Esta parte esta resumida y faltaron algunas proposiciones clasicas

Operadores de Wintinger

$$\partial_z f(z_0) = \frac{1}{2}[\partial x - i\partial y] f \Big|_{z=z_0}$$

$$\partial_{\bar z} f(z_0) = \frac{1}{2}[\partial x + i\partial y] f \Big|_{z=z_0}$$

Def.- una función $f: G \to \mathbb{C}$ (G abto) es complejo-Diferenciable en $z_0 \in G$ si existe

$$f'(z_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

A $f'(z_0)$ se le llama derivada compleja de f en z_0

Proposición.- Dada $f: G \to \mathbb{C}$ (G abto), f es complejo dif. en $z_0 \in G$ si y solo si f es dif. vectorial en z_0 y $\partial_{\bar z} f(z_0) = 0$ $\leftarrow$ Ec. de Cauchy-Riemann

Def.- Dada $f: G \to \mathbb{C}$ (G abto), decimos que f es holomorfa en z_0 si $f \in C^1_{\mathbb{C}}(G)$, es decir si $f = u + iv$ con $u, v \in C^1$ y $\partial_{\bar z} f(z_0) = 0$

Notación.- $\mathrm{Hol}(G) = \{ f \in C^1(G, \mathbb{C}) \mid \partial_{\bar z} f = 0 \}$

Introducción Func. Armónicas

El operador Laplaciano $\Delta : C^2(G,\mathbb{C}) \to C(G,\mathbb{C})$ está dado por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Def.- Una función $f \in C^2(G,\mathbb{C})$ es armónica si satisface la ec. de Laplace en G.

$$\Delta f = 0$$

Denotamos por $Har(G,\mathbb{R}) = \{ u \in C^2(G,\mathbb{R}) \mid u$ es ar

$Har(G,\mathbb{C}) = \{ f \in C^2(G,\mathbb{C}) \mid f$ es a

Obs.- Si $f = u + iv$ entonces $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$

Así, $\Delta f = 0 \iff \Delta u + i\Delta v = 0$

$\iff \Delta u = \Delta v = 0$ ∴ f es armónica si y solo si u, v son armónica

Obs.- $\Delta f = 4\, \partial_{\bar{z}} \partial_z f$

Def.- Sea $u \in Har(G,\mathbb{R})$ ($G \subseteq \mathbb{C}$ dominio). Una función $v \in Har(G,\mathbb{R})$ t.q. $f = u + iv \in Hol(G,\mathbb{C})$, se llama armónica conjugada de u.

- Si $f \in Hol(G,\mathbb{C}) \cap C^2(G,\mathbb{C}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f \in Har(G,\mathbb{C})$

Escaneado con CamScanner

2.4 Series de potencias

- **Def.-** Dado una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, entonces la serie de la sucesión a_n se define como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N$$

✓ Existe la serie converge
∞ la serie diverge
$\nexists$ No converge

- **Def.-** Decimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge abs. si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge

- **Teo.-** Si una serie conv. abs $\Rightarrow$ converge.

- **Def.-** Sea X un conjunto no vacío y $\{f_n : X \to \mathbb{C}\}_{n=0}^{\infty}$ suc. de funciones. Decimos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en X a $f: X \to \mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \; \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Obs.- Si X es espacio métrico y $\{f_n\}$ son continuas, entonces si $f_n \xrightarrow[\text{unifor.}]{} f \Rightarrow f$ es cont.

Obs.- Decimos que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ conv. uniformemente en X si $\sum_{n=0}^{N} f_n \to f$ unifo.

- Criterio M - Weierstrass

Sea X conjunto no vacío, $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ sucesión de funciones t.q

(i) $|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$

Entonces $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniforme y absolutamente.

- Def.- Una serie de potencias centrada en z_0, es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Ejemplo.- Sabemos que la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge abs. para $|z| < 1$

Pero más aún. Sea $r < 1$ y consideremos $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \leq r$

$\therefore$ $|z|^n \leq r^n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y además $\sum_{n=0}^{\infty} r^n < \infty$ $\therefore$ por el criterio M

la serie conv. absoluta y unifor. $\forall$ disco cerrado contenido en $D(0,1)$

Por otro lado si $|z|>1 \Rightarrow \lim_{N\to\infty} S_N$
$= \lim_{N\to\infty} \frac{1-z^N}{1-z} = \infty$ $\therefore$ $\forall |z|>1$ la serie

diverge.

¿y en la frontera?

si $z=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \infty$

si $z=-1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ No converge.

Ejemplo.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

para $|z|<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{1-|z|}$

$\therefore$ para $|z|<1$ conv. abs.

para $|z| \leq r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n}\right| \leq \sum |z|^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} r^n < \infty$

$\therefore$ por criterio M. conv. abs. y unif.

para $|z|>1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n}\right| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

$\therefore$ para $|z|>1$ diverge

para $z=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

para $z=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ = converge.

Lema de Abel.-

Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en algún punto $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces

(i) Si $|z| < |z_0|$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge abs.

(ii) Si $|z| \leq \rho$ con $0 < \rho < |z_0|$, entonces la serie converge uniformemente.

