0) \Rightarrow f(x) - g(x) \leq f(y_0) + g(y_0)$ y análogamente vemos que $g(x) - f(x) \leq f(y_0) + g(y_0)$
$\therefore |f(x) - g(x)| \leq f(y_0) + g(y_0) \Rightarrow \{|f(x) - g(x)| \mid x \in \mathbb{X}\}$ está acotado por $f(y_0) + g(y_0)$ es sup existe y $\sup\{|f(x) - g(x)|\} \leq f(y_0) + g(y_0)$
$\therefore$ está bien definida

Obs.- No necesariamente se da la igualdad

Def.- Sea $(V, +, \cdot, 0)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Decimos que $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ es una norma si y solo si

(1) $\forall v \in V$, $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \bar{0}$
(2) $\forall v \in V$; $\forall a \in \mathbb{R}$, $\|a v\| = |a| \|v\|$
(3) $\forall v, w \in V$, $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

y entonces V es un espacio vectorial normado

Proposición.- Sea V esp. vectorial normado y sea $d: V^2 \to \mathbb{R}$ dado por $d(v, w) = \|v - w\|$, entonces d es métrica por V. Esto es, todo E.V normado es espacio métrico

Dem.-
(1) $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow \|v - w\| = 0 \Leftrightarrow v - w = \bar{0} \Leftrightarrow v = w$
(2) $d(v, w) = \|v - w\| = \|v - z + z - w\| \leq \|v - z\| + \|z - w\| = \|v - z\| + \|w - z\|$
$= d(v, z) + d(w, z) \quad \therefore d(v, w) \leq d(v, z) + d(w, z)$

$\therefore$ d es métrica

A la métrica d se le llama la métrica inducida

Escaneado con CamScanner

Def.- Sea $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos, entonces

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i = \{ f : \mathbb{N} \to \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i \mid \forall i \in \mathbb{N} \ (f(i) \in X_i) \}$$

Notación.- Si $X_i = X_j = X \quad \forall i,j \in \mathbb{N} \Rightarrow \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i = \prod_{i\in\mathbb{N}} X = X^{\omega}$
$X^{\omega} = \{ f : \mathbb{N} \to X \}$

Ejemplo.- Sea $\{(X_i, \|\cdot\|_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ una fam. de espacios normados y sea $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\ell_p(\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = \{ \bar{x} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \mid \Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} \|x(i)\|_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \}$$

Es un espacio vectorial con las operaciones

- Si $\bar{x}, \bar{y} \in \ell_p \Rightarrow \bar{x} + \bar{y} \in \ell_p$ y $\forall i \ (\bar{x} + \bar{y})(i) = \bar{x}(i) + \bar{y}(i)$
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in \ell_p \Rightarrow \alpha \bar{x} \in \ell_p$ con $(\alpha \bar{x})(i) = \alpha \bar{x}(i) \ \forall i$
- $\bar{0} \in \ell_p$ es la función que vale $\bar{0}_i$ en cada entrada llamada c_0

Ahora lo dotaremos de una norma

Definimos $\|\cdot\|_p : \ell_p(\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|\bar{x}\|_p = \Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} \|\bar{x}(i)\|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

Entonces $\|\cdot\|_p$ es una norma.

En el caso particular en que $X_i = X_j \ \forall i,j \in \mathbb{N}$ escribimos $\ell_p(X)$ si para cada $i \in \mathbb{N}$ $(X_i, \|\cdot\|_i) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ escribiremos ℓ_p

Ejemplo.- Sea $\{(X_i, \|\cdot\|_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ una fam de e.N y sea

$$\ell_\infty(\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = \{ \bar{x} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \mid \sup_{i\in\mathbb{N}} \{ \|\bar{x}(i)\|_i \} < \infty \}$$

Es un espacio vectorial con las mismas operaciones de ℓ_p

Definimos $\|\cdot\|_\infty : \ell_\infty\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|\bar{x}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} \{ \|\bar{x}(i)\|_i \}$$

Escaneado con CamScanner

Analogamente si todos los espacios normados son iguales entonces lo denotamos por $\ell_\infty(X)$ y si todos son iguales a $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ escribiremos ℓ_∞

Proposición.- La norma $\|\cdot\|_p$ dada para $\ell_p(\{X_i\})$ efectivamente es norma.

Dem.-

- Sea $\bar{x} \in \ell_p(\{X_i\})$ t.q $\|\bar{x}\|_p = 0 \iff \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \|\bar{x}(i)\|_i^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$

$\iff \|\bar{x}(i)\|_i^p = 0 \quad \forall i$ y como cada $\|\cdot\|_i$ es norma, esto será $\iff x(i) = 0_i \; \forall i \iff \bar{x} = c_0$

- Sean $\bar{x} \in \ell_p(\{X_i\})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\|\alpha \cdot \bar{x}\|_p = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \|(\alpha \cdot \bar{x})(i)\|_i^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} |\alpha|^p \|\bar{x}(i)\|_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha| \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \|\bar{x}(i)\|_i^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \, \|\bar{x}\|_p$$

- Recordatorio Desigualdad de Minkowski's

para cada $p \geq 1$ y para cualesquiera $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ y $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Sean $\bar{x}, \bar{y} \in \ell_p(\{X_i\})$ P.D $\|\bar{x} + \bar{y}\|_p \leq \|\bar{x}\|_p + \|\bar{x}\|_y$

por Minkowski $\left(\sum_{i=0}^{n} \|(\bar{x}+\bar{y})(i)\|_i^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \|\bar{x}(i) + \bar{y}(i)\|_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$$\leq \left(\sum_{i=0}^{n} \left(\|x(i)\|_i + \|\bar{y}(i)\|_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Tomando $a_i = \|\bar{x}(i)\|_i$ y $b_i = \|\bar{y}(i)\|_i$ podemos aplicar Minkowski

$$\Rightarrow \|\bar{x} + \bar{y}\|_p \leq \left(\sum_{i=0}^{n} \|\bar{x}(i)\|_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=0}^{n} \|\bar{y}(i)\|_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

y como cada uno de los dos términos de la derecha existen usando $n \to \infty$ entonces

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_p \leq \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \|\bar{x}(i)\|_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \|\bar{y}(i)\|_i^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\bar{x}\|_p + \|\bar{y}\|_p$$

Escaneado con CamScanner

Proposición.- La función $\|\cdot\|_\infty$ definida para $\ell_\infty(X;\mathbb{R})$ es norma.

Def.- Sean $a<b\in\mathbb{R}$ entonces definimos

$$C[a,b] = \{ f: [a,b]\to\mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$$

Para $1\le p<\infty$ definimos $\|\cdot\|_p : C[a,b]\to\mathbb{R}$ como $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Igualmente se define $\|\cdot\|_\infty : C[a,b]\to\mathbb{R}$ dada por
$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]}\{|f(x)|\} = \max_{x\in[a,b]}\{|f(x)|\}$

Proposición.- Sea (X,d) espacio métrico y $Y\subseteq X$, entonces $d_Y := d|_Y : Y^2\to\mathbb{R}$ dada por $d_Y(x,y)=d(x,y)$ es métrica en Y

Dem.-
(1) Sean $x,y\in Y$ t.q. $d_Y(x,y)=0 \Leftrightarrow d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ ✓
(2) $d_Y(x,y)=d(x,y)\le d(x,z)+d(y,z) = d_Y(x,z)+d_Y(z,y)$ ✓

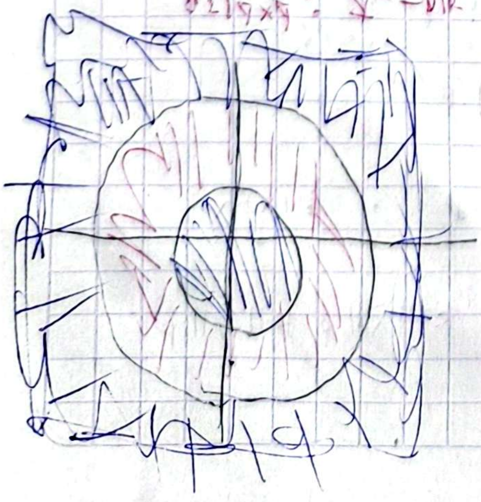
Def.- Sean (X,d) e (Y,d_Y). Decimos que Y es subespacio métrico de X si y sólo si, $Y\subseteq X$ y $d_X|_{Y\times Y} = d_Y$

Ejemplo: Consideremos a $(\mathbb{R}^2,d_2)$, sea $Y\subseteq\mathbb{R}^2$ dada por

$$Y = \{\bar{x}\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le d_2(\bar 0,\bar x)\le 2\}$$

La métrica inducida a Y por $(\mathbb{R}^2,d_2)$ es la función

$d_2|_{Y\times Y}: Y^2\to\mathbb{R}$ dada por $d_{2|Y^2} = d_2(\bar x,\bar y)$

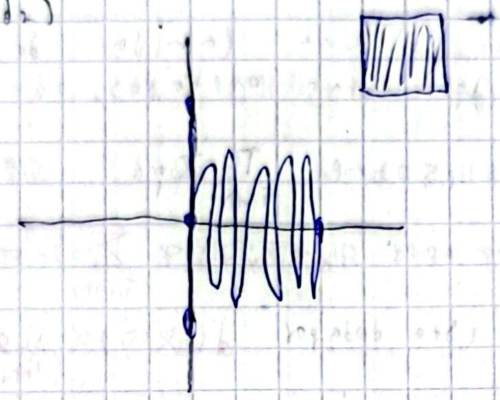


Escaneado con CamScanner

$x_1\ x_2 \quad x_1\ y_1$
$y_1\ y_2 \quad x_2\ y_2$
$z_1\ z_2 \quad x_3\ y_3$

Ejemplo.- Consideremos $(\mathbb{R}^2, d_2)$ y sea

$Y = \{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) \mid x \in (0,1]\} \cup \{\bar{0}\} \cup [-1,1] \cup [17,18]$ con la métrica inducida por $(\mathbb{R}^2, d_2)$



Def.- Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. Definimos las métricas sobre $X \times Y$

(1) para cada $p \geq 1$, $d_p : (X \times Y)^2 \to \mathbb{R}$ y está dada por con $\bar{x} = (x_1, y_1)$, $\bar{y} = (x_2, y_2)$, $x_1, x_2 \in X \wedge y_1, y_2 \in Y$

$$d_p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = [d_X(x_1, x_2)^p + d_Y(y_1, y_2)^p]^{\frac{1}{p}}$$

(2) $d_\infty : (X \times Y)^2 \to \mathbb{R}$ dada por $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$

Dem.-

(1) • $d_p(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \iff d_X(x_1, x_2)^p + d(y_1, y_2)^p = 0 \iff \begin{matrix} d_X(x_1, x_2) = 0 \\ d_Y(y_1, y_2) = 0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{matrix}$

$\iff (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff \bar{x} = \bar{y}$ •

$x = (x_1, y_1)$
$y = (x_2, y_2)$
$z = (x_3, y_3)$

• Sean $x, y, z \in X \times Y$ p.d. $d_p(x, y) \leq d_p(x, z) + d_p(z, y)$

$$d_p(\bar{x}, \bar{y}) = [d_X(x_1, x_2)^p + d_Y(y_1, y_2)^p]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq [\{d_X(x_1, x_3) + d_X(x_3, x_2)\}^p + \{d_Y(y_1, y_3) + d_Y(y_3, y_2)\}^p]^{\frac{1}{p}}$$
$$= [\{a_1 + b_1\}^p + \{a_2 + b_2\}^p]^{\frac{1}{p}}$$

Minkowski $\leq [a_1^p + a_2^p]^{\frac{1}{p}} + [b_1^p + b_2^p]^{\frac{1}{p}}$

$$= [d_X(x_1, x_3)^p + d_Y(y_1, y_3)^p]^{\frac{1}{p}} + [d_X(x_3, x_2)^p + d_Y(y_3, y_2)^p]^{\frac{1}{p}}$$
$$= d(x, z) + d(z, x) \quad \checkmark$$

(2) También

Def.- Sea $d : X^2 \to \mathbb{R}$ una métrica. Decimos que d es acotada si $Im(d)$ es un subconjunto acotado.
i.e, $\exists r \in \mathbb{R}^+$ t.q $\forall x, y \in X$, $d(x,y) \leq r$

Def.- Sean $\{(X_i, d_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de espacios métricos tales que todas las d_i están acotadas.

Definimos dos métricas sobre $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$

(1) $d_s : \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i^2 \to \mathbb{R}$ dada por $d(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{d_i(\bar{x}(i), \bar{y}(i))}{2^i}$

(2) $d_s : \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i^2 \to \mathbb{R}$ y está dada por $d(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{d_i(\bar{x}(i), \bar{y}(i))}{2^i} \right\}$

Obs.- Están bien definidas pues

- $\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i} \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{r}{2^i} < \infty$.

- $\sup \left\{ \frac{d(x_i, y_i)}{2^i} \right\} \leq \sup \left\{ \frac{r}{2^i} \right\} < \infty$

con $r = \max\{r_i\}$ donde r_i es cota de cada d_i

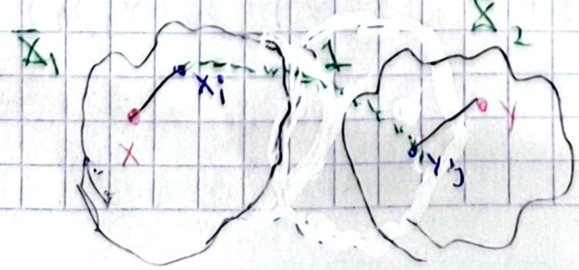
Obs.- Efectivamente son métricas

Ejemplos.-

- El cubo de Hilbert, $(H = [0,1]^\omega, d)$ donde d es la métrica del suprema vista arriba.
(En este caso cada $(X_i, d_i) = ([0,1], d_e)$)

Def.- Sean $\{(X_i, d_i)\}_{i \in I}$ tales que si $i \neq j$ entonces $X_i \cap X_j =$
para cada $i \in I$ toma $x_i \in X$ fijo.
Definimos la métrica de suma puntada sobre $\bigcup_{i \in I} X_i$ como
$d : (\bigcup_{i \in I} X_i)^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(x,y) = \begin{cases} d_i(x,y) & \text{si } x, y \in X_i \\ d_i(x, x_i) + 1 + d_j(y_j, y) & \text{si } x \in X_i, y \in X_j \text{ y } i \neq j \end{cases}$$



Operaciones en espacios normados

Proposición.- Sean V un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas en V, entonces:

(1) $\|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2 : V \to \mathbb{R}$ dado por $(\|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2)(v) = \|v\|_1 + \|v\|_2$

(2) $\max(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2) : V \to \mathbb{R}$ dada por $\max(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2)(v) = \max(\|v\|_1, \|v\|_2)$

(3) Si $r \in (0,\infty)$ entonces $r\cdot\|\cdot\|_1 : V \to \mathbb{R}$ dada por $(r\cdot\|\cdot\|_1)(v) = r\cdot\|v\|_1$

son normas

Def.- Sean $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ dos espacios vectoriales normados. Decimos que $(W, \|\cdot\|_W)$ es subespacio normado de $(V, \|\cdot\|_V)$ si y solo si,

- W es subespacio de V
- $\|\cdot\|_W = \|\cdot\|_V|_W$

Teorema.- Sean $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(W, \|\cdot\|_W)$ dos espacios normados, definimos normas sobre $V\times W$ de la sig manera:

- $\|\cdot\|_p : V\times W \to \mathbb{R}$ dada por $\|(v,w)\|_p = \left(\|v\|_V^p + \|w\|_W^p\right)^{\frac{1}{p}}$ para $p \geq 1$
- $\|\cdot\|_\infty : V\times W \to \mathbb{R}$ dada por $\|(v,w)\|_\infty = \max(\|v\|_V, \|w\|_W)$

Obs.- Si $(V_i, \|\cdot\|_i)$ es una familia de espacios normados $\Rightarrow$ la norma del producto $\prod_{i=1}^{n} V_i$ es:

- $\|\cdot\|_p : \prod_{i=1}^{n} V_i \to \mathbb{R}$ t.q. $\|\vec{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$
- $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \{\|v_i\|_i\}$

Escaneado con CamScanner

Def.- Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos esp. métricos. Decimos que $f: X \to Y$ es una isometría si y solo si

$$\forall x, y \in X \ (d_X(x,y) = d_Y(f(x), f(y))$$

Proposición.- Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) esp. métricos y $f: X \to Y$ isometría. Entonces f es inyectiva

Dem.- Sean $x, y \in X$ distintos. Entonces

$$0 \neq d_X(x,y) = d_Y(f(x), f(y)) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Ejemplo: $(\mathbb{R}^2, d_2)$ y $(\mathbb{R}^3, d_2)$. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y) = (10+x, 7+y, 1)$ es isometría.

En efecto, ~~$d_{\mathbb{R}^2}(\bar{x}, \bar{y}) = d_{\mathbb{R}^3}$~~ $d_2((x,y),(z,w)) = \sqrt{(x-z)^2 + (y-w)^2}$

y $d_2(f(x,y), f(z,w)) = d_2((10+x, 7+y, 1), (10+z, 7+w, 1))$

$$= \sqrt{(x-z)^2 + (y-w)^2 + 0^2}$$

$\therefore \quad d_2(\bar{x}, \bar{y}) = d_2(f(\bar{x}), f(\bar{y})) \quad \therefore$ es isometría

Notación.- Cuando $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(W, \|\cdot\|_W)$ son esp. vectoriales y digo que $f: V \to W$ es isometría, me refiero a que es isometría respecto de $(V, d_{\|\cdot\|_V})$, $(W, d_{\|\cdot\|_W})$

Ejemplo.- Sean $(\mathbb{R}^2, d_2)$ y $(\mathbb{R}^2, d_3)$.
Entonces $id: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ no es una isometría.

$$d_3((1,0),(0,1)) = (1^3 + 1^3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \neq \sqrt{2} = (1^2+1^2)^{\frac{1}{2}} = d_2((1,0),(0,1))$$

Ejemplo.- Sea (X, d) esp. métrico t.q. $|X| = 3$. Entonces existe una isometría $f: X \to \mathbb{R}^2$

~~Dem~~:
Pero en general, existe (X, d) esp. métrico con $|X| = 4$ t.q para cualquier $n \geq 3$ no existe una isometría de X en $\mathbb{R}^n$

Dem.- Sea $X = \{0, 1, 2, 3\}$ y $d: X^2 \to \mathbb{R}$ dado por
$d(0,1) = 1$ $\quad d(1,2) = 1$ $\quad d(1,3) = \frac{1}{2}$
$d(0,2) = 1$ $\quad d(0,3) = \frac{1}{2}$ $\quad d(2,3) = \frac{1}{2}$

Escaneado con CamScanner

Supongamos que existe $f: X \to \mathbb{R}^n$ una isometría

Obs.- $\{f(0), f(1), f(2)\}$ es el conjunto de vértices de un triángulo equilátero en $\mathbb{R}^n$ con lado 1. Así $\{f(0), f(1), f(2)\}$ no son colineales.

Obs.- $d(f(0), f(3)) = d(f(1), f(3)) = \frac{d(f(0), f(1))}{2}$, esto implica que $\{f(0), f(1), f(3)\}$ son colineales

Obs.- Analogamente $\{f(0), f(2), f(3)\}$ son colineales

$\Rightarrow \{f(0), f(1), f(2)\}$ son colineales.

Ejemplo.- Sea (X,d) esp. métrico y $f: X \to E(X,d)$ dada por $f(x)(y) = d(x,y)$ ($E(X,d) := \{f: X \to \mathbb{R} \mid f$ es admisible$\}$) es isometría

¿A que me refiero?, $f(x) \in E(X,d) \Rightarrow f(x): X \to \mathbb{R}$ y $f(x)$ debe ser una función admisible, para definir a $f(x)$ basta con dar su regla de correspondencia, En este caso $\forall y \in X$ definimos $f(x)(y) = d(x,y)$

Dem.
Veamos que está bien definida, pues $\forall x,y \in X$, $d(x,y) \in \mathbb{R}$ $\therefore f: X \to \mathbb{R}$
Ahora veamos que es admisible.

Sean $z, y \in X \Rightarrow |f(x)(z) - f(x)(y)| = |d(x,z) - d(z,y)| \leq d(z,y)$
$\leq d(x,z) + d(x,y) = f(x)(z) + f(x)(y)$ $\therefore$ es admisible

P.D f es isometría

$\leq$) $d_E(f(x), f(y)) = \sup_{z \in X} \{|f(x)(z) - f(y)(z)|\}$

$$= \sup_{z \in X} |d(x,z) - d(y,z)|$$

$$\leq \sup_{z \in X} d(x,y) = d(x,y)$$

$\geq$) $d(x,y) = d(x,y) - d(y,y) = |d(x,y) - d(y,y)| \leq \sup_{z \in X} |d(x,z) - d(y,z)| = d_E(f(x), f(y))$

$\therefore d(x,y) = d_E(f(x), f(y))$ ✱

Escaneado con CamScanner

Def.- Sea X cnjto y $\tau \subseteq P(X)$.
Decimos que τ es una topología sobre X si y sólo si:

(1) $\emptyset, X \in \tau$
(2) para cada $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$.
(3) si $\{U_\alpha\}_{\alpha} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \in \tau$

Al par (X, τ) le llamamos espacio topológico. A los elementos de τ les llamamos abtos. A los complementos de abiertos les llamamos cerrados.

Ejemplo: X conjunto y $\tau = \{\emptyset, X\}$, es topología y le llamamos la topología indiscreta.

• Sea X conjunto y $\tau = P(X)$ es una topología y le llamamos la topología Discreta.

Def.- Sea (X, d) esp. métrico, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$
Definimos la bola de radio ε y centro x como:

$$B_\varepsilon(x) = \{ y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon \}$$

Def.- Sea (X, d) un esp. métrico. La topología τ_d inducida por d es la colección de todos los $A \subseteq X$ t.q

$$\forall x \in A \; \exists \varepsilon > 0 \; (B_\varepsilon(x) \subseteq A)$$

Dem.- ($\tau_d = \{ A \subseteq X \mid \forall x \in A \; \exists \varepsilon > 0 \; (B_\varepsilon(x) \subseteq A) \}$ es topología)

• por vacuidad $\emptyset \in \tau_d$, $\forall \varepsilon > 0 \; B_\varepsilon(x) \subseteq X$ $\therefore X \in \tau_d$.

• Sean $A, B \in \tau_d$ p.d $A \cap B \in \tau_d$

Sea $x \in A \cap B$, como $x \in A$ y A es abto $\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$ t.q $B_{\varepsilon_0}(x) \subseteq A$
como $x \in B$ y B es abto $\Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0$ t.q $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq B$
y sea $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\} \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_0}(x)$
$B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x)$

$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_0}(x) \cap B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A \cap B$ $\therefore A \cap B \in \tau_d$

Escaneado con CamScanner

Sea $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \tau_d$ y sea $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \exists j \in I$ t.q. $x \in A_j$

* como A_j es abto $\Rightarrow \exists \varepsilon>0$ t.q. $B_\varepsilon(x) \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$

Proposición.- Sea (X,d) esp. métrico, entonces para cada $x\in X$ y $\varepsilon>0$ se cumple que $B_\varepsilon(x)\in\tau_d$, es decir, es abierta

Corolario.- Sea (X,d) esp. métrico y $A\subseteq X$. $A\in\tau_d$ si y sólo si existe $Y\subseteq X$ y $\{\varepsilon_y \mid y\in Y\}$ t.q.

$$A=\bigcup_{y\in Y} B_{\varepsilon_y}(y)$$

Ejemplo:

Sea $A=\{f\in C[0,1] \mid \forall x\in[0,1]\ (|f(x)|<\frac{1}{2})\}$, es un abto en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ y A no es abto en $(C[0,1],\|\cdot\|_1)$

Dem.-

* Recordemos que $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$.

Tenemos que $f\in A \iff \forall x\in[0,1],\ |f(x)|<\frac{1}{2} \iff \max_{x\in[0,1]}|f(x)|<\frac{1}{2}$

$\iff \|f\|_\infty<\frac{1}{2} \iff d_{\|\cdot\|_\infty}(f,c_0)<\frac{1}{2} \iff f\in B_{\frac{1}{2}}(c_0)$

con $c_0\equiv 0$ función cero.

* P.D. A no es abto en $(C[0,1],\|\cdot\|_1)$

Recordemos que $\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|\,dx$

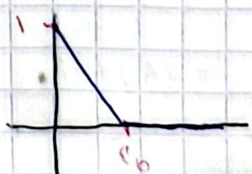
P.D. $\exists f\in C[0,1]$ t.q. $f\in A$ y $\forall\varepsilon>0$ $B_\varepsilon(f)\not\subseteq A$

P.D. $\exists g\in B_\varepsilon(f)$ t.q. $g\notin A$

Sea $f=c_0 \Rightarrow f\in A$ ✓

Sea $\varepsilon>0$, y sea $\varepsilon_0=\min\{\varepsilon,1\}$ y consideremos $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por:

$$g(x)=\begin{cases} -\frac{x}{\varepsilon_0}+1 & \\ 0 & \text{si } x>\varepsilon_0\end{cases}$$



g es continua y $\int_0^1|g(x)| = \frac{\varepsilon_0}{2} < \frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon \Rightarrow \|g\|_1=\|g-c_0\|_1 = d(g,c_0)=d(g,f)<\varepsilon \Rightarrow g\in B_\varepsilon(f)$ pero como $g(0)=1 \Rightarrow g\notin A$.

$\therefore$ A no es abto

Sea $A = \{\hat{x} \in \ell_2 \mid \exists n \in \mathbb{N} \ (\hat{x}(n) = 1)\}$, entonces A es cerrado en ℓ_2

Dem: Demostraremos que $\ell_2 \setminus A$ es abto.
tomemos $\hat{x} \in \ell_2 \setminus A$ p.d. $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B_\varepsilon(\hat{x}) \subseteq \ell_2 \setminus A$.

como $\hat{x} \in \ell_2 \setminus A \Rightarrow x \in \ell_2 \wedge x \notin A \Rightarrow \sum_{i \in \mathbb{N}} |x(i)|^2 < \infty$

$\Rightarrow \lim_{i \to \infty} |x(i)|^2 = 0 \Rightarrow$ para $\delta = \frac{1}{2}$ $\exists$ $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall m \geq N$

$\Rightarrow |x(i)|^2 < \delta \Rightarrow |x(i)| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\forall m \geq N$

$\Rightarrow$ para cada $m \geq N$, $|1 - x(m)| > |1| - |\frac{1}{\sqrt{2}}| = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \varepsilon_0$

y ahora para cada $m < N$ sabemos que $\hat{x}(m) \neq 1$ (pues $x \notin A$)
pero los $m < N$ son finitos, entonces sea

$$\varepsilon_1 = \min \left\{ \frac{|1 - \hat{x}(m)|}{2} \;\middle|\; m < N \right\} > 0$$

así, veamos que $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ es el buscado.

p.d. $B_\varepsilon(\hat{x}) \subset \ell_2 \setminus A$

Sea $\hat{y} \in B_\varepsilon(\hat{x}) \Rightarrow \|\hat{y} - \hat{x}\|_2 < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{N}} |\hat{y}(i) - \hat{x}(i)|^2} < \varepsilon$

$\Rightarrow \sum_{i \in \mathbb{N}} |y(i) - x(i)|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |\hat{y}(i) - \hat{x}(i)|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |\hat{y}(i) - \hat{x}(i)| < \varepsilon$

Entonces $\forall i \in \mathbb{N}$ $\hat{y}(i) \neq 1$, pues de no ser cierto $\Rightarrow \exists j \in \mathbb{N}$
t.q. $\hat{y}(j) = 1 \Rightarrow |y(j) - x(j)| < \varepsilon \Rightarrow |1 - x(j)| < \varepsilon$!

pero esto es imposible pues $\forall n \in \mathbb{N}$ $|1 - \hat{x}(n)| > \varepsilon$,

$\therefore$ $\hat{y}(i) \neq 1$ $\forall n \Rightarrow \hat{y} \in \ell_2 \setminus A$ $\therefore$ $B_\varepsilon(\hat{x}) \subseteq \ell_2 \setminus A$

$\therefore$ $\ell_2 \setminus A$ es abierto y así A es cerrado

Def.- Sea (X, τ) un esp. topológico y $Y \subseteq X$. La topología de subespacio de Y es:

$$\tau_{|Y} = \{ Y \cap A \mid A \in \tau \}$$

Proposición Sea (X, d) un esp. métrico, y $Y \subseteq X$. Si $d|_{Y \times Y}$ es la métrica restringida a Y entonces

$$\tau(d|_{Y\times Y}) = (\tau_d)|_Y$$

Operadores en topología

Def.- Sea (X, τ) un esp. topológico y $A \subseteq X$. Definimos

1.- $\text{int}(A) = \bigcup_{\substack{V \in \tau \\ V \subseteq A}} V$

2.- $\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ cerrado} \\ F \supseteq A}} F := Cl(A)$

Obs.- $\text{int}(A)$ es abto y $\text{int}(A) \subseteq A$
$\bar{A} = Cl(A)$ es cerrado y $A \subseteq \bar{A}$

Proposición.- Sea (X, τ) un esp. topológico. Dado $A \subseteq X$ se cumple que:

- Si V es abto y $V \subseteq A \Rightarrow V \subseteq \text{int}(A)$
- Si F es cerrado y $A \subseteq F \Rightarrow \bar{A} \subseteq F$
- A es abto si y solo si $\text{int}(A) = A$
- A es cerrado si y solo si $\bar{A} = A$ [Tarea]

Dem.-

- Sea V abto t.q. $V \subseteq A$. Por def, $\text{int}(A) = \bigcup_{\substack{V \subseteq A \\ V \text{ abto}}} V$

$\therefore V \subseteq \bigcup_{\substack{V \text{ abto} \\ V \subseteq A}} V = \text{int}(A).$

Sea F cerrado t.q. $F \supseteq A$. Así $F \supseteq \bigcap F' = \overline{A}$,
F' cerrado,
$F' \supseteq A$

$\Rightarrow$) Si A es abto, $\Rightarrow A \subseteq A \underset{(2)}{\Rightarrow} A \subseteq int(A)$ $\therefore A = int(A)$
porque ya sabemos que $int(A) \subseteq A$

$\Leftarrow$) Si $A = int(A) \Rightarrow A$ es abto

Proposición.- Sea (X, τ) un esp. topológico. Sean $A, B \subseteq X$.
Se cumple que:

1) Si $A \subseteq B \Rightarrow int(A) \subseteq int(B)$
2) $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$
3) $int(A) \cup int(B) \subseteq int(A \cup B)$

Proposiciones análogas en la tarea

Dem.-
(1) Sean $A \subseteq B \Rightarrow int(A) \subseteq A \subseteq B \Rightarrow int(A) \subseteq B$ pero tengo un abto contenido en $B \Rightarrow int(A) \subseteq int(B)$

(2)
$\subseteq$) Como $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B \underset{(1)}{\Rightarrow} int(A \cap B) \subseteq int(A)$ $\wedge$ $int(A \cap B) \subseteq int(B)$
$\Rightarrow int(A \cap B) \subseteq int(A) \cap int(B)$

$\supseteq$) Tenemos que $int(A) \subseteq A$ $\wedge$ $int(B) \subseteq B \Rightarrow int(A) \cap int(B) \subseteq A \cap B$
$\underset{(1)}{\Rightarrow} int(int(A) \cap int(B)) \subset int(A \cap B)$
pero como $int(A)$ y $int(B)$ son abtos por def. de topología $int(A) \cap int(B)$ es abto $\Rightarrow int(int(A) \cap int(B)) = int(A) \cap int(B)$
$\therefore$ $int(A) \cap int(B) \subseteq int(A \cap B)$

(3) Tenemos que $int(A) \subseteq A \subseteq A \cup B$ y $int(B) \subseteq B \subseteq A \cup B$
$\Rightarrow int(A) \cup int(B) \subseteq A \cup B \Rightarrow int[int(A) \cup int(B)] \subseteq int(A \cup B)$

$\Rightarrow int A \cup int(B) \subseteq int(A \cup B)$
(3)
Topología

Ejemplo:

- Sea $A=[-1,0)$ y $B=[0,1]$.

$*$ $int(A) = (-1,0)$ $\quad$ $*$ $int(A \cup B) = int([-1,0) \cup [0,1]) = int[-1,1] = (-1,1)$

$*$ $int(B) = (0,1)$

$\Rightarrow$ $int(A) \cup int(B) \neq int(A \cup B)$

Proposición.- Sea (X,d) esp. métrico. Sean $A \subseteq X$ y $x \in X$

(1) $x \in int(A) \iff$ existe $\varepsilon > 0$ t.q. $B_\varepsilon(x) \subseteq A$

(2) $x \in \bar{A} \iff \forall \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$

Dem.-

- $x \in int(A)$

$\Rightarrow)$ Si $x \in int(A)$, como $int(A)$ es abto $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ t.q. $B_\varepsilon(x) \subseteq int(A) \subseteq A$

$\Leftarrow)$ Si $B_\varepsilon(x) \subseteq A \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq int(A)$ (pues $B_\varepsilon(x)$ es abta) pero $x \in B_\varepsilon(x)$ $\therefore$ $x \in int(A)$.

-

$\Rightarrow)$ Sea $x \in \bar{A}$ y sup. que $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$

$\Leftarrow)$ Sup. que $x \notin \bar{A}$. Entonces como $X \setminus \bar{A}$ es abto existe $\varepsilon > 0$ t.q. $B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus \bar{A} \Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$! esto contradice que $\forall \varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. $\therefore$ $x \in \bar{A}$

Def.- Sea (X,τ) esp. top. $D \subseteq X$ es denso en (X,τ) si y sólo si $\bar{D} = X$

Ejemplos

- $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$

- Sea $D = \{ f \in C[a,b] \mid f$ un polinomio$\}$ entonces D es denso en $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$

Proposición.- Sea (X,τ) un esp. top. y $Y \subseteq X$. Dado $D \subseteq Y$ se cumple que D es denso en Y si y solo si

$$Y \subseteq \overline{D}^X$$

Dem:

$\Rightarrow)$ Sup. que $\overline{D}^Y = Y$. Sea $y \in Y$ y sup. por contradicción que $y \notin \overline{D}^X$. Así $\exists F \subseteq X$ cerrado t.q. $D \subseteq F$ y $y \notin F$.

Por definición $X \setminus F$ es abto en X. Así $y \in Y \cap (X \setminus F) = Y \setminus F$ es abto en Y $\Rightarrow$ $Y \setminus (Y \setminus F) = F \cap Y$ es cerrado en Y además

- $y \notin F \cap Y$
- $F \cap Y \supseteq D$

$\Rightarrow$ $y \notin \overline{D}^Y$! Así $y \in \overline{D}^X$

$\Leftarrow)$ Sup que $Y \subseteq \overline{D}^X$ P.D D es denso en Y

Sea $y \in Y$ y sea $F \subseteq Y$ cerrado en Y t.q $D \subseteq F$.
$Y \setminus F$ es abto en Y $\Rightarrow$ $\exists A \subseteq X$ abto en X t.q $Y \cap A = Y \setminus F$
Observemos que $X \setminus A$ es cerrado en X y

$$(X \setminus A) \cap Y = Y \setminus A = F$$

Así $D \subseteq X \setminus A$ $\Rightarrow$ $y \in (X \setminus A) \cap Y = F$

Teorema.- Sea (X,τ) esp. top. y $Y \subseteq X$, $F \subseteq Y$ es cerrado en Y si y solo si existe $G \subseteq X$ cerrado en X t.q $G \cap Y = F$

Proposición.- Sea (X,τ) esp. top. y $A \subseteq X$.
$x \in X$ cumple que $x \in \overline{A}$ si y solo si $\forall U \subseteq X$ abto t.q $x \in U$ se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$.

Dem:

$\Rightarrow)$ Sea $x \in \overline{A}$ supongamos por contradicción que existe $U \in \tau$ t.q $x \in U$ y $U \cap A = \emptyset$, $X \setminus U$ es cerrado y $A \subseteq X \setminus U$
$\Rightarrow$ $\overline{A} \subseteq X \setminus U$! es una contradicción ya que me dice que $x \in \overline{A} \cap U$

$\Leftarrow)$ Sup. que $x \notin \overline{A}$. Entonces sea $U = X \setminus \overline{A}$, Entonces U es abto y $x \in U$.
Observa que $\emptyset = U \cap \overline{A} \supseteq U \cap A$! esto contradice la hipótesis $\therefore$ $x \in \overline{A}$

Corolario.- Sea (X,τ) esp. top. $D\subseteq X$. Entonces D es denso en X $\iff$ $\forall U$ abto no vacío se tiene que $U\cap D\neq\emptyset$.

Dem:

$\Rightarrow$) Sup. que D es denso $\Rightarrow \bar{D} = X$. Sea $U\subseteq X$ abto no vacío. Sea $x\in U$. Observa que $x\in\bar{D}$ y $x\in U \Rightarrow x\in U\cap D\neq\emptyset$

$\Leftarrow$) Sea $x\in X$ y $U\subseteq X$ abto t.q. $x\in U$. En particular $U\neq\emptyset$. Así $U\cap D\neq\emptyset \Rightarrow x\in\bar{D}$ $\therefore$ $\bar{D} = X$

Obs.- Sea (X,τ) esp. top. y $A\subseteq X$ abierto, entonces

$$\tau_{|A}=\{V\cap A \mid V\in\tau\} = \{V\in\tau\mid V\subseteq A\}$$

Def.- Sea (X,τ) esp. topológico. Decimos que una familia $\mathcal{B}$ es una base para τ si y sólo si:

1) $\mathcal{B}\subseteq\tau$
2) para cada $A\in\tau$ existe $\{B_i\}_{i\in I}\subseteq\mathcal{B}$ t.q. $A=\bigcup_{i\in I} B_i$

Proposición.- El último punto es equivalente a que para cada $A\in\tau$ y para cada $x\in A$ se cumple que existe $B_x\in\mathcal{B}$ t.q. $x\in B_x\subseteq A$.

Ejemplos.-

• (X,τ) con $\tau=\mathcal{P}(X)$. Entonces $\{\{x\} : x\in X\}$ es base para τ.

• En $\mathbb{R}$. Sea $\mathcal{B}=\{(p,q)\mid p\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \wedge q\in\mathbb{Q} \wedge p<q\}$ es base

Dem: • $\mathcal{B}\subseteq\tau_e$ ✓

• Sea $A\in\tau_e$ y sea $x\in A \Rightarrow \exists\, \varepsilon>0$ t.q. $B_\varepsilon(x)\subseteq A$. Pero $B_\varepsilon(x)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ sabemos que existe $p\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ t.q. $x-\varepsilon<p<x$ y existe $q\in\mathbb{Q}$ t.q. $x<q<x+\varepsilon$
$\Rightarrow (p,q)\in\mathcal{B}$ y $x\in(p,q)\subseteq B_\varepsilon(x)\subseteq A$ $\therefore$ $x\in(p,q)\subseteq A$
$\therefore$ $\mathcal{B}$ es base

Escaneado con CamScanner

Proposición: Sea (X, τ) un esp. top., $\mathcal{B} \subseteq \tau$ una base para τ y $A \subseteq X$:

1) $x \in \text{int}(A)$ si y solo si existe $B \in \mathcal{B}$ t.q $x \in B \subseteq A$

2) $x \in \bar{A}$ si y solo si para cada $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$ se cumple que $B \cap A \neq \emptyset$

Dem.- Igual a las pruebas anteriores

Proposición: Sea (X, τ) esp. top., $\mathcal{B} \subseteq \tau$ una base para τ y $D \subseteq X$:
D es denso en X sii $\forall B \in \mathcal{B}$ se cumple que $(B \neq \emptyset)$ $B \cap D \neq \emptyset$

Dem.-
$\Rightarrow)$ Sup. que D es denso en X $\Rightarrow$ $\bar{D} = X$.
Sea $B \in \mathcal{B}$, $B \neq \emptyset$. Sea $x \in B$. Como $x \in X$, $\Rightarrow x \in \bar{D}$
$\Rightarrow$ (por la proposición anterior) $B \cap D \neq \emptyset$

$\Leftarrow)$ Sea $x \in X$ y $B \in \mathcal{B}$ t.q $x \in B$ $\Rightarrow B \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ hip que $B \cap D \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ (prop. anterior) $x \in \bar{D}$

Def.- Sea X un conjunto arbitrario y sean τ y τ' dos topologías en X. Decimos que τ refina a τ' si y solo si $\tau' \subseteq \tau$

Def.- Sea X un conjunto y sean d, ρ dos métricas sobre X. Diremos que d y ρ son equivalentes si y solo si

$$\tau_d = \tau_\rho$$

De manera equivalente diremos que dos normas $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ son equivalentes si y solo si

$$d_{\|\cdot\|} = d_{\|\cdot\|'}$$

son equivalentes

Escaneado con CamScanner

Proposición: Sea X un conjunto. Y sean d, ρ dos métricas sobre X. τ_d refina a τ_ρ si y sólo si

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad t.q \quad B^d_\delta(x) \subseteq B^\rho_\varepsilon(x)$$

Dem.-

$\Rightarrow$) Sea $x \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. por hipótesis $B^\rho_\varepsilon(x) \in \tau_\rho \subseteq \tau_d$

Así $\exists \delta > 0$ t.q $B^d_\delta(x) \subseteq B^\rho_\varepsilon(x)$.

$\Leftarrow$) p.d τ_d refina a τ_ρ p.d $\tau_\rho \subseteq \tau_d$

Sea $A \in \tau_\rho$ un abto arbitrario, p.d A es abto de τ_d

Sea $x \in A$ como $A \in \tau_\rho \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ t.q $B^\rho_\varepsilon(x) \subseteq A$ pero por hip $\exists \delta > 0$ t.q $B^d_\delta(x) \subseteq B^\rho_\varepsilon(x) \subseteq A$ $\therefore \exists \delta > 0$ t.q $B^d_\delta(x) \subseteq A$ $\therefore$ A es abto en τ_d $\therefore$ $A \in \tau_d$ $\therefore$ τ_d refina a τ_ρ

Proposición: Sea V un esp. vectorial. y sean $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ dos normas sobre V, son equivalentes:

(1) $\tau_{\|\cdot\|'} \subset \tau_{\|\cdot\|}$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.q $(B^{\|\cdot\|}_\delta(\bar{0}) \subseteq B^{\|\cdot\|'}_\varepsilon(\bar{0}))$

(3) $\exists c > 0 \quad \forall v \in V$ t.q $\|v\|' \leq c\|v\|$

Dem.-

(1) $\Rightarrow$ (2) !

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea $\varepsilon = 1$. $\Rightarrow \exists \delta > 0$ t.q $B^{\|\cdot\|}_\delta(\bar{0}) \subseteq B^{\|\cdot\|'}_1(0)$
$\Rightarrow \forall v \in V$ t.q $\|v\| < \delta \Rightarrow \|v\|' < 1$

(Tarea)

(3) $\Rightarrow$ (1) Basta probar que $\forall v \in V$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.q $B^{\|\cdot\|}_\delta(v) \subseteq B^{\|\cdot\|'}_\varepsilon(v)$
Sea $v \in V$ y $\varepsilon > 0$. También sea "c" como la hipótesis
Entonces sea $\delta = \frac{\varepsilon}{2c}$. En efecto

Sea $w \in B^{\|\cdot\|}_\delta(v) \Rightarrow \|v-w\| < \frac{\varepsilon}{2c} \Rightarrow c\|v-w\| < \frac{\varepsilon}{2}$ pero por hipótesis $\|v-w\|' \leq C\|v-w\| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|v-w\|' < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow w \in B_{\varepsilon}^{\|\cdot\|'}(v) \quad \therefore \quad B_{\delta}^{\|\cdot\|}(v) \subseteq B_{\varepsilon}^{\|\cdot\|'}(v) \quad \therefore \tau_{\|\cdot\|'} \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$

Teorema: Sea V esp. vectorial de dimensión finita y sean $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ dos normas sobre V. Entonces dichas normas son equivalentes.

Dem- ~~Primero haremos...~~ prueba para $\mathbb{R}^n$
Como la relación "ser equivalentes" es de equivalencia podemos sup sin p.d.g que $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_2$. Así si demostramos que toda norma es equivalente a la norma euclidiana entonces por equivalencia cualesquiera dos serán equivalentes.

Por la proposición anterior basta encontrar C_1 y $C_2 > 0$ t.q $\forall v \in V$ $\|v\| \leq C_1\|v\|_2$ y $\|v\|_2 \leq C_2\|v\|$
$(\tau_{\|\cdot\|_2} \subseteq \tau_{\|\cdot\|})$ $(\tau_{\|\cdot\|} \subseteq \tau_{\|\cdot\|_2})$

Sea $M = \max_{i \leq n} \|e_i\|$ donde $e_i = (0,0,\dots,1,0,0,0)$

Observa que si $v = \sum_{i \leq n} x_i e_i$, entonces $\|v\| \leq \sum_{i \leq n} |x_i| \, \|e_i\|$
$\leq \sum_{i \leq n} |x_i| M = M \sum_{i \leq n} |x_i|$

Pero recordemos que $\|x\|_1 = \sum_{i \leq n} |x_i| \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$

$\Rightarrow M \sum_{i \leq n} |x_i| \leq M\sqrt{n}\,\|v\|_2$. Así sea $C_1 = M\sqrt{n}$

Obs: $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua.
Dem:
Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta = \frac{\varepsilon}{C_1 \cdot 2}$. Observamos que $\forall v, w \in V$ se cumple que si $\|v-w\|_2 < \delta \Rightarrow |\|v\| - \|w\|| \leq \|v-w\| \leq$
$< C_1\|v-w\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Ahora, nos falta ver que $\exists C_2$ t.q $\|v\|_2 < C_2\|v\|$

Sea $A = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\|_2 = 1\}$

Obs: A es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$ (Cálculo 3)

Como $\|\cdot\|$ es continua entonces existe $v_0 \in A$

Escaneado con CamScanner

t.q. $\forall v \in A \ (\|v_0\| \leq \|v\|)$ ($\|\cdot\|$ es continua en un cerrado, entonces alcanza su mínimo)

Así veamos que $C_2 = \frac{1}{\|v_0\|}$ sirve.

En efecto, si $v=0$ $\|0\|_2 < C_2 \|0\|$ ✓.

Si $v \neq \bar{0}$ $\Rightarrow$ $\|v\| = \left\| v \cdot \frac{\|v\|_2}{\|v\|_2} \right\| = \|v\|_2 \, \underbrace{\left\| \frac{v}{\|v\|_2} \right\|}_{\in A}$

$\Rightarrow \|v\| \geq \|v\|_2 \|v_0\|$

$\Rightarrow \|v\|_2 \leq \frac{1}{\|v_0\|} \|v\| \Rightarrow \|v\|_2 \leq C_2 \|v\|$

$\therefore$ $\|v\| \leq C_1 \|v\|_2$ y $\|v\|_2 \leq C_2 \|v\|$ y así $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.

En general: Sea V esp. vecto. de dimensión finita. Y sean $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ normas sobre V.

Sea $T: V \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal biyectiva.

Definamos $\|\cdot\|_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\|v\|_a = \|T^{-1}(v)\|$
y $\|\cdot\|_b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\|v\|_b = \|T^{-1}(v)\|'$

Por lo demostrado anteriormente tenemos que $\tau_{\|\cdot\|_a} = \tau_{\|\cdot\|_b}$

Obs: $\tau_{\|\cdot\|} = \{ T^{-1}[A] \mid A \in \tau_{\|\cdot\|_a} \}$
$\tau_{\|\cdot\|'} = \{ T^{-1}[A] \mid A \in \tau_{\|\cdot\|_b} \}$ } Tarea

Pero como $\tau_{\|\cdot\|_a} = \tau_{\|\cdot\|_b} \Rightarrow \tau_{\|\cdot\|} = \tau_{\|\cdot\|'}$ $\therefore$ las normas son equivalentes.

Escaneado con CamScanner

Def: Sea $\{(X_i, d_i)\}$ una familia de esp. métricos todos acotados por una misma $r>0$.

Definimos $\mathcal{B} = \{\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i \mid \forall i\in\mathbb{N}\ (A_i \in \tau_{d_i}) \land (\{i\in\mathbb{N} : A_i \neq X_i \text{ es finito}\})\}$

Teorema: Sea $\{(X_i, d_i)\}$ una familia de esp. métricos, todos acotados por una misma $r>0$.
Entonces $\mathcal{B}$ es una base para $(\prod X_i, d_{suma})$ y $(\prod X_i, d_{supremo})$
En particular d_{suma} es equivalente a d_{sup}

Dem (particular)
Sea $A \in \tau_{d_{suma}}$, $\Rightarrow \exists \{B_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{B}$ t.q. $A = \bigcup_{i\in I} B_i$

y $\forall i \in I$ $B_i \in \tau_{sup}$, lo cual implica que $A \in \tau_{sup}$. $\Rightarrow \tau_{suma} \subseteq \tau_{sup}$
análogamente $\tau_{sup} \subseteq \tau_{suma}$ $\therefore$ son equivalentes

Dem: (supremo)

(1) P.D $\mathcal{B} \subseteq \tau_{sup}$ (2) P.D $\forall A \in \tau_{sup}$ $\exists B_x \in \mathcal{B}$ t.q. $x \in B_x \subseteq A$

Sea $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, tal que

- $\forall i\in\mathbb{N}$ $\{A_i \in \tau_i\}$
- $\{i\in\mathbb{N} \mid A_i \neq X\} = M$ es finito

Caso 1: Si $M = \emptyset$ $\Rightarrow$ $\forall i\in\mathbb{N}$, $A_i = X_i$ $\Rightarrow$ $\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$
pero este es el espacio que estoy usando y por def $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \in \tau_{sup}$

Caso 2: Si $M \neq \emptyset$ Sea $n_0 = \max M$.
Sea $\hat{x} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Para cada $i \leq n_0$, como $\hat{x}(i) \in A_i$
$\Rightarrow \exists \varepsilon_i > 0$ t.q. $B^{d_i}_{\varepsilon_i}(\hat{x}(i)) \subseteq A$.

Sea $\varepsilon = \dfrac{\min_{i\leq n_0} \varepsilon_i}{2^{n_0}}$ P.D $B_\varepsilon(\hat{x}) \subseteq \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$

Sea $\hat{y} \in B_\varepsilon(\hat{x})$ $\Rightarrow$ $\sup_{i\in\mathbb{N}} \left\{ \dfrac{d_i(\hat{x}(i), \hat{y}(i))}{2^i} \right\}$

Sub caso 1: si $i \geq h_0 \Rightarrow \bar{y}(i) \in A_i = \mathbb{X}_i$

Sub caso 2: si $i \leq h_0 \Rightarrow$ ~~$d_i(\bar{x}(i), \bar{y}(i)) < \sup$~~

$$\text{y } \varepsilon_i \geq \min_{j \leq h_0} \varepsilon_j \geq \frac{\min\{\varepsilon_j ; j \leq h_0\}}{2^{h_0 - i}} > d_i(\bar{x}(i), \bar{y}(i))$$

$$\Rightarrow \bar{y}(i) \in B^{d_i}_{\varepsilon_i}(\bar{x}(i)) \subseteq A_i$$

como $\forall i \in \mathbb{N}$, $\bar{y}(i) \in A_i \Rightarrow \bar{y} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$ $\therefore B_\varepsilon(\bar{x}) \subseteq \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$

$\therefore$ $B \subseteq \tau_{sup}$

(2) Dem: Sea $A \in \tau_{sup}$ y sea $\bar{x} \in A$. $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ t.q $B_\varepsilon(\bar{x}) \subseteq A$. PD $\exists B_x \in B$ t.q $x \in B_x \subseteq A$

(recordemos que todos los $(\mathbb{X}_i, d_i)$ están acotados por la misma cosa)

Sea $h_0 \in \mathbb{N}$ t.q $\frac{r}{2^{h_0}} < \varepsilon$.

Sabemos que si $\bar{y} \in B_\varepsilon(\bar{x}) \Rightarrow \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{d_i(\bar{x}(i), \bar{y}(i))}{2^i} < \varepsilon$

observemos que $\forall i \leq h_0$ se cumple que $\frac{d_i(\bar{x}(i), \bar{y}(i))}{2^i} < \varepsilon$

A

Def: Decimos que $(\mathbb{X}, \tau)$ es disconexo si y solo si $\exists A \in \tau$ t.q

(1) $A \neq \emptyset$, $\mathbb{X} \setminus A \neq \emptyset$

(2) $\mathbb{X} \setminus A \in \tau$ (equivalentemente A es cerrado)

Def: Sea (X, d) esp. métrico, y sean $A, B \subseteq \mathbb{X}$ ajenos y no vacíos, A y B están conectados si y solo si existe $x \in A \cup B$ t.q $\forall \varepsilon > 0$ se cumple que

(1) $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$

(2) $B_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset$

Def.- Sea (X, d) esp. métrico. Decimos que X es conexo si y solo si $\forall A \subseteq X$ de tal manera que $A \neq \emptyset$ y $X \setminus A \neq \emptyset$ se cumple que A y $X \setminus A$ están conectados.

Def.- Sea (X, d) esp. métrico y $A \subseteq X$. Definimos a la frontera de A como:

$$fr(A) = \{ x \in X \mid \forall \varepsilon > 0 \ (B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \ \wedge \ B_\varepsilon(x) \cap X \setminus A \neq \emptyset) \}$$

(Reformulación conexidad) Sea (X, d) esp. métrico. Decimos que X es conexo si y solo si $\forall A \subseteq X$ no vacío, $A \neq X$ se cumple que $fr(A) \neq \emptyset$

Proposición.- Sea (X, d) esp. métrico y $A \subseteq X$, entonces

$$fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$$

En particular $fr(A)$ es cerrado.

Proposición.- Sea $A \subseteq X$. A es abierto si y solo si $A \cap fr(A) = \emptyset$

Dem.-

$\Rightarrow)$ Sup. A abierto. Sea $x \in A \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ t.q. $B_\varepsilon(x) \subseteq A$
$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap X \setminus A = \emptyset$. Así $x \notin fr(A)$. $\therefore A \cap fr(A) = \emptyset$

$\Leftarrow)$ Sup. que $A \cap fr(A) = \emptyset$. Sea $x \in A \overset{hip}{\Rightarrow} x \notin fr(A)$
Así $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$ o $B_\varepsilon(x) \cap X \setminus A = \emptyset$
Pero como $x \in A$ y $x \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap X \setminus A = \emptyset$
$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq A$

Escaneado con CamScanner

Teorema: ((A) ⟺ (¬B)). Sea (X,d) un esp. métrico. X es disconexo (respecto la def. ¬B) si y solo si $\exists A \subseteq X$, $A \neq X$ t.q

(1) $A \neq \emptyset$, $X \setminus A \neq \emptyset$
(2) A, $X \setminus A$ son abiertos.

Dem:
⇒) Sup. que X es disconexo, por def. existe $A \subseteq X$ no vacío con complemento no vacío t.q $fr(A) = \emptyset = fr(X \setminus A)$,
⇒ $A \cap fr(A) = \emptyset$ y $X \setminus A \cap fr(X \setminus A) = \emptyset$ ∴ por la proposición anterior A y $X \setminus A$ son abiertos.

⇐) Sup. que se cumplen (1) y (2) para $A \subseteq X$.
Como A es abto ⇒ $A \cap fr(A) = \emptyset$ y como $X \setminus A$ es abto ⇒ $X \setminus A \cap fr(X \setminus A) =$
Así $fr(A) = \emptyset$ ∴ A es disconexo

Def: Sea (X,τ) un esp. top. Decimos que X es disconexo si y solo si $\exists A \subseteq X$ ~~abto y cerrado no trivial, es decir~~ t.q.

(1) A abto
(2) A cerrado
(3) $A \neq \emptyset$ y $A \neq X$

Teorema: Sea (X,d) esp. métrico t.q $2 \leq |X| < |\mathbb{R}|$ (no existe f suprayectiva de X a $\mathbb{R}$) entonces X es disconexo

Dem: Sea $x_0 \in X$ y $y_0 \in X$ distintos. Sea $r = d(x_0, y_0)$ y sea $f: X \to [0,r]$ dada por

$$f(z) = \begin{cases} d(x,z) & \text{si } d(x,z) \leq r \\ r & \text{si } d(x,z) > r \end{cases}$$

Como $|X| < |\mathbb{R}| = |[0,r]|$ ⇒ f no es suprayectiva. Así $\exists\, \varepsilon \in [0,r]$ t.q $\varepsilon \notin \operatorname{Im} f$

Obs: $0 < \varepsilon < r$ ~~, pues $d(x,x)=0$~~, pues $d(x_0,x_0) = 0$ y $d(x_0,y_0) = r$

P.D. $B_\varepsilon(x_0)$ es abto y cerrado, no trivial

- $B_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset$ pues $d(x_0,x_0) = 0 < \varepsilon$
- $X \setminus B_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset$, pues $d(x_0,y_0) = r > \varepsilon$

Escaneado con CamScanner

• $\overline{B_\varepsilon(x_0)}$ es abto ✓

• $B_\varepsilon(x)$. es cerrado

En efecto, tenemos que $\{z \in X \mid d(x_0,z) \leq \varepsilon\}$ es cerrado (pues en tarea se demostró que $\{z \mid d(x_0,z) > \varepsilon\}$ es abto)

Así $\overline{B_\varepsilon(x_0)} \subseteq \{z \in X \mid d(x_0,z) \leq \varepsilon\} = \{z \in X \mid d(x_0,z) < \varepsilon\} = B_\varepsilon(\cancel{x_0})$

$\therefore$ $B_\varepsilon(x_0)$ es cerrado

$\therefore$ $\therefore$ X es disconexo.

Def: Sea X un conjunto. Formalmente una sucesión es una función $\hat{x}: \mathbb{N} \to X$

Generalmente solemos denotar cada valor de $\hat{x}$ por x_i. Es decir $\forall i \in \mathbb{N}$ $x_i := \hat{x}(i)$ y la función $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\langle x_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$

Def: Sea $\hat{x}: \mathbb{N} \to X$ una sucesión. Decimos que $\hat{y}: \mathbb{N} \to X$ es una subsucesión si y sólo si existe $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente. t.q $\hat{x} \circ \varphi = \hat{y}$

Ejemplos

• $\hat{x}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $\hat{x}(n) = \frac{1}{n+1}$ y $\hat{y}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\hat{y}(n) = \frac{1}{2n+1}$

entonces $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\varphi(n) = 2n$ es estrictamente creciente y $(\hat{x} \circ \varphi)(n) = \hat{x}(\varphi(n)) = \hat{x}(2n) = \frac{1}{2n+1} = \hat{y}(n)$.

Obs: Si $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito entonces $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$ donde $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$

podemos definir de manera natural la función $\varphi_A: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $\varphi_A(n) = a_n$

Notación: Sea $\hat{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión sobre X. para $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito denotaremos por $\{x_i\}_{i \in A}$ a la sucesión $\hat{x} \circ \varphi_A$

O también $\{X_{a_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ donde $A=\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ t.q $a_0 < a_1 < \dots < a_n < \dots$

Obs.- Si $\bar{x}$ es una sucesión en X y $\bar{y}$ es una subsucesión de $\bar{x}$ y $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente de tal suerte que

$$\bar{y} = \bar{x} \circ \varphi$$

Entonces $\bar{y} = \{X_i\}_{i\in \operatorname{Im}\varphi}$

Def.- Sean $A, B \subseteq \mathbb{N}$ infinitos. Decimos que:

(1) $A \subseteq^* B$ si y solo si $A \setminus B$ es finito (casi contenido)

(2) $A =^* B$ si y solo si $A \subseteq^* B$ y $B \subseteq^* A$ (casi igual)

(3) $A \cap B =^* \emptyset$ si y solo si $A \cap B$ es finito. (casi ajenos)

Ejemplo.-
$A = \{4n \mid n\in\mathbb{N}\} \cup \{n \mid n \le 10\}$ y $B = \{2n \mid n\in\mathbb{N}\}$

Tenemos que $A \subseteq^* B$ pues $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Def.- Sea (X, d) un esp métrico, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y $a \in X$. Decimos que $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a "a", denotado por

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to a, \quad x_n \to a$$

si y solo si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}$ t.q $\forall m \ge n \ (x_m \in B_\varepsilon(a))$
equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0 \ (\{m \in \mathbb{N} \mid x_m \in B_\varepsilon(a)\} =^* \mathbb{N})$$

Si $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito entonces $\{x_n\}_{n\in A}$ converge a a ssi
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}$ t.q $\forall m \ge n \in A \ (x_n \in B_\varepsilon(a))$
equivalentemente $\forall \varepsilon > 0 \ (\{m \in A \mid x_m \in B_\varepsilon(a)\} =^* \mathbb{N})$

Escaneado con CamScanner

Ejemplo:

• Sea $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sucesión en $C[0,1]$ t.q. $\forall i \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$f_i(t) = \begin{cases} 2^i\left(\frac{1}{2^i}+1\right) & \text{si } x\in[0,\frac{1}{2^i}] \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Entonces $\{f_n\} \to 0$ en $(C[0,1], d_i)$.

Dem:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $d_1(f_n, \bar{0})_i = \int_0^1 |f_n(x) - 0|\,dx = \int_0^1 |f_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$

Así dado $\varepsilon > 0$, sea $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{2^{n+1}} < \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\forall m \geq n$ se cumple que $d_1(f_m, 0)_i = \frac{1}{2^{m-1}} \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$

$\therefore$ $f_m \in B_\varepsilon(0)$

Por otro lado $\{f_n\}$ no converge en $(C[0,1], d_\infty)$

Proposición: Sea (X, d) esp. métrico, $\{x_n\}$ sucesión en X y $a, b \in X$

Dem: por contradicción, sup. que $a \neq b$ y sea $\varepsilon = \frac{d(a,b)}{2}$
Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall m \geq n_0$, se cumple que $\forall m \geq n_0$ $d(x_m, a) < \varepsilon$,

Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall m \geq n_1$ $d(x_m, b) < \varepsilon$ y sea $m = \max\{n_0, n_1\}$
$\Rightarrow$ $d(a, x_{m_0}) < \varepsilon$ y $d(b, x_{m_0}) < \varepsilon$

$\Rightarrow$ $d(a,b) \leq d(a, x_{m_0}) + d(b, x_{m_0}) < 2\varepsilon = d(a,b)$ $\blacksquare$

Proposición: Sea (X, d) esp. métrico, $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $a \in X$. Son equivalentes:

(1) $\{x_n\} \to a$

(2) ~~~~ para cada $A \subseteq X$ abierto con $a \in A$, entonces, $\{m \in \mathbb{N} \mid x_m \in A\} =^* \mathbb{N}$

Dem:

$1 \Rightarrow 2)$ Sea $A \subseteq X$ abierto con $a \in A$. $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B_\varepsilon(x) \subseteq A$ (A abierto)

y por convergencia $\{m \in \mathbb{N} \mid x_m \in B_\varepsilon(a)\} =^* \mathbb{N}$

Es decir $\mathbb{N} \setminus \{m \in \mathbb{N} \mid x_m \in B_\varepsilon(a)\}$ es finito pero

$\Rightarrow$ $\{m \in \mathbb{N} \mid x_m \in B_\varepsilon(a)\} \subseteq \{m \in \mathbb{N} \mid x_m \in A\}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{N} \setminus \{m \in \mathbb{N} \mid x_m \in A\}$ es finito $\therefore$ $\{m \in \mathbb{N} \mid x_m \in A\} =^* \mathbb{N}$

$2 \Rightarrow 1)$ Como (2) se cumple $\forall$ abto en particular $\forall B_\varepsilon(a)$

$\Rightarrow$ $\{m \in \mathbb{N} \mid x_m \in B_\varepsilon(a)\} =^* \mathbb{N} \Rightarrow x_n \to a$.

Proposición.- Sea (X, d) esp. métrico y sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una suc. convergente a $a \in X$. Para cada $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito se cumple que $\{x_n\}_{n \in A}$ converge a a.

Dem.- Sea $\varepsilon > 0$, $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall m \geq n \Rightarrow d(x_m, a) < \varepsilon$

En particular $\forall m \in A$ t.q. $m \geq n$ $d(x_m, a) < \varepsilon$

$\therefore$ $\{x_n\}_{n \in A}$ converge a "a".

Teorema.- Sea (X, d) un esp. métrico, $A \subseteq X$ y $x \in X$, entonces:

(1) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sobre A t.q. $x_n \to x$

(2) $x \in \text{int}(A) \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $x_n \to x$ se cumple que
$$\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in A\} =^* \mathbb{N}$$

Dem.-

(1)

$\Rightarrow)$ s.p. que $x \in \bar{A}$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ sabemos que $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A \neq \emptyset$

entonces sea $y_n \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, p.d. $y_n \to x$

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{N} < \varepsilon$, entonces

$\forall n \geq N$, $B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq B_{\frac{1}{N}}(x) \subseteq B_\varepsilon(x) \Rightarrow \forall n \geq N$ $y_n \in B_\varepsilon(x)$

así $y_n \to x$

$\Leftarrow)$ Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión sobre A t.q. $x_n \to x$. p.d. $x \in \bar{A}$

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall m \geq n$ $x_n \in B_\varepsilon(x)$

En particular $x_n \in B_\varepsilon(x) \cap A$ pues $\{x_n\} \subseteq A$

$\therefore$ $x \in \bar{A}$

(2)

$\Rightarrow)$ Sup que $x \in int(A)$ y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ t.q $x_n \to x$.

por la prop. anterior como $x_n \to x$, $int(A) \subseteq A$ abierto y $x \in int(A) \Rightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in int(A)\} = {}^*\mathbb{N}$

y como $int(A) \subseteq A \Rightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in A\} = {}^*\mathbb{N}$

$\Leftarrow)$

Corolario.- $A \subseteq X$ es cerrado si y solo si cualquier sucesión sobre A convergente, converge a un punto en A.

Proposición.- Sea (X, d) un esp. métrico, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión sobre X y $a \in X$.

Entonces $\{x_n\} \to a$ en X si y solo si $\{d(x_n, a)\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ en $\mathbb{R}$

Dem:-

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces por h.p $\exists m \in \mathbb{N}$ t.q

$\forall n \geq m$, $x_n \in B_\varepsilon(a) \iff d(x_n, a) < \varepsilon$

$\iff |d(x_n, a) - 0| < \varepsilon \iff d(x_n, a) \to 0$.

Proposición.- Sea (X, d) un esp. métrico y $\{x_i\}$ una sucesión convergente. Entonces $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Dem:- Sea $a \in X$ t.q $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ y sea $\varepsilon > 0$.
por def de conver. para $\frac{\varepsilon}{2}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q
$\forall m \geq n_0$ se cumple que $d(x_m, a) < \varepsilon/2$

$\Rightarrow \forall m, n > n_0$ $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \varepsilon$

Def.- Dado (X, d) esp. métrico y $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Decimos que $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si y solo si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall m, n \geq n_0$ se tiene que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$

Proposición Sea (X, d) esp. métrico y $\{x_i\}$ una sucesión. Entonces $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy $\Longleftrightarrow$ $\exists (Y, \rho)$ esp. métrico que tiene como subespacio métrico a (X, d) y en el cual $\{x_i\}$ es convergente.

Dem.-

$\Leftarrow]$ por la prop. anterior.

$\Rightarrow]$ sup. que $\{x_i\}$ es de Cauchy. Tenemos dos casos.

Caso 1: si $\{x_i\}$ converge en X. Y como $(X, d) = (Y, \rho)$, acabamos

Caso 2: si $\{x_i\}$ no converge en X.

Para cada $y \in X$ observamos que:

(1) $\{d(y, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$

En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall m, n \geq n_0$ t.q.

$$|d(y, x_n) - d(y, x_m)| \leq d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

$\therefore$ $\{d(y, x_n)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$

$\therefore$ converge

(2) Si $a_y = \lim_{n\to\infty} d(y, x_n)$ entonces $\overset{a_y > 0}{a_y \neq 0}$. Esto pues si se cediera que $\lim_{n\to\infty} d(y, x_n) = 0 \Rightarrow x_n \to y \in X$!!! pero esto contradice que $\{x_i\}$ no converge en X.

Ahora sean $\infty \notin X$. Definimos $Y = X \cup \{\infty\}$ y $\rho : Y^2 \to \mathbb{R}$ dado por

$$\rho(x, y) = \begin{cases} d(x, y) & \text{si } x, y \in X \\ a_x & \text{si } x \in X \text{ y } y = \infty \\ a_y & \text{si } x = \infty \text{ y } y \in X \\ 0 & \text{si } x, y = \infty \end{cases}$$

Escaneado con CamScanner

Obs.- ρ es métrica.
(Sale pero son con casos, no lo pondré)

Teorema.- Sea (X, d) esp. métrico y $\{x_n\}$ una suce. de Cauchy, si $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente entonces la sucesión original converge.

Dem.- Sea (X, ρ) como la prop. anterior. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito t.q. $\{x_n\}_{n \in A}$ converge en X y sea $a \in X$ el punto al que converge la subsucesión y $b \in X$ t.q. $\lim_{x \to \infty} x_n = b$

Concluimos que $\{x_n\}_{n \in A}$ convergen a b y como el límite es único $\Rightarrow a = b$ // $\therefore \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto de X.

Def.- Sea (X, d) esp. métrico es completo si y solo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente

Def.- Sea $(V, \|\cdot\|)$ es un esp. de Banach si y solo si $(V, d_{\|\cdot\|})$ es completo

Def.- Un espacio $(V, \langle,\rangle)$ un espacio con producto interno es un espacio de Hilbert si y solo si $(V, \|\cdot\|_{\langle,\rangle})$ es un espacio de Banach.

Ejemplos.-

- $([0,1], |\cdot|)$ es completo.

- $((0,1], |\cdot|)$ no es completo.

  pues $\{\frac{1}{n}\}$ es de Cauchy, pero no converge en $(0,1]$.

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un espacio de Banach

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Banach

Teorema.- Sea X arbitrario, entonces $(B(X,\mathbb{R}), d_\infty)$ es completo.

Dem.- Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ suce. de Cauchy en $B(X,\mathbb{R})$

Obs.- Dado $x\in X$, se cumple que $\forall n,m\in\mathbb{N}$

$$|f_n(x)-f_m(x)| \leq \sup_{x\in X} |f_n(x)-f_m(x)| = d_\infty(f_n,f_m)$$

Así $\{f_n(x)\}$ es sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, y como $\mathbb{R}$ es completo se tendrá que $\{f_n(x)\}$ converge en $\mathbb{R}$. $\forall x$.

Definimos $h: X \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

P.D. h acotada.

Sea $\varepsilon = 1$, como $\{f_n\}$ es de Cauchy, entonces $\exists n_0\in\mathbb{N}$ t.q. $\forall n,m \geq n_0$ se cumple que $d_\infty(f_{n_0}, f_m) < 1$
y entonces tenemos que

$$|f_m(x)| - |f_{n_0}(x)| \leq |f_m(x) - f_{n_0}(x)| \leq d_\infty(f_{n_0}, f_m) < 1$$

$$\Rightarrow |f_m(x)| < 1 + |f_{n_0}(x)| \leq 1 + \sup_{x\in X} |f_{n_0}(x)|$$

$$\Rightarrow |h(x)| = |\lim_{n\to\infty} f_n(x)| \leq 1 + \sup\{|f_{n_0}(x)|\}$$

$\therefore$ h es acotada y así $h \in B(X,\mathbb{R})$

PD $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a h PD $\forall \varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ t.q. $\forall n\geq n_0$ $d_\infty(f_n,h)<\varepsilon$

Sea $\varepsilon>0$, por def. de suce. de Cauchy para $\frac{\varepsilon}{2}>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ t.q. $\forall n,m\geq n_0$ se cumple que

$$d_\infty(f_n,f_m)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Fijamos $m\in\mathbb{N}$, $m\geq n_0$, entonces para cada $n\geq n_0$

$$|f_m(x)-f_n(x)|\leq d_\infty(f_n,f_m)<\frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}|f_m(x)-f_n(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow |f_m(x)-\lim_{n\to\infty}f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow |f_m(x)-h(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ y esto $\forall x\in X$

$\therefore$ $d_\infty(f,h)<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$

$\therefore$ $f_n\to h$ $\therefore$ toda sucesión de Cauchy en $B(X,\mathbb{R})$ converge $\therefore$ es completo.

Teorema.- $\forall p\geq 1$, $(\ell_p,\|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach.

Teorema.- Supongamos que (X,d) es un esp. métrico completo y $Y\subseteq X$. Entonces $(Y,d_{Y\times Y})$ es un subespacio cerrado si, y sólo si, es completo.

Dem.-

$\Rightarrow$] Sup. que Y es cerrado y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en Y, pero como $Y\subseteq X$ $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ es de Cauchy en X y como X es completo $\{x_n\}$ converge.

Pero como Y es cerrado y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq Y$ converge por una proposición vista se tiene que $x_n\to a\in Y$ $\therefore$ Y es completo.

$\Leftarrow$] Sup. que (Y,d_Y) es completo.
Así $\forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ suce. convergente en Y, $x_n\to a\in X$, pero toda sucesión convergente es de Cauchy y como (Y,d_Y)

es completo $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ es convergente a un punto $y \in I$
y como el límite es único $x_n \to a = y \in I$ $\therefore$ Y es cerrado.

Proposición: Sea $a < b \in \mathbb{R}$. Entonces $C_\infty[a,b]$ es subespacio cerrado de $B([a,b], \mathbb{R})$ con la métrica del supremo.

Dem:

- Es subespacio. Pues si $f \in C_\infty[a,b]$ $\Rightarrow$ f es continua en $[a,b]$ $\therefore$ es acotado $\therefore$ $f \in B[a,b], \mathbb{R}$ y $d_\infty \equiv d_{sup}$

- P.D es cerrado.

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión sobre $C[a,b]$ y sup que dicha sucesión converge sobre $B([a,b], \mathbb{R})$ a una función g.

P.D $g \in C[a,b]$

Sea $x \in [a,b]$ y $\varepsilon > 0$. Como $f_n \xrightarrow{\text{en } B[a,b]} g$ entonces para $\varepsilon/3$ existe $n \in \mathbb{N}$ t.q $\forall m \geq n$ $d_{sup}(f_m, g) < \frac{\varepsilon}{3}$

Como f_n es continua, $\forall n$ y esta $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ $\exists \delta > 0$ t.q si $|x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Observemos que si $y \in [a,b]$ cumple que $|x - y| < \delta$ entonces

$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - g(y)|$$
$$\leq d_{sup}(g, f_n) + |f_n(x) - f_n(y)| + d_{sup}(f_n, g)$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$\therefore$ $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ $\therefore$ g es continua

$\therefore$ $g \in C[a,b]$ $\therefore$ $C[a,b]$ es subespacio cerrado

Corolario: $C_\infty[a,b]$ es un espacio métrico completo

Dem: Como $C_\infty[a,b]$ es subespacio cerrado de $B[a,b]$ entonces es completo.

Def.- Sea $(\mathbb{X}, d)$ esp. métrico. Decimos que $\mathbb{X}$ es un espacio polaco si y solo si

(1) $\exists D \subseteq \mathbb{X}$ denso numerable

(2) $\exists d' : \mathbb{X}^2 \to \mathbb{R}$ métrica equivalente a d, tal que $(\mathbb{X}, d')$ es un espacio completo

Si se cumple solo (2) decimos que $\mathbb{X}$ es completamente metrizable

~~Ejemplos~~

Def.- Sea $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico y $A \subseteq \mathbb{X}$. Decimos que:

(1) A es G_δ (G delta) de $\mathbb{X}$ si existe una familia $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de abiertos en $\mathbb{X}$ t.q $A = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$

(2) A es F_σ (F sigma) de $\mathbb{X}$ si existe una familia $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de cerrados en $\mathbb{X}$ t.q $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$

Obs.- Todo abierto es G_δ y todo cerrado es F_σ

$\mathbb{Q}$ es F_σ en $\mathbb{R}$, pero no es G_δ (lo veremos más adelante)

Def.- Sea $(\mathbb{X}, d)$ esp. métrico y sea $A \subseteq \mathbb{X}$, $A \neq \emptyset$ para cada $x \in \mathbb{X}$ definimos:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

Obs.- $d(x, A) = 0 \iff x \in \bar{A}$

Proposición.- Sean $x, y \in \mathbb{X}$ y $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{X}$, entonces

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$$

Dem.- Sea $z \in A$ arbitrario, entonces

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \Rightarrow \inf\{d(x, z) : z \in A\} \leq \inf\{d(x, y) + d(y, z)\}$

$\leq \inf\{d(x, y)\} + \inf\{d(y, z)\} = d(x, y) + d(y, A).$

Escaneado con CamScanner

Corolario.- Sean $x, y \in X$ y $\emptyset \neq A \subseteq X$, (entonces)

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$$

Corolario.- Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to y$ en X entonces $\{d(x_n,A)\} \to d(y,A)$ en $\mathbb{R}$

Dem.- Sea $\varepsilon > 0$. Como $x_n \to y$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq n_0$ $d(x_n,y) < \varepsilon$ por el corolario anterior tendremos que

$$|d(x_n,A) - d(y,A)| \leq d(x_n,y) < \varepsilon \quad \therefore \quad d(x_n,A) \to d(y,A)$$

Teorema.- Sea (X,d) un esp. métrico completamente metrizable y sea $A \in X$ G_δ. Entonces A es com. metrizable.

Dem.- Como X es com. metr. $\exists d' : X^2 \to \mathbb{R}$ t.q. (X,d') es completo. Así consideremos (X,d').

Sean $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una fam de abiertos t.q. $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. (por ser G_δ) y $\forall n \in \mathbb{N}$ sea $F_n = X \setminus U_n$ cerrado.

Definamos $\tilde{d} : A^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\tilde{d}(x,y) = d'(x,y) + \sum_{n=0}^{\infty} \min\left\{\frac{1}{2^{n+1}}, \left|\frac{1}{d(x,F_n)} - \frac{1}{d(y,F_n)}\right|\right\}$
Será métrica (No demostrado, pero sí)

P.D. $\tilde{d}$ es métrica equivalente a $d'|_{A\times A}$
De tarea

P.D. $\tilde{d}$ es métrica completa sobre A.

Dem.- Sea $\{x_n\}$ sucesión de Cauchy respecto a $(A, \tilde{d})$. Observemos que $\forall n,m \in \mathbb{N}$

$$d'(x_n,x_m) \leq \tilde{d}(x_n,x_m) \qquad (\text{pues } \tilde{d}(x,y) \geq d'(x,y))$$

Así $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy respecto a (X,d') y como (X,d') es completo $\Rightarrow$ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to y \in X$ respecto a d'.

P.D. $y \in A$
Veremos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $y \in U_n$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y observemos que
(1) $\{d(x_n,F_{n_0})\} \to d(y,F_{n_0})$ (corolario de arriba)
(2) Si $\varepsilon = 2^{n_0+1}$ $\Rightarrow$ $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n,m \geq n_1$,
$\frac{1}{2^{n+1}} > \tilde{d}(x_n,x_m) > d(x_n,x_m) + \sum_{n=0}^{\infty} \min\{ \ldots \}$

$\geq \min\left\{ \frac{1}{2^{n+1}}, \left| \frac{1}{d(X_m, F_{n_0})} - \frac{1}{d(X_n, F_{n_0})} \right| \right\}$

$\Rightarrow \min\{ - \} = \left| \frac{1}{d(X_n, F_{n_0})} - \frac{1}{d(X_m, F_{n_0})} \right|$

$\therefore$

Así $\left\{ \frac{1}{d(X_n, F_{n_0})} \right\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ $\therefore$ converge

y como $\{ d(X_n, F_{n_0}) \} \to d(Y, F_{n_0})$ $\Rightarrow$ $\left\{ \frac{1}{d(X_n, F_{n_0})} \right\} \to \frac{1}{d(Y, F_{n_0})}$

$\therefore$ no puede pasar que $d(Y, F_{n_0}) = 0$

$\therefore$ $d(Y, F_{n_0}) > 0$, así $Y \notin F_{n_0}$ $\Rightarrow$ $Y \in X \setminus F_{n_0} = U_{n_0}$

$\therefore$ $Y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = A$.

$\therefore$ $\{X_n\} \to Y$ en $(A, \tilde{d})$ $\therefore$ $(A, \tilde{d})$ es completo

$\therefore$ $(A, d|_{A \times A})$ es comple. metrizable.

Corolario: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es comp. metrizable.

Dem: Sea $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una enumeración de los racionales

$\forall n \in \mathbb{N}$ sea $U_n = \mathbb{R} \setminus \{q_n\}$ es abto y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$

$\therefore$ ~~$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$~~ es G_δ $\therefore$ es comp. metrizable

Teorema: Sea (X, d) completo y t.q. $\forall A \subseteq X$ abto no vacío con $|A| \geq 2$, entonces $|X| \geq |\mathbb{R}|$

Completaciones

Lema.- Sea (X, d) un esp. métrico. Supongamos que existe $D \subseteq X$ denso ~~tq~~ entonces cada sucesión de Cauchy sobre D converge, a un punto de X (no necesariamente D), sí y sólo si X es completo.

Dem:-

$\Leftarrow$) ✓

$\Rightarrow$) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ suces. de Cauchy en X.
Como D es denso entonces $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists d_n \in D$ t.q. $d_n \in B_{\frac{1}{2^{n+1}}}(x_n)$

P.D. $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy

En efecto, sea $\varepsilon>0$ $\Rightarrow$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n, m \geq n_0$ $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$

$$\Rightarrow d(d_n, d_m) \leq d(d_n, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, d_m)$$
$$< \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Estos n_1, n_2 son t.q. $\frac{1}{2^{n_1+1}} < \frac{\varepsilon}{3}$ y $\frac{1}{2^{n_2+1}} < \frac{\varepsilon}{2}$ por la prop. arquimediana.
$\therefore$ $\{d_n\}$ es de Cauchy en D $\therefore$ por hip. converge $d_n \to d$
$\Rightarrow$ x_n converge a d pues $d(x_n, d) \to 0$.

Def.- Sea (X, d) un esp. métrico. Decimos que $(\varphi, (Y, d'))$ es una completación de X si y sólo si.

(1) (Y, d') es completo
(2) $\varphi: X \to Y$ es una isometría
(3) $\varphi(X)$ es denso en Y

Teorema.- Todo espacio métrico admite una completación.
Dem:- Sea (X, d) esp. métrico

(1) Tenemos que $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, d_∞ es completo simple

(2) Sea $\varphi: X \to \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ dado por $\varphi(x)(z) = d(x, y_0) - d(x, z)$
donde y_0 es fijo. Es una isometría

(3) Sea $Y = \overline{\varphi(X)}$.
Observe que (Y, d_∞) es completo pues es un cerrado

en un espacio métrico completo, y $\varphi(\mathbb{X})$ es denso en $\varphi(\mathbb{X})=\mathbb{Z}$.
$\therefore (\varphi, (\mathbb{Z}, d_\alpha))$ es completación

Teorema.- Sean $(\varphi_{\mathbb{Y}}, (\mathbb{Y}, \delta'))$ y $(\varphi_{\mathbb{Z}}, (\mathbb{Z}, \rho))$ dos completaciones. Entonces existe una isometría $\psi: \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$ ~~sob~~ biyectiva t.q. $\psi \circ \varphi_{\mathbb{Y}} = \varphi_{\mathbb{Z}}$

Dem.- Tarea

Def.- Sea $(\mathbb{X}, d)$ esp. métrico y $A \subseteq \mathbb{X}$. Decimos que A es nunca denso (o densa en ninguna parte) si $\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$

Def.- Sea $\mathbb{X}$ un conjunto arbitrario e $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$. Diremos que $\mathcal{I}$ es un ideal (propio) si cumple:

(1) $\emptyset \in \mathcal{I} \wedge \mathbb{X} \notin \mathcal{I}$

(2) $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$ si $A \in \mathcal{I} \wedge B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{I}$

(3) $\forall A, B \in \mathcal{I}$; $A \cup B \in \mathcal{I}$

Ejemplos:

- Sea $\mathbb{X}$ ~~un~~ conjunto infinito ~~y~~ $\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ es finito}\}$ es un ideal en $\mathbb{X}$
- Sea $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ e $\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid A \subseteq \mathbb{Q}\} = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$

Def.- $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ es un σ-ideal si es un ideal y $\forall \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}$ se cumple que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{I}$

Ejemplos:

- Los conjuntos de medida cero en un espacio medible.
- Si $\mathbb{X}$ es no numerable en. $\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ es a lo mas numer}\}$ es un σ-ideal

Escaneado con CamScanner

Def.- Un conjunto $M \subseteq X$ es magro (o de primera categoría) si

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

donde cada A_n es nunca denso.

Obs 1.- Si M es magro y $N \subseteq M \Rightarrow N$ es magro
pues si M es magro $\Rightarrow M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y entonces $N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap N)$
donde $A_n \cap N$ es nunca denso.

$\operatorname{int}(\overline{A_n \cap N}) \subseteq \operatorname{int}(\overline{A_n}) = \emptyset \Rightarrow \operatorname{int}(\overline{A_n \cap N}) = \emptyset$

Obs 2.- Todo conjunto nunca denso es magro.
En particular $\emptyset$ es magro.

Obs 3.- Si $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de magros y
$M_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m^n$ con cada A_m^n nunca denso, entonces

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N}}} A_m^n \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \text{ es magro.}$$

Obs 4.- ¿X es magro? Depende :(

Teorema (De la categoría de Baire). Sea (X, d) esp. métrico completo y sea $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de abiertos densos.
Entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ es denso en X

Dem: Sea $A \subseteq X$ abierto no vacío. PD $A \cap (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n) \neq \emptyset$
Recursivamente construiremos una sucesión de $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de la sig. manera:

- Sea $x_0 \in A \cap U_0$ (pues como cada U_n es denso $\Rightarrow A \cap U_n \neq \emptyset$ $\forall A$ abierto no vacío)

y como $A \cap U_0$ es abierto $\Rightarrow$ sea $\delta_0 > 0$ t.q. $B_{\delta_0}(x_0) \subseteq A \cap U_0$
y sea $\varepsilon = \min\{\frac{\delta_0}{2}, 1\}$

- Supon. que hemos construido $x_n \in A \cap (\bigcap_{i \leq n} U_i)$ y $\varepsilon_n < \frac{1}{2^n}$
$B_{2\varepsilon_n}(x_n) \subseteq A \cap (\bigcap_{i \leq n} U_i)$

Sea $x_{n+1} \in B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap U_{n+1}$ y sea $\delta_n > 0$ t.q.
$B_{\delta_n}(x_{n+1}) \subseteq B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap U_{n+1}$.

Observemos que $B_{\delta_n}(x_{n+1}) \subseteq A \cap (\bigcap_{i \le n+1} U_i)$.

Sea $\varepsilon_{n+1} = \min\{ \frac{\delta_{n+1}}{2}, \frac{1}{2^{n+1}} \}$

PD $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy

... si resulta ser

$\Rightarrow x_n \to x$ en $\bigcap U_n$, pues $x_n \in U_{n+1}$ por construcción
∴ como $x_n \in A \ \forall n \Rightarrow x \in (\bigcap U) \cap A$ ∴ $\bigcap U_n$ es denso

Clase 04/11/21

Corolario: Sea (X, d) completo y sea M un magro en $X \Rightarrow X \setminus M$ es denso en X, en particular $M \neq X$

Dem: Sean $\{A_n\}$ densos en ninguna parte t.q.
$M = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bar{A}_m$

Así $X \setminus M \supseteq X \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bar{A} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} X \setminus \bar{A}_m \Rightarrow X \setminus M$ es denso.
Con $X \neq M$.

Con todo esto tenemos que el conjunto de magros es un ideal.

Teorema: El conjunto $\{f \in C[0,1] : f$ no es dif. en ningún punto$\}$ ~~es magro~~ tiene complemento magro

Aplicaciones Teo. categoría de Baire

Proposición.- $\mathbb{Q}$ no son un G_δ de $\mathbb{R}$

Dem.- Sup. que sí. Entonces $\mathbb{Q}$ es completamente metrizable (prop. anteriores).

Ahora sea $q \in \mathbb{Q}$ y consideremos $D_q = \mathbb{Q} \setminus \{q\}$, notemos que este conjunto es abierto y denso en $\mathbb{Q}$ $\forall q \in \mathbb{Q}$
$\Rightarrow$ por El T.C.B. que $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} D_q$ es denso en $\mathbb{Q}$.

pero $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} D_q = \emptyset$. !

Def.- Sean (X, d) y (Y, ρ) esp. métricos. Decimos que $\varphi : X \to Y$ es Lipschitz continua si existe un $c > 0$ t.q. $\forall x, y \in X$

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

Ejemplos.-

- $id : (X, d) \to (X, d)$ es Lipschitz continua
- Si $\varphi : X \to Y$ es isometría entonces es Lipschitz continua
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(a,b) = (0,1) + 2(a,b)$, es Lipschitz con constante de Lipschitz 2, ya que $\| f(a,b) - f(c,d) \| = \| 2(a,b) - 2(c,d) \| = |2| \, \| (a,b) - (c,d) \|$

Lema.- Sean $\varphi : X \to Y$ y $\psi : Y \to Z$ Lipschitz, entonces $\psi \circ \varphi$ es Lipschitz.

Dem.- $d_Z(\psi(\varphi(x)), \psi(\varphi(y))) \leq c_1 \, d_Y(\varphi(x), \varphi(y)) \leq c_1 \cdot c_2 \, d_X(x, y)$

Proposición: Sean $\varphi: X \to Y$ una función Lipschitz y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Entonces $\{\varphi(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y

Dem: Como φ es Lipschitz, existe $C>0$ t.q $d_Y(\varphi(x), \varphi(y)) \leq C \cdot d(x,y)$.

Ahora sea $\varepsilon > 0$. PD $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n,m \geq N$, $d_Y(\varphi(x_n), \varphi(x_m)) < \varepsilon$.

Como $\{x_n\}$ es de Cauchy $\Rightarrow$ para $\frac{\varepsilon}{C} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n,m \geq N$. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{C}$

$\Rightarrow d_Y(\varphi(x_n), \varphi(x_m)) \leq C \cdot d_X(x_n, x_m) < \varepsilon$ ■

Proposición: Si $\{x_n\} \to a$ y $\varphi: X \to Y$ es Lipschitz entonces $\{\varphi(x_n)\} \to \varphi(a)$

Sea $\varepsilon>0$.

Dem: Como $x_n \to a \Rightarrow$ para $\frac{\varepsilon}{C} > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n \geq N$, $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{C} \Rightarrow d(\varphi(x_n), \varphi(a)) \leq C \cdot d(x_n, a) < \varepsilon$ ■

Def: Sea (X,d) esp. métrico. Decimos que $\varphi: X \to X$ es contracción si es Lipschitz con constante de Lipschitz menor que 1.

Teorema: Sea I intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y $f: I \to \mathbb{R}$ diferenciable. Si existe $C>0$ t.q $|f'(x)| \leq C \Rightarrow f$ es Lipschitz, en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

Dem: Teo valor medio ✓

Teorema (punto fijo de Banach) Sea (X, d) un esp. métrico completo y sea $\varphi: X \to X$ una contracción. Entonces:

(1) $\exists!\, z \in X$ t.q. $\varphi(z) = z$

(2) Si $x \in X$ entonces $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(x) = z$ $\quad (\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \varphi \cdots \circ \varphi}_{n})$

Mas aún, $\forall n \in \mathbb{N}$ $d(\varphi^n(x), z) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x, \varphi(x))$

Dem: Como f es contracción $\exists\, c<1$ t.q. $d(f(x), f(y)) \leq c\, d(x,y)$

Si $d(\varphi(x), x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = x$ y terminamos $\Rightarrow$ sup. $d(\varphi(x), x) \neq 0$

Sea $x \in X$ arbitrario, observemos que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$d(\varphi^{n+1}(x), \varphi^n(x)) \leq c\, d(\varphi^n(x), \varphi^{n-1}) \leq c^2 d(\varphi^{n-1}(x), \varphi^{n-2}(x)) \leq \dots \leq c^n d(\varphi(x), x)$$

$$\Rightarrow d(\varphi^{n+1}(x), \varphi^n(x)) \leq c^n d(\varphi(x), x)$$

Obs: como $0 < c < 1 \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} c^k = \frac{c^n}{1-c} \wedge \lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{1-c} = 0$

P.D $\{\varphi^n(x)\}$ es de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$, y sea $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $d(\varphi(x), x)\frac{c^{n_0}}{1-c} < \varepsilon$ [que se puede elegir ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{1-c} = 0$], entonces $\forall n \geq m \geq n_0$ se cumple que

$$d(\varphi^n(x), \varphi^m(x)) \leq \sum_{i=m}^{n-1} d(\varphi^i(x), \varphi^{i+1}(x)) \leq \sum_{i=m}^{n-1} c^i d(\varphi(x), x)$$

$$= d(\varphi(x), x) \sum_{i=m}^{n-1} c^i \leq d(\varphi(x), x) \frac{c^{n_0}}{1-c} < \varepsilon$$

$\therefore \{\varphi^n(x)\}$ es de Cauchy y como X es completo $\Rightarrow \varphi^n(x) \to z$ en X.

P.D z es el punto fijo

Por lo anterior $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(x) = z$ y como $\{\varphi^n(x)\}$ es sucesión en X y φ es Lipschitz por una prop. anterior

$$\Rightarrow \varphi(z) = \varphi(\lim_{n\to\infty} \varphi^n(x)) = \lim_{n\to\infty} \varphi^{n+1}(x) = z$$

$\Rightarrow \varphi(z) = z$ $\therefore$ z es punto fijo

Además $d(z, \varphi^n(x)) = \lim_{m\to\infty} d(\varphi^m(x), \varphi^n(x)) \leq \frac{c^n}{1-c} d(\varphi(x), x)$

Escaneado con CamScanner

Ahora sup. que existe otro t.q. $\varphi(z') = z'$
$\Rightarrow d(z,z') \leq c \cdot d(\varphi(z), \varphi(z')) = c \cdot d(z,z') < d(z,z')$!

lo cual es imposible $\therefore$ z es único ∎

Teorema.- (Picard) Sea $f: D \to \mathbb{R}$ continua, con $D = \{(x,y) \mid |x-x_0| \leq a \text{ y } |y-y_0| \leq b\}$ donde $a,b \in (0,\infty)$ y $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, Además sup. que $(x_0,y_0) \in \text{Int } D$.
Sup. que existe $K>0$ t.q. $\forall (x,y_1),(x,y_2) \in D$ si cumple que $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq K|y_1 - y_2| \Rightarrow \exists \delta > 0$ y una única función $\phi: [x_0-\delta, x_0+\delta] \to \mathbb{R}$ t.q.

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)) \quad \text{para } |x-x_0| \leq \delta$$

Es decir, que la ec. dif. tiene solución y es única en un subintervalo.

Dem.- como f es continua y D es compacto entonces $f[D]$ es cerrado y acotado, Así existe $M>0$ t.q. $|f(x,y)| \leq M \quad \forall (x,y) \in D$

Sea $\delta > 0$ t.q. $K \cdot \delta < 1$

Ver Dem clase 11 noviembre

Teorema.- Considera el sistema $AX = b$ y sea $M = I - A$ entonces el sistema tiene solución única si $\forall i \leq n \quad \sum_{j=1}^{n} |M_{ij}| \leq \lambda < 1$

Más aún $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ la sucesión $\{x_m\}$ dada por $x_{m+1} = M x_m + b$ converge a la solución del sistema.

Dem.- Notemos que $A\bar{x} = b \Rightarrow 0 = -A\bar{x} + b \Rightarrow \bar{x} = \bar{x} - A\bar{x} + b \Rightarrow \bar{x} = (I - A)\bar{x} + b \Rightarrow \bar{x} = M\bar{x} + b$.
Así que encontrar solución única es encontrar un punto fijo.

Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $T(x) = Mx + b$

Consideremos la métrica d_∞ en $\mathbb{R}^n$, veamos que T es constracción. Sean $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\bar{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow d_\infty(T(\bar{x}), T(\bar{y})) = d_\infty(M\bar{x} + b, M\bar{y} + b)$$

$$= \max_{i \leq n} \{ |\sum_{j=1}^{n} M_{ij}(x_j - y_j)| \} \leq \max_{i \leq n} \{ \sum_{j=1}^{n} |M_{ij}| |x_j - y_j| \}$$

$$\leq \max_{i \leq n} \{ \sum_{j=1}^{n} |M_{ij}| \} \max_{i \leq n} \{ |x_j - y_j| \} \leq \lambda \, d_\infty(\bar{x}, \bar{y})$$

y como $\lambda < 1 \Rightarrow T$ es contracción

$\therefore$ por el Teo. del punto fijo se cumple el teorema.

Def.- Sean (X, d) y (Y, δ) dos esp. métricos y $f: X \to Y$. Dado $x \in X$ decimos que f es continua en x si $\forall \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ que converge a x se cumple que $\{f(x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.

Proposición.- Sea $f: X \to Y$ una función y sea $a \in X$. Son equivalentes:

1) f es continua en a

2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.q. $f[B_\delta(a)] \subseteq B_\varepsilon(f(a))$

Dem.-

$1 \Rightarrow 2)$

tendríamos que ~~$B_\delta(a)$~~ $f[B_\delta(a)] \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \Leftrightarrow B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$

$\Leftrightarrow a \in \text{int } f^{-1}[B_\varepsilon(f(a))]$

Recordemos que $x \in \text{int}(A) \Leftrightarrow \forall \{x_i\} \to x$ se cumple que $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in A\} \exists \mathbb{N}^*$

Demostraremos que $a \in \text{int } f^{-1}[B_\varepsilon(f(a))]$. Sea $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente a a, por hipótesis $\{f(x_i)\} \to f(a)$. Así

$\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N} \mid f(x_n) \in B_\varepsilon(f(a))\} = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in f^{-1}[B_\varepsilon(f(a))]\}$ ■

$2 \Rightarrow 1)$ Sea $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \to a$ y sea $\varepsilon > 0$. Por hip. existe $\delta > 0$ t.q. $f[B_\delta(a)] \subseteq B_\varepsilon(f(a))$

para $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall m \geq n_0$ se cumple que $x_m \in B_\delta(a)$

$\Rightarrow f(x_m) \in B_\varepsilon(f(a)) \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$ ■

Escaneado con CamScanner

Obs.- Si a es punto aislado ($\{a\}$ es abto) entonces cualquier función es continua en a.

Teorema: Sea $f: X \to Y$. Entonces $\{a \in X : f$ es continua en $a\}$ es G_δ

~~Dem: observemos que f es continua en a si y solo si $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$ t.q $f[B_{\frac{1}{n}}(a)] \subseteq B_{\frac{1}{m}}(f(a))$~~

~~Además $\{a \in X \mid f$ es continua en $a\} = \{a \in X \mid \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ (f[B_{\frac{1}{n}}(a)] \subseteq B_{\frac{1}{m}}(f(a)))\}$~~

~~$= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \{a \in X \mid \exists n \in \mathbb{N}$ t.q $(f[B_{\frac{1}{n}}(a)] \subseteq B_{\frac{1}{m}}(f(a)))\}$~~

~~(1) $A_m = \{a \in X \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (f[B_{\frac{1}{n}}(a)] \subseteq B_{\frac{1}{m}}(f(a)))\}$ es abto~~

Dem.- Clase 38 (16 noviembre).

Definición: Decimos que $f: X \to Y$ es continua si es continua en cualquier punto de X

Proposición: Los sig. son equivalentes.

(1) f es continua
(2) $\forall a \in X \wedge \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.q $f[B_\delta(a)] \subseteq B_\varepsilon(f(a))$
(3) $\forall a \in X\ \forall \varepsilon > 0$ ($f^{-1}[B_\varepsilon(f(a))]$ es abierto)

(4) $\forall A \subseteq Y$ abto se cumple que $f^{-1}(A)$ es abto.

Dem.-
$1 \Leftrightarrow 2)$ ✓

Escaneado con CamScanner

2 ⇒ 3) Sea $a \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. $\forall b \in f^{-1}[B_\varepsilon(f(a))]$

$\exists \varepsilon_b > 0$ t.q. $B_{\varepsilon_b}(f(b)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \subseteq f^{-1}[B_\varepsilon(f(a))]$

por (2) $b \in \operatorname{Int} f^{-1}[B_\varepsilon(f(a))]$

$\Rightarrow f^{-1}[B_\varepsilon(f(a))] \subseteq \operatorname{Int} f^{-1}[B_\varepsilon(f(a))]$

es abto

3) ⇒ 4) Sea $A \subseteq Y$ abto y $\forall a \in f^{-1}[A]$ sea ε_a t.q. $B_{\varepsilon_a}(f(a)) \subseteq A$.

Obs.- $f^{-1}[A] = \bigcup_{a \in f^{-1}[A]} f^{-1}[B_{\varepsilon_a}(f(a))]$

Dem.-

$\subseteq$) Sea $x \in f^{-1}[A] \Rightarrow x \in f^{-1}[B_{\varepsilon_x}(f(x))] \Rightarrow x \in \bigcup_{a \in f^{-1}[A]} f^{-1}[B_{\varepsilon_a}(f(a))]$

$\supseteq$)

tenemos que $\bigcup_{a \in f^{-1}[A]} B_{\varepsilon_a}(f(a)) \subseteq A \Rightarrow f^{-1}\left[\bigcup_{a \in f^{-1}[A]} B_{\varepsilon_a}(f(a))\right] \subseteq f^{-1}[A]$

$= \bigcup_{a \in f^{-1}[A]} f^{-1}[B_{\varepsilon_a}(f(a))]$

Con esto tenemos que $f^{-1}[A] = \bigcup_{a \in f^{-1}[A]} f^{-1}[B_{\varepsilon_a}(f(a))]$ pero por (3) cada uno de estos es abto $\therefore$ $f^{-1}[A]$ es abto.

4 ⇒ 1) Sea $a \in X$ y sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ t.q. $x_n \to a$

P.D. $f(x_n) \to f(a)$

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces $B_\varepsilon(f(a))$ es abto en Y y por (4) $\Rightarrow f^{-1}[B_\varepsilon(f(a))]$ es abto en X

Como $a \in f^{-1}[B_\varepsilon(f(a))] \Rightarrow \exists n_0$ t.q. $\forall n \geq n_0$ $x_n \in f^{-1}[B_\varepsilon(f(a))]$

$\Rightarrow f(x_n) \in B_\varepsilon(f(a))$ ∎

Escaneado con CamScanner

Proposición.- Toda función Lipzchitz continua es continua

Corolario.- Toda isometría es continua (pues toda isometría es Lipzchitz)

Obs.- Las imagenes inversas preservan contenciones, uniones e intersecciones

Def.- Sean (X, d) a (Y, ρ) espacios mét. Decimos que $h: X \to Y$ es un Homeomorfismo si es biyectiva, continua y de inversa continua

Proposición.- Sea (X, d) esp. mét. Entonces $d: X^2 \to \mathbb{R}$ es continua (con (X^2, d_{max}) a $(\mathbb{R}, |\cdot|)$)

Dem.- Sean $(x, y) \in X^2$ y $\varepsilon > 0$

P.D. $\exists \delta > 0$ t.q. $d[B_\delta^{X^2}(x,y)] \subseteq B_\varepsilon^{\mathbb{R}}(d(x,y))$

P.D. $\exists \delta > 0$ t.q. $\forall (x_1, y_1) \in X^2$, $d_{max}((x_1, y_1), (x,y)) < \delta \Rightarrow |(x_1, y_1) - (x, y)|$

P.D. $\exists \delta > 0$ t.q. si $\max\{d(x_1, x), d(y_1, y)\} < \delta \Rightarrow |d(x_1, y_1) - d(x, y)| < \varepsilon$.

Sea $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Sean (x_1, y_1) t.q. $d_{max}((x_1, y_1), (x, y)) < \delta$

$\Rightarrow d(x_1, y_1) < d(x_1, x) + d(x, y_1) < d(x_1, x) + d(x, y) + d(y, y_1)$
$< 2\delta + d(x, y) = \varepsilon + d(x, y)$

De manera análoga vimos que $d(x,y) < \varepsilon + d(x_1, y_1)$
$\Rightarrow -\varepsilon < d(x_1, y_1) - d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow |d(x_1, y_1) - d(x, y)| < \varepsilon$

Proposición.- Sea $(V, \|\cdot\|)$ espacio normado, entonces $\|\cdot\|$ es continua (visto como $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$).

Proposición.- Sea $(V, \|\cdot\|)$ esp. normado. Entonces

- $+: V^2 \to V$ es continua (suma de vectores)
- $\cdot: \mathbb{R} \times V \to V$ es continua (multi. por escalar.)

Dem.-

1) Sea $(v, w) \in V^2$ y sea $\varepsilon > 0$

Sea $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, y sea $(v_1, w_1) \in V^2$ t.q. $\max\{\|v_1 - v\|, \|w - w_1\|\} < \delta$

$\Rightarrow \| (v - v_1) + (w - w_1) \| \leq \| v - v_1 \| + \| w - w_1 \| < d_{max}\{(v,w),(v_1,w_1)\} < \frac{\varepsilon}{2}$

$< \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \| (v+w) - (v_1+w_1) \| < \varepsilon$ ∎

2) Sea $(r,v) \in \mathbb{R} \times V$ y sea $\{(r_n, v_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión t.q. $(r_n, v_n) \to (r,v)$ p.d. $\{r_n \cdot v_n\} \to r \cdot v$ en V.

Obs: Recordemos que toda sucesión convergente es acotada, en este caso como $(r_n, v_n) \to (r,v) \Rightarrow \exists A > 0$ t.q. $\max\{|r_n|, \|v_n\|\} \leq A$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$ $n \to \infty$ $\max\{|r|, \|v\|\} \leq A$.

Obs 2: Si $n \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow \| r \cdot v - r_n \cdot v_n \| = \| r \cdot v - r_n \cdot v_n + r_n \cdot v - r_n \cdot v \|$
$\leq |r - r_n| \, \|v\| + |r_n| \, \|v_n - v\| < |r - r_n| A + A \|v_n - v\|$
$= A(|r - r_n| + \|v_n - v\|)$

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq n_0$ se cumple que $\max\{|r_n - r|, \|v_n - v\|\} < \frac{\varepsilon}{2A}$

Así $\| r \cdot v - r_n \cdot v_n \| < A[|r_n - r| + \|v_n - v\|] \leq A \cdot \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$ ∎

Corolario - La $+$ y el $\cdot$ en $\mathbb{R}$ son funciones continuas

Def - Sea $(G, \cdot)$ un grupo. Decimos que $(G, \cdot, \tau)$ es un grupo topológico si y sólo si

- La operación $\cdot : G \times G \to G$ es continua y
- La inversa $^{-1} : G \to G$ es continua

Def - Sean $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos.
Dado $m \in \mathbb{N}$ definimos $\pi_m : \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \to X_m$ dadas por $\pi_m(f) = f(m)$
con $f : \mathbb{N} \to \bigcup X_i$, con $f(i) \in X_i$

Ejemplos:

- Si $X_1, \dots, X_n$ familia de conjuntos, entonces para cada $m \leq n$
$\pi_m : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_m$ dada por $\pi_m((x_1, \dots, x_n)) = x_m$

Proposición.- Sea $\{(X_i, d_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ fam. de espacios mét. todos acotados por una misma $\mathbb{R}$. Y sea $m \in \mathbb{N}$. Entonces Π_m es una función continua.

Dem.- Sea $A \subseteq X_m$ abto. ~~~~

P.D $\Pi^{-1}[A] = \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ con $U_n = X_n$ si $n \neq m$
$U_n = A$ si $n = m$.

En efecto, sea $f \in \Pi_m^{-1}[A] \Rightarrow f(m) \in A$. Es decir $f(m) \in U_m$ y trivialmente $f(n) \in U_n = X_n$ para cada $n \neq m$.
$\Rightarrow f \in \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$

Por otro lado sea $f \in \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n \Rightarrow f(m) \in U_m = A$
$\Rightarrow \Pi_m(f) \in A \Rightarrow f \in \Pi_m^{-1}(A)$.

P.D $\Pi^{-1}[A]$ es abto en $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$

Pero recordemos que demostramos que si $\{n\in\mathbb{N} \mid U_n \neq X_n\}$ es finito entonces $\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es abto y este es nuestro caso de hecho sólo $U_m \neq X_m$ $\therefore$ $\Pi_m^{-1}[A]$ es abto
$\therefore$ Π_m es continua.

Teorema.- Sean $\{(X_i, d_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ fam. de espacios mét. todos acotados por $r>0$, (Y, ρ) esp. mét. y
$h: Y \to \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Entonces h es continua si y solo si
$\forall i \in \mathbb{N}$ $\Pi_i \circ h$ es continua.

(h es continua si es continua "entrada a entrada")

Dem.- Usos lemas que se dejan de tarea.

Lema 1.- composición de funciones continuas es continua
Lema 2.- Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos y $f: X \to Y$ y $\mathcal{B}$ base para Y, entonces f es continua si y solo si $\underline{\forall A \in \mathcal{B}}$ se cumple que $f^{-1}[A]$ es abto.

$\Rightarrow]$ Sup. que h es continua, entonces como $\forall n \in \mathbb{N}$ Π_n es continua $\Rightarrow$ $\Pi_n \circ h$ es continua.

$\Leftarrow$] Sup que $\pi_n \circ h$ es continua $\forall n \in \mathbb{N}$.
Sea $\mathcal{B} = \{ \prod_{i \in \mathbb{N}} U_i : \forall i \in \mathbb{N}\ (U_i$ es abto$)$ $\wedge$ $I = \{ i \in \mathbb{N} : U_i \neq X_i \}$ es finito $\}$.
esto es base para $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$

Sea $\prod_{i \in \mathbb{N}} U_i \in \mathcal{B}$ PD $h^{-1}[\prod_{i \in \mathbb{N}} U_i] = \bigcap_{i \in I} (\pi_i \circ h^{-1})[U_i]$

$\subseteq$] Sea $y \in h^{-1}[\prod U_i]$ y sea $n \in I$. Entonces $h(y) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} U_i$

$\Rightarrow \pi_n(h(y)) \in U_n \Rightarrow (\pi_n \circ h)(y) \in U_n \Rightarrow y \in (\pi_n \circ h)^{-1}[U_n]$

$\Rightarrow y \in \bigcap_{i \in I} (\pi_i \circ h)^{-1}[U_i]$

$\supseteq$] Sea $y \in \bigcap_{i \in I} (\pi_i \circ h)^{-1}(U_i)$ PD $h(y) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} U_i$. Es decir $\forall i \in \mathbb{N}$ $h(y)(i) \in U_i$.

En efecto,

- si $i \notin I \Rightarrow U_i = X_i$ así $h(y)(i) \in U_i$
- si $i \in I \Rightarrow y \in (\pi_i \circ h^{-1})[U_i] \Rightarrow \pi_i \circ h(y) \in U_i \Rightarrow h(y)(i) \in U_i$

$\therefore$ $h^{-1}[\prod_{i \in \mathbb{N}} U_i) = \bigcap_{i \in I} (\pi_i \circ h^{-1})[U_i]$

pero como I es finito y $\pi_i \circ h^{-1}$ son continuas
$\Rightarrow (\pi_i \circ h)^{-1}[U_i]$ es abto $\Rightarrow \bigcap_{i \in I}$ es intersección finita de abtos $\therefore$ $h^{-1}[\prod_{i \in \mathbb{N}} U_i]$ es abto en Y

$\therefore$ h es continua $\blacksquare$

$2^\omega \to \mathbb{N}$

Lema (del pegado).- Sean X, Y espacios métricos y $A, B \subseteq X$ subespacios cerrados tales que $X = A \cup B$. Supongamos que $f: A \to Y$, $g: B \to Y$ son continuas y $f(x) = g(x)$ $\forall x \in A \cap B$. Entonces $h: X \to Y$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

es continua.

Dem.- h está bien definida, pues si $x \in A$, $h(x) = f(x)$; si $x \in B$, $h(x) = g(x)$ y si $x \in A \cap B \Rightarrow h(x) = f(x) = g(x)$ ✓

Ahora sea $G \subseteq Y$ cerrado, entonces

$h^{-1}(G) = \{x \in X \mid h(x) \in G\} = \{x \in A \cup B : h(x) \in G\}$

$= \{x \in A : h(x) \in G\} \cup \{x \in B \mid h(x) \in G\}$

$= \{x \in A : f(x) \in G\} \cup \{x \in B \mid g(x) \in G\} = f^{-1}(G) \cup g^{-1}(G)$

pero como f y g son continuas y G es cerrado $\Rightarrow f^{-1}(G)$ es cerrado en A y $g^{-1}(G)$ es cerrado en B

Obs.- Si $L \subseteq (X, d)$ es cerrado y $C \subseteq L$ es cerrado en L, entonces C es cerrado en X.

De esta manera $f^{-1}(G)$ y $g^{-1}(G)$ son cerrados en X
$\therefore$ $h^{-1}(G)$ es cerrado $\therefore$ h es continua.

Tarea.- Lema del pegado con abtos.

Def.- Sea (X, d) esp. métrico y $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Decimos que $\mathcal{A}$ es localmente finito si para cada $x \in X$ existe U abto con $x \in U$ t.q. $\{\alpha \in \Lambda : U \cap A_\alpha \neq \emptyset\}$ es finito.

¿Existe un abto que contenga a x t.q. se intersecciona con un número finito de elementos de $\mathcal{A}$?

Proposición.- Sean X y Y espacios mét., $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ con cada A_α cerrado, tales que $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ y sea $f : X \to Y$, entonces:

- Si $\mathcal{A}$ es finito y $f|_{A_\alpha}$ es continua $\forall \alpha \in \Lambda$ entonces f es continua en X.

- Si $\mathcal{A}$ es localmente finito y $f|_{A_\alpha}$ es continua $\forall \alpha \in \Lambda$ entonces f es continua en X.

Dem.-

- Como $\mathcal{A}$ es finito $\Rightarrow \mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$

Por inducción sobre n, demostraremos que si $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y $f|_{A_i}$ es continua $\forall i \leq n$, entonces f es continua.

Para el caso $n = 0$, $f|_{A_0} = f$ y por hipótesis $f|_{A_0}$ es continua.

Ahora sup. que $f|_{\bigcup_{i=1}^{k} A_i}$ es continua, veremos que $f|_{A}$

Clase 44

Recordatorio: si $B \subseteq X$, X esp. métrico, entonces

$$\operatorname{diam}(B) = \sup\{d(x,y) : x, y \in B\}$$

Def.- Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios mét. Si $A \subseteq X$ y $f : A \to Y$ definimos la oscilación de $x \in X$ respecto a f como

$$\operatorname{osc}_f(x) = \{\operatorname{diam}(f[U]) : U \in \tau_d \wedge x \in U\}$$

$$= \{\operatorname{diam}(f[B_{\frac{1}{n}}(x)]) : n \in \mathbb{N}\}$$

Obs 1.- $osc_f(x) = 0 \iff f$ es continua en x.

obs 2.- para $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \{x \in A : osc_f(x) < \frac{1}{n}\}$

$\Rightarrow \{x \in A \mid osc_f(x) = 0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (conjunto G_δ)

Proposición.- Sean (X, d) esp. métrico y $F \subseteq X$ cerrado entonces F es G_δ.

Dem.- para $x \in X$ definimos $d(x, F) = \inf\{d(x,y) : y \in F\}$
para todo $n \in \mathbb{N}$, sea

$$U_n = \{y \in X : d(y, F) < \tfrac{1}{n}\}$$

P.D $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$

$\subseteq$) Sea $y \in F \Rightarrow d(y, F) = 0 \Rightarrow x \in U_n \ \forall n$.

$\supseteq$) Sea $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \Rightarrow y \in U_n$ p.a $n \in \mathbb{N}$?
$\Rightarrow d(y, F) < \frac{1}{n}$, ahora para cada n sea $y_n \in F \cap B_{\frac{1}{n}}(y)$

Notemos que $y_n \to y$ y como F es cerrado debe contener todos sus puntos de convergencia $\Rightarrow y \in F$.

Faltaría ver que U_n es abto $\forall n$

En efecto, sea $y \in U_n \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ t.q $d(y, F) < \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$
consideremos $B_{\frac{1}{m}}(y)$ P.D $B_{\frac{1}{m}}(y) \subseteq U_n$

Notemos que como $d(y, F) < \frac{1}{n} \Rightarrow \exists x \in F$ t.q $d(x,y) < \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$

Sea $z \in B_{\frac{1}{m}}(y) \Rightarrow d(z, F) \leq d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x)$
$< \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{1}{n}$ $\therefore d(z, F) < \frac{1}{n} \Rightarrow z \in U_n$

$\therefore U_n$ es abto.

Teorema (de Kuratowski).- Sean (X,d) y (Y,δ) espacios métricos donde Y es completo. Si $f: A \to Y$ es continua $(A \subseteq X)$ entonces existen $G \subseteq X$, G_δ y $g: G \to Y$ función continua t.q

- $A \subseteq G \subseteq \bar{A}$
- $g_{|A} = f$

Esto me dice que con las condiciones dadas puedo encontrar una función que extiende a f a un conjunto un poco más grande.

Dem:- Sea $G = \bar{A} \cap \{x \in X : osc_f(x) = 0\}$, veamos que este es el conjunto buscado.

- Tenemos que $A \subseteq \bar{A}$ y $A \subseteq \{x \in X : osc_f(x) = 0\}$ esto último pues $\forall x \in A$, f es continua en $x \Rightarrow osc_f(x) = 0 \Rightarrow x \in \{ - \}$

Así por estas dos contenciones $A \subseteq G \subseteq \bar{A}$ la última pues $D \cap C \subseteq D$ $\forall D, C$ conjuntos no vacíos.

P.D G es G_δ

En efecto, tenemos que $B = \{x \in X : osc_f(x) = 0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : osc_f(x) < \frac{1}{n}\}$ y como cada $\{x \in X : osc_f(x) < \frac{1}{n}\}$ es abierto $\Rightarrow B$ es G_δ. Además como $\bar{A}$ es G_δ (proposición anterior) $\Rightarrow G = \bar{A} \cap B$ es G_δ.

- Ahora veamos quien es g.

Sea $x \in G \subseteq \bar{A}$. Como $\bar{A}$ es cerrado $\exists \{x_n\}$ sucesión en A t.q $x_n \to x$.
Notemos que

$$\lim_{n \to \infty} diam(f[\{x_m : m \geq n\}]) = 0$$

$\Rightarrow \{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y como Y es completo $\Rightarrow \exists y_x \in Y$ t.q $f(x_n) \to y_x$.

Definimos $g: G \to Y$ dada por $g(x) = y_x$

P.D $g_{|A} = f$

Sean $x \notin G$ ... Falta clase #5

Lema 1.- Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos, $D \subseteq X$ denso y $f: X \to Y$ una función continua. Si $f_{|D}$ es un homeomorfismo entre D y $f[D]$ entonces $\forall x \in X \setminus D$ se cumple que $f(x) \notin f[D]$

Dem.- Tarea

Lema 2.- Sean (X, d) y (ρ, Y) espacios métricos, $D \subseteq X$ denso y $f, g: X \to Y$ continuas. Si $f_{|D} = g_{|D}$ entonces $f = g$.

Dem.- Tarea

Corolario.- $|\{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}| = |\mathbb{R}|$

Teorema (de Lavrentiev).- Sean X, Y completamente metrizables, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ y $f: A \to B$ un homeomorfismo. Entonces f se puede extender a un homeomorfismo $h: G \to H$ donde

(1) $A \subseteq G \subseteq \overline{A}$, $B \subseteq H \subseteq \overline{B}$

(2) G es G_δ en X, H es G_δ en Y

procedemos de manera inductiva

Dem.- Sea $A_0 = X$ y $B_0 = Y$. Observamos que B_0 es completo y $f: A \to B_0$ es continua. Por el teo. de Kuratowski aplicado a A_0, B_0, A, f tenemos que existe $A_1 \subseteq A_0$ G_δ en A_0 y $f_1: A_1 \to B_0$ de tal suerte que

(1) $A \subseteq A_1 \subseteq \overline{A}$

(2) f_1 es continua y extiende a f

Observemos que A_1 es completamente metrizable por ser G_δ de un completamente metrizable y $f^{-1}: B \to A_1$ es continua. Por el Teo de Kuratowski aplicado a B_0, A_1, B y f^{-1} existe $B_1 \subseteq B_0$ G_δ en B_0 y $g_1: B_1 \to A_1$ t.q.

(1) $B \subseteq B_1 \subseteq \overline{B}$
(2) g_1 es continua y extiende a f^{-1}

Supongamos que hemos construido A_n y B_n G_δ en X y Y respectivamente tales que

(1) $A \subseteq A_n \subseteq \overline{A}$
(2) $B \subseteq B_n \subseteq \overline{B}$

Observemos que B_n es completamente metrizable y $f: A \to B_n$ es continua ~~en B_n~~.
Aplicando el teo. de Kura. a A_n, B_n, A y f encontramos $A_{n+1} \subseteq A_n$ G_δ en A_n y $f_{n+1}: A_{n+1} \to B_n$ t.q

(1) $A \subseteq A_{n+1} \subseteq \overline{A}$
(2) f_{n+1} es continua y extiende a f.

Tarea moral ver que A_{n+1} es G_δ en X.

Observemos que A_{n+1} es completamente metrizable y . . .
. . . $\exists B_{n+1}$ t.q $B_{n+1} \subseteq B_n$ G_δ en B_n y $g_{n+1}: B_{n+1} \to A_{n+1}$ t.q

(1) $B \subseteq B_{n+1} \subseteq \overline{B}$
(2) g_{n+1} es continua y extiende a f^{-1}

Observaciones.-

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subseteq A_n$ y $B_{n+1} \subseteq B_n$, más aun dichos conjuntos son G_δ en X y Y respectivamente
- $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple que $f_n|_{A_{n+1}} = f_{n+1}$ y $g_n|_{B_{n+1}} = g_{n+1}$

Para ver esto primero observemos que A es denso en A_{n+1} y B es denso en B_{n+1}.

Además $f_n|_{A_{n+1}}|_A = f_n|_A = f = f_{n+1}|_A$ y como A es denso $\Rightarrow$ por el Lema 2, $f_n|_{A_{n+1}} = f_{n+1}$
para g se hace lo mismo.

- $\forall n \geq 1$, se cumple que $g_n \circ f_{n+1} = Id_{A_{n+1}}$ y $f_n \circ g_n = Id_{B_n}$

Esto pues;

Escaneado con CamScanner

$\Rightarrow g_n \circ f_{n+1}|_A = Id_A = Id_{A_{n+1}}|_A$ y $f_n \circ g_n|_B = Id_B = Id_{B_n}|_B$

$\therefore$ por el lema 2 se tiene lo querido.

Sea $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y $H = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Entonces G y H son G_δ en X y Y respectivamente.

Además

- $A \subseteq G \subseteq A_1 \subseteq \bar{A}$
- $B \subseteq H \subseteq B_1 \subseteq \bar{B}$

Sea $h := f_1|_G$. h es continua. Debemos demostrar que

(1) h es inyectiva
(2) $Im\, h = H$
(3) h^{-1} es continua.

* Notemos que f_2 es inyectiva, pues $g_1 \circ f_2 = id_{A_2}$ es biyectiva $\Rightarrow f_2$ es inyectivo

Y los otros de forma

$\therefore h$ es el homeomorfismo buscado.

Corolario: Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ completamente metrizable. Entonces A es G_δ en X

Dem.- Consideremos $id: A \to A$, como Id es homeomorfismo, por Teo. anterior existen $G \subseteq A$ G_δ en A, $H \subseteq X$ G_δ en X y $h: G \to H$ tal

(1) $A \subseteq G$, $A \subseteq H$
(2) h es homeomorfismo y extiende a Id.

Observemos que $G = A$ y como h es biyectiva $\Rightarrow H = A$

$\therefore A$ es G_δ en X.

Escaneado con CamScanner

Proposición.- Sea (X,d) esp. mét., $(V,\|\cdot\|)$ un espacio normado y sean $f,g: X \to V$ continuas. Entonces $f+g: X \to V$ dada por $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ es continua.

Dem.- Sea $h: X \to V \times V$ dada por $h(x) = (f(x), g(x))$. Es continua, ya que es continua entrada a entrada.

Además la función $+: V\times V \to V$ dada por $+(v,w) = v+w$ habíamos visto que es continua $\therefore$ $+ \circ h: X \to V\times V$ es continua y $+\circ h = f+g$.

Proposición.- Sea (X,d) esp. mét., $(V,\|\cdot\|)$ un espacio normado y sean $f: X \to \mathbb{R}$ continua y $g: X \to V$ continua. Entonces: $f\cdot g: X \to V$ dada por $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$ es continua.

Corolario.- Si (X,d) es un esp. mét. y $(V,\|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces

$$C(X,V) := \{f: X \to V \mid f \text{ es continua}\}$$

es un espacio normado con la suma y el producto

- $+(f,g) = f+g$
- $\cdot(r,g) = r\cdot g(x)$

Sin embargo dar una norma no será tan sencillo :(

Def.- En general si X y Y son espacios métricos, definimos

- $Y^X := \{f \mid f: X \to Y\}$
- $B(X,Y) := \{f: X \to Y \mid f \text{ es acotada}\}$
- $C(X,Y) := \{f: X \to Y \mid f \text{ es continua}\}$

Def.- Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y^X. Decimos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a $f \in Y^X$ si y solo si $\forall x \in X$ se cumple que:

$$\{f_n(x)\} \to f(x) \text{ en } Y$$

Si este es el caso diremos que f_n converge a f de manera puntual.

Ejemplo.-

- Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $f_n \to f$ donde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ esta dada por
$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1) \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Esto es pues, dado $x \neq 1$, $f_n(x) = x^n$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} x^n = 0$

y si $x = 1$ $f_n(1) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow f_n(1) \to 1 = f(1)$

$\therefore f_n(x) \to f(x)$.

Obs.- Notemos que apesar de que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n es continua se tiene que f no lo es, entonces quisieramos buscar otra noción de convergencia que capture a la continuidad.

Def.- Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones en Y^X. Decimos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f \in Y^X$ si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m \geq n \quad d(f_m(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

Ejemplos:

- Si $X = [0,1]$ y $Y = \mathbb{R}$, entonces $f_n(x) = x^n$ no converge uniformemente a $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Escaneado con CamScanner

Proposición.- Supongamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y^X$ sucesión t.q. converge uniformemente a $f \in Y^X$. Entonces f_n converge puntualmente a f.

Dem.- Es claro.

Proposición.- Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C(X,Y)$ que converge uniformemente a una función f. Entonces f es continua.

Dem.- Sea $x_0 \in X$ p.D f es continua en x_0.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $f_n \to f$ uniformemente tenemos que para $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{3}$ $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$ $d(f_n(x), f(x)) < \tilde{\varepsilon}$ $\forall x \in X$

Igualmente como f_n es continua $\forall n \in \mathbb{N}$, para $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{3}$ $\exists \tilde{\delta} > 0$ t.q. $\forall y \in X$ con $d(x,y) < \tilde{\delta} \Rightarrow d(f_n(x), f_n(y)) < \tilde{\varepsilon}$.

$\Rightarrow$ Sea $\delta = \tilde{\delta}$, y sea $y \in X$ t.q. $d(x_0, y) < \delta$

$\Rightarrow d(f(x_0), f(y)) \leq d(f(x_0), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y))$

$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Def.-

Teorema.- Sean (X,d) y (Y,ρ) dos espacios mét. y $f: X \to Y$ continua. Si $A \subseteq X$ conexo $\Rightarrow f[A]$ es conexo.

Dem.- Sup. que $f[A]$ no es conexo. Entonces existen $B, C \subseteq A$ abtos en $f[A]$ no vacíos t.q. $f[A] = B \cup C$ y $B \cap C = \emptyset$.

Sean B', C' abtos en Y t.q. $B' \cap f[A] = B$ y $C' \cap f[A] = C$

Como f es continua tenemos que $f^{-1}[B']$ y $f^{-1}[C']$ son abtos en X. Definimos $D = A \cap f^{-1}[B']$ tenemos que D es abto en A y $A \setminus D = A \cap f^{-1}[C']$ ∴ $A \setminus D$ es abto en A.

Más aún, como B y $\mathbb{R} \neq \emptyset$ entonces $D \neq \emptyset$ y $A \setminus D \neq \emptyset$
$\Rightarrow$ A es disconexo !!! $\therefore$ $f[A]$ es conexo

Lema.- Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Si A no es un intervalo entonces A es disconexo.

Dem.- Como A no es intervalo existen $x, y \in A$ y $z \in \mathbb{R}$ t.q. $x < z < y$ pero $z \notin A$.

Definimos $C = (-\infty, z) \cap A$, C es abierto en A. pero también es cerrado ya que $A \setminus C = (z, \infty) \cap A$.
Además $C \neq \emptyset$ $\wedge$ $C \neq 0$ $\therefore$ A es disconexo.

Teorema.- (del valor intermedio generalizado)
Si (X, d) es un espacio conexo, $f: X \to \mathbb{R}$ es una función continua y $a, b \in X$ son tales que $f(a) < f(b)$, entonces $\forall x \in [f(a), f(b)]$ existe $c \in X$ t.q. $f(c) = x$.

Dem.- Como X es conexo y f continua por el teorema anterior $f[X]$ es conexo y por el lema anterior entonces $f[X]$ es un intervalo y como $f(a), f(b) \in f[X]$ concluimos que $[f(a), f(b)] \subseteq f[X]$ ■

Series en espacios normados

Def.- Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en V. Definimos la serie asociada a la sucesión como la sucesión

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} v_k \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Diremos que la serie converge si dicha sucesión converge. Denotaremos tanto a la serie como a su punto de convergencia como:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

Escaneado con CamScanner

Def.- Decimos que una serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n$ sobre $(V, \|\cdot\|)$ es absolutamente convergente si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|V_n\|$ es convergente en $\mathbb{R}$.

Proposición Supongamos que $\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n$ es una serie convergente en $(V, \|\cdot\|)$. Entonces $\forall n\in\mathbb{N}$ se cumple que $\{\sum_{i=n}^{k} v_i\}_{k\in\mathbb{N}}$ también converge y $\{\sum_{i=n}^{\infty} v_i\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.

Dem.- Sea $n\in\mathbb{N}$. Demostraremos que $\{\sum_{i=n}^{m} v_i\}_{m\geq n} \to \sum_{i=0}^{\infty} v_i - \sum_{i=0}^{n-1} v_i$

para ver esto sea $\varepsilon>0$. Entonces como $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ es convergente existe $N\in\mathbb{N}$ t.q. $\forall m\geq N$ se cumple que

$$\Big\|\sum_{i=0}^{m} v_i - \sum_{i=0}^{\infty} v_i\Big\| < \varepsilon.$$

Sea $N_0 = \max\{N, n\}$ se cumple que

$$\varepsilon > \Big\|\sum_{i=0}^{m} v_i - \sum_{i=0}^{\infty} v_i\Big\| = \Big\|\sum_{i=0}^{n-1} v_i + \sum_{i=n}^{m} v_i - \sum_{i=0}^{\infty} v_i\Big\|$$

$$= \Big\|\sum_{i=n}^{m} v_i - \Big(\sum_{i=0}^{\infty} v_i - \sum_{i=0}^{n-1} v_i\Big)\Big\|$$

para terminar observamos que

$$\Big\{\sum_{i=n}^{\infty} v_n\Big\} = \Big\{\sum_{i=0}^{\infty} v_i - \sum_{i=0}^{n-1} v_i\Big\} \to \sum_{i=0}^{\infty} v_i - \sum_{i=0}^{\infty} v_i = 0$$

Lema.- Sea $(V, \|\cdot\|)$ espacio de Banach y sea $\{v_i\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión. Supongamos que $\forall \varepsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ t.q. $\forall m\geq N$ se cumple que $\|\sum_{i=N}^{m} v_i\| < \varepsilon$ entonces $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ es convergente.

Dem.- Las hipótesis nos dicen que es una sucesión de Cauchy ∴ converge.

Entonces, sea $\varepsilon>0$ ∴ $\exists N\in\mathbb{N}$ t.q.

Teorema.- Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ una serie absolutamente convergente, entonces dicha serie es convergente.

Dem:- Sea $\varepsilon > 0$ como $\sum_{i=0}^{\infty} \|v_i\|$ es convergente sabemos que $\left\{ \sum_{i=n}^{\infty} \|v_i\| \right\} \to 0$. Por tanto existe $N \in \mathbb{N}$ t.q

$$\sum_{i=N}^{\infty} \|v_i\| < \varepsilon.$$

Observamos que $\forall m > n \geq N$ se cumple que

$$\left\| \sum_{i=n}^{m} v_i \right\| \leq \sum_{i=n}^{m} \|v_i\| \leq \sum_{i=N}^{m} \|v_i\| \leq \sum_{i=N}^{\infty} \|v_i\| < \varepsilon$$

$\therefore$ por el lema anterior la serie es convergente.

Teorema.- Sea (X, d) esp. métrico, $(V, \|\cdot\|)$ espacio de Banach y $f_n : X \to V$ una sucesión de funciones continuas. Supongamos que $\forall n \in \mathbb{N}$ existe $M_n > 0$ t.q $\forall x \in X$ $\|f_n(x)\| < M_n$. Más aún, supongamos que $\sum_{i=0}^{\infty} M_i$ es convergente. Entonces la sucesión la función

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i : X \to V \quad \text{dada por} \quad \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i\right)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$$

está bien definida y es continua.

Dem:- La función $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ está bien definida ya que para cada $x \in X$ se cumple que $\sum_{i=0}^{\infty} \|f_i(x)\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} M_n$ y la serie de la derecha es convergente, así la serie de la izquierda converge. Por lo que la serie $\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$ es absolutamente convergente y por tanto convergente.

Para ver que la función es continua definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ a $g_n : X \to V$ dada por $g_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x)$

g_n es continua pues cada f_i es continua. Demostraremos que $\{g_n\} \to \sum_{i=0}^{\infty} f_i$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\sum_{i=0}^{\infty} M_i$ es convergente. Entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q $\sum_{i=n_0}^{\infty} M_i < \varepsilon$

Escaneado con CamScanner

Sea $m \geq n_0$ entonces para cada $x \in X$

$\| g_n(x) - \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) \| = \| \sum_{i=0}^{m} f_i(x) - \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) \|$

$= \| \sum_{i=m}^{\infty} f_i(x) \| \leq \sum_{i=m}^{\infty} \| f_i(x) \| \leq \sum_{i=m}^{\infty} M_i \leq \sum_{i=n_0}^{\infty} M_i < \varepsilon$

$\therefore \{g_n\} \xrightarrow{\text{u}} \sum_{i=0}^{\infty} f_i$

$\therefore \sum_{i=0}^{\infty} f_i$ es continua.

Proposición.- Sea (X, d) esp. métrico y $A \subseteq X$ no vacío. Entonces la función $f: X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, A) = \inf\{ d(x,y) \mid y \in A \}$ es una función continua

Dem.- Recordemos que ya habíamos demostrado que $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ para todo $x, y \in X$
En particular tenemos que

$d(x, y) \geq | d(x, A) - d(y, A) | = | f(x) - f(y) |$

Así f es L. C. $\therefore$ es continua.

Lema (de Urysohn).- Sea (X, d) esp. métrico $A, B \subseteq X$ cerrados no vacíos y ajenos. Entonces existe $f: X \to [0,1]$ continua t.q. $f[A] = \{0\}$ y $f[B] = \{1\}$

Dem.- Sea f dada por $f(x) = \dfrac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$

que es continua por todo lo que sabemos y la proposición anterior, el denominador no se anula pues recordemos que si C es cerrado y $x \in X$ entonces $d(x, C) = 0 \iff x \in C$
Así si pasara que $d(x, A) + d(x, B) = 0$
$\Rightarrow d(x, A) = d(x, B) = 0 \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$!!!
cosa que no pasa pues A y B son ajenos.

Para terminar, sea $x \in A \wedge y \in B$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} = \dfrac{0}{0 + d(x, B)} = 0 \quad \therefore f[A] = \{0\}$

$f(y) = \dfrac{d(y, A)}{d(y, A) + d(y, B)} = \dfrac{d(y, A)}{d(y, A)} = 1 \quad \therefore f[B] = \{1\}$

Escaneado con CamScanner

Corolario.- Si (X,d) es un espacio métrico, $a<b \in \mathbb{R}$ y $A,B \subseteq X$ cerrados no vacíos y ajenos, entonces existe $f: X \to [a,b]$ continua t.q. $f[A]=\{a\}$ y $f[B]=\{b\}$

Teorema (Tietze).- Sea (X,d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ cerrado no vacío y $f: A \to [-1,1]$ continua. Entonces existe $g: X \to [-1,1]$ continua que extiende a f, i.e, $g|_A = f$

Dem.-
Sean $A_1 = f^{-1}[[\frac{1}{3},1]] \subseteq A$ y $B_1 = f^{-1}[[-1,-\frac{1}{3}]] \subseteq A$
y como f es continua y estos intervalos son cerrados $\Rightarrow$ A_1, B_1 son cerrados en A.
y como A es cerrado en X $\Rightarrow$ A_1, B_1 son cerrados en X
y por def son ajenos.

$\therefore$ por el corolario anterior $\exists\, f_1: X \to [-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ t.q. $f_1[A_1] \subseteq \{\frac{1}{3}\}$ y $f_1[B_1] \subseteq \{-\frac{1}{3}\}$ (es sólo contención pues podían ser A_1 y B_1 vacíos)

Obs 1.- $\forall x \in A$, se cumple que $|f(x) - f_1(x)| \leq \frac{2}{3}$

Con esto $f_1|_A - f$ es continua y cuyo contradominio es $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$

Sea $A_2 = (f_1|_A - f)^{-1}[[\frac{2}{9},\frac{2}{3}]]$ y $B_2 = (f_1|_A - f)^{-1}[[-\frac{2}{3},-\frac{2}{9}]]$ y nuevamente A_2 y B_2 son cerrados y ajenos en X.

$\Rightarrow \exists\, f_2: X \to [-\frac{2}{9},\frac{2}{9}]$ t.q. $f_2[A_2] \subseteq \{\frac{2}{9}\}$ y $f_2[B_2] \subseteq \{-\frac{2}{9}\}$

y nuevamente $\forall x \in A$ se cumple que $|(f - f_1|_A)(x) - f_2(x)| \leq \frac{4}{9}$

$\Rightarrow |f(x) - [f_1(x) + f_2(x)]| \leq \frac{4}{9} \Rightarrow$

De manera recursiva podemos construir una sucesión de funciones $\{f_n\}$ continuas t.q.

(1) $f_n: X \to [-\frac{2^{n-1}}{3^n}, \frac{2^{n-1}}{3^n}]$

(2) $\forall x \in A$ se cumple que $|f(x) - (\sum_{i=1}^{n} f_i(x))| \leq (\frac{2}{3})^n$

P.D. f_n converge uniformemente.

Primero observemos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$ $|f_n(x)| \leq \frac{2^{n-1}}{3^n}$
Además $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1}}{3^i}$ converge $\therefore$ por el criterio M de Weierstrass

entonces $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ existe y es continua

Sea $x \in A$ y sea $\varepsilon > 0$ sabemos que $\exists\, N \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{2^N}{3^N} < \varepsilon$.
y entonces $\forall n \geq N$

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \right| \leq \frac{2^N}{3^N} < \varepsilon \quad \therefore \quad \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = f(x)$$

y esta es la extensión buscada.

Corolario.- Sea (X, d) esp. mét. y $A \subseteq X$ cerrado no vacío y $f: A \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe $g: X \to \mathbb{R}$ continua que extiende a f.

Teorema.- Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones integrables con dominio $[a,b]$. Si $f_n \to f$ uniformemente y f es integrable, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema.- Sea $\{f_n\}$ sucesión de funciones derivables con dominio $[a,b]$. Sup. que $\{f_n'\} \to f$ uniformemente. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x).$$

Teorema.- Sean $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sucesion de funciones dada por $f_n(x) = a_n x^n$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y supongamos que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ es convergente.
Entonces para cada $0 < a < |x_0|$ se cumple que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n|_{[-a,a]}$ converge uniformemente y absolutamente.
Además $f|_{[-a,a]}$ es diferenciable y

$$f'|_{[-a,a]} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x_n)$$

Teorema: Supongamos que f admite segunda derivada y es t.q. $f''+f=0$, $f(0)=a$ y $f'(0)=b$

$\Rightarrow f(x)=b\cdot\sin(x)+a\cos(x)$.

Ejercicio:

Recordatorio.- $A\subseteq X$ es discreto si y solo si $\forall a\in A$, $\{a\}$ es abierto en A. (Es equivalente decir que todo subconjunto de A es abierto en A).

Sea (X,d) esp. métrico. Demuestra que son equivalentes las sig.

(1) Toda función continua $f: X\to(0,\infty)$ es acotada.
(2) X no tiene subespacios discretos cerrados, infinitos.

Dem.- Por contrapuesta

2 ⇒ 1) sup. que existe $f: X\to(0,\infty)$ continua y no acotada. Es decir $\forall r>0$ $\exists x\in X$ t.q. $f(x)>r$.

De manera recursiva construimos una sucesión $\{x_n\}$ t.q. $\forall n\in\mathbb{N}$, se cumple que $f(x_{n+1})>\max\{n+1, f(x_n)\}$

Notemos que $A=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es discreto ya que $\forall n\in\mathbb{N}$
$f^{-1}[(0,f(x_1))]\cap A=\{x_1\}$
$f^{-1}[(f(x_{n-1}),f(x_{n+1}))]\cap A=\{x_n\}$

y como estas imágenes inversas son abiertos en A entonces $\{x_n\}$ es abierto $\forall n\in\mathbb{N}$. $\therefore$ A es discreto

Compacidad

Def.- Decimos que un espacio métrico (X,d) es **compacto** si para cada $\{B_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ t.q.

$\bigcup_{i\in I} B_i = X$ (cubierta abta)

se cumple que existen $i_1, \dots, i_n \in I$ tales que

$$\bigcup_{j=1}^{n} B_{i_j} = X$$

subcubierta finita.

Def.- (con sucesiones) Un espacio métrico es **secuencialmente compacto** si y solo si para cada sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sobre X existe $a\in X$ y existe $A\subseteq\mathbb{N}$ t.q. $\{x_i\}_{i\in A}\to a$

"toda sucesión tiene una subsucesión convergente"

Obs.- Para $\mathbb{R}^n$ los compactos son los conjuntos cerrados y acotados, pero en general no.

Ejemplo.-

- $X=\mathbb{N}$ y $d:\mathbb{N}^2\to\mathbb{R}$ dada por $d(n,m)=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right|$

X es subespacio cerrado de X y (X,d) es acotado por 1, ya que $\forall n,m\in\mathbb{N}$, $\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right|<1$

Pero X no es compacto ni secuencialmente compacto.

Def.- Decimos que (X,d) es separable si tiene un denso numerable.

Def.- Decimos que (X,d) es segundo numerable si tiene una base numerable.

Lema.- (X,d) es separable si y solo si es segundo numerable.

Escaneado con CamScanner

Clase 62 Analisis ...

Teorema.- (X,d) es secuencialmente compacto $\Leftrightarrow$ es compacto.

Def.- Decimos que (X,d) es Lindelöf si cualquier cubierta abierta tiene una subcubierta numerable.

Obs.- Todo espacio segundo numerable es Lindelöf
Todo espacio compacto es Lindelöf

Def.- Decimos que (X,d) es totalmente acotado si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_1, \dots, x_n \in X$ t.q $X = \bigcup_{i \leq n} B_\varepsilon(x_i)$

Obs. Todo espacio compacto es totalmente acotado

Obs. Todo espacio totalmente acotado es separable.

Ejemplo.-

- Si (X,d) es infinito y d es la metrica discreta $\Rightarrow X$ esta acotado por 2, pero X no es totalmente acotado, ya que si $\varepsilon \leq 1 \Rightarrow \forall x \in X$ $B_\varepsilon(x) = \{x\}$
$\Rightarrow \forall x_1, \dots, x_n$ finitos que tome $\bigcup_{i \leq n} B_\varepsilon(x_i) = \{x_1, \dots, x_n\} \neq X$.

Teorema.- Sea (X,d) un espacio compacto, entonces es completo.

Dem.- Sea $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Como X es compacto entonces $\{x_i\}$ tiene una subsucesión convergente pero como $\{x_i\}$ es de Cauchy esto implica que esta sucesión converge.

Obs.- Si (X,d) es compacto y d' es metrica equivalente entonces (X,d') es compacto.

Escaneado con CamScanner

Proposición.- Sea (X,d) esp. métrico y $Y \subseteq X$ compacto, entonces Y es cerrado en X.

Dem.- Como Y es compacto entonces es completo y por tanto cerrado.

Proposición.- Si (X,d) es compacto y $Y \subseteq X$ cerrado entonces Y es compacto.

Dem.- Sea $\mathcal{A}$ una cubierta abta de Y. Para toda $A \in \mathcal{A}$ sea $B_A \subseteq X$ abto (en X) t.q. $B_A \cap Y = A$.

Sea $\mathcal{B} = \{B_A \mid A \in \mathcal{A}\} \cup \{X \setminus Y\}$. Entonces $\mathcal{B}$ es cubierta abta de X (abto pues Y cerrado). Como X es compacto entonces $\mathcal{B}$ tiene una subcubierta finita. Así existen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ t.q.

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_{A_i} \cup \{X \setminus Y\} = X$$

Sea $x \in Y \Rightarrow x \notin X \setminus Y$. Así existe $i \leq n$ t.q. $x \in B_{A_i}$ $\Rightarrow x \in A_i$ $\therefore \{A_i\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{A}$.

Corolario.- Si (X,d) es compacto, entonces $\{A \subseteq X \mid A$ es cerrado$\} = \{A \subseteq X \mid A$ es compacto$\}$.

Resumen.- Esp. métrico (compacto $\Rightarrow$ cerrado)

Esp. compacto (compacto $\Leftrightarrow$ cerrado)

Proposición.- Sean (X,d) y (Y,ρ) esp. métricos con X compacto y sea $f: X \to Y$ continua, entonces $\operatorname{Im}(f)$ es compacto $[f[X]]$

Dem.- Sea $\{y_n\} \subseteq \operatorname{Im} f$ sucesión. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in X$ t.q. $f(x_n) = y_n$. $\{x_n\}$ es una sucesión en X y como X es compacto $\exists \{x_{n_k}\}$ subsucesión convergente y como f es continua $\{f(x_{n_k})\} = \{y_{n_k}\}$ converge en $\operatorname{Im} f$ y $\therefore \exists \{y_{n_k}\}$ subsucesión convergente de $\{y_n\}$

$\therefore \operatorname{Im} f$ es compacto.

Escaneado con CamScanner

Espacios y métricos, y otras cosas

* Desigualdad de Young

Sean $p,q \in (1,\infty)$ tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Entonces $\forall a,b \geq 0$ se cumple que

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

* Desigualdad de Holder

Sean $p,q \in (1,\infty)$ tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Entonces $\forall x=(x_1,\dots,x_n)$ y $y=(y_1,\dots,y_n)$ se cumple que

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

* Desigualdad de Minkowski

Sea $p>1$. Entonces para cualesquiera $x_1,\dots,x_n$ y $y_1,\dots,y_n$ se cumple que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

- $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{R}^n_p)$

Se definen las normas para $p>1$

- $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
- $\|x\|_\infty = \sup_{1\leq k\leq n} \{|x_k|\}$
- $\ell_p := \{\{x_k\} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \text{ converge}\}$

Se definen las normas para $p>1$

- $\|(x_k)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

- $\ell_\infty := \{(x_k) \subseteq \mathbb{R} : \{x_k\} \text{ es acotada}\}$
- $\|(x_k)\|_\infty = \sup_{k\geq 1} |x_k|$

- Discreta

Sea X cjto $\neq 0$, entonces la métrica discreta se define $\forall x,y \in X$

$$d_{dis}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=y \\ 1 & \text{si } x\neq y \end{cases}$$

- $C^0[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}$

para $p\geq 1$

- $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$
- $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : a\leq x\leq b\}$

Notación: $C^0_p[a,b]$

- $B(S,X) = \{f : S \to X \mid f \text{ acotada}\}$

Sea S cjto y (X,d) esp. métrico $\Rightarrow$

- $d_\infty(f,g) = \sup_{z\in S}\{d(f(z),g(z))\}$

Si $X=V$ espacio vectorial normado entonces $B(S,V)$ es esp. vec. y se define su norma

- $\|f\|_\infty = \sup_{z\in S} \|f(z)\|$

- Desigualdades $\mathbb{R}^n$
- $\|x\|_p \leq \|x\|_q \leq n^{\frac{p-q}{pq}} \|x\|_p$ si $1\leq q\leq p$
- $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$ si $p\geq 1$

Escaneado con CamScanner