(iii) Si la serie ~~[illegible]~~ no converge para algún $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces para todo $|z| > |z_1|$ la serie no converge.

Teorema de Abel.-

Para cada serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, existe un único $R \in [0, \infty]$ t.q.

(i) La serie conv. abs. para $|z| < R$

(ii) La serie conv. unif. para $|z| < \rho$ con $0 < \rho$

(iii) Si $|z| > R$ la serie no converge.

Def.- El número R, recibe el nombre del Radio de convergencia y $\mathbb{D}(0, R)$ se llama el Disco de convergencia de la serie.

Teorema de Cauchy-Hadamard:

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ serie de potencias y

sea $\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, entonces

(i) si $\lambda = 0$, entonces $R = \infty$

(ii) si $\lambda = \infty$, entonces $R = 0$

(iii) si $0 < \lambda < \infty$, entonces $R = 1/\lambda$

En resumen, $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Corolario: (criterio de la raíz)

Si existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$ entonces $R = 1/\lambda$

Proposición: si el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda$ existe (o es infinito) entonces $R = 1/\lambda$

Def.- Se define a la función exponencial como:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Obs.- Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio $R>0$, entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ está bien definida en $D(0,R)$ y $\therefore$ f es continua en subdiscos cerrados

∴ e^z es continua en todo $\mathbb{C}$.

Proposición. (Criterio de D'Lambert)

Si el límite $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$ existe (posiblemente ∞), entonces $R = 1/\lambda$

Proposición.- Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión no negativa y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión positiva t.q. $0 < b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Entonces

$$\limsup_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\limsup_{n\to\infty} a_n\right) \cdot b$$

Teorema.- Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con disco de conv. $D(0,R)$, entonces f es holomorfa y $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n z^{n-1}$ y tiene el mismo disco de conv.

Corolario.- Con las hip. anteriores entonces $f \in C^{\infty}(D(0,R))$ y es infinitamente $\mathbb{C}$ diferenciable. Además $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

∴ • $e^{z+w} = e^z e^w$

• $(e^z)^{-1} = e^{-z}$

$\Rightarrow$ $e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$

$\therefore$ $e^{x+iy} = e^{x}\,\mathrm{cis}(y)$

Obs.- $|e^{z}| = e^{|z|}$

Obs.- e^{z} no es inyectiva en todo $\mathbb{C}$.

Teorema (identidad para series de potencias)

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con disco de conv. $D(0,R)$, supongamos que $\{z_k\}_{k=0}^{\infty} \subset D(0,R)$ t.q.

(i) $f(z_k) = 0$ $\forall k$

(ii) $z_k \to 0$ cuando $k \to \infty$

entonces $f \equiv 0$ en $D(0,R)$.

Dem.- Sabemos que $f \in C^{\infty}(D(0,R))$ e infinit. complejo dif.

Entonces para cada $k \in \mathbb{N}_0$, $f^{(k)} \in C(D(0,R))$

entonces $\cancel{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}}$

$a_0 = f(0) = \lim_{z \to z_k} f(z_k) = 0$

$\Rightarrow$ $f(z) = a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$

$$\frac{f(z)}{z} = a_1 + a_2 z^2 + \dots = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}$$

entonces

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(z_k)}{z_k} = a_1 + \lim_{k\to\infty} \cancel{\sum_{n=2}^{\infty} a_n z_k^{n-1}}^{\,0}$$

0 pues es continua por ser serie de potencias y $z_k \in D(0,R)$

y por hip. $f(z_k) = 0$ ∴ $0 = a_1 + 0 \Rightarrow a_1 = 0$

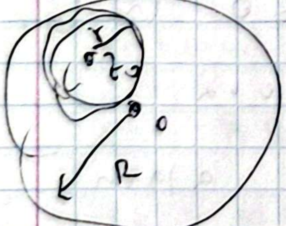
$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{f(z_k)}{z_k^2} = \cancel{\frac{a_1}{z}}^{\,0} + a_2 + a_3 z + \dots + = a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n z^{n-2}$$

$\Rightarrow a_2 = 0 \quad \dots \Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n$

∴ $f \equiv 0$. ∎

Corolario: si dos series de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ con el mismo radio, coinciden en una sucesión que converge a 0, ~~[illegible]~~ entonces $a_n = b_n \ \forall n$ y por ende $f \equiv g$.

Obs: consideremos una serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con radio $D(0,R)$ y sea ~~[illegible]~~ $z_0 \in D(0,R)$ y $r > 0$ t.q. $D(z_0, r) \subset D(0,R)$ maximo



entonces f conv. abs. para $D(z_0, r)$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0 + z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k} (z - z_0)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k} (z - z_0)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k} \right) (z-z_0)^k$$

con esto cambiamos el centro de la serie

- Def.- una función $f: G \to \mathbb{C}$ en un abto se dice Analítica en G, si en todo punto $z_0 \in G$, existe $R_{z_0} > 0$ t.q $D(z_0, R_{z_0}) \subset G$ y f se puede escribir como serie de potencias centrada en z_0

Obs.- por lo anterior, toda función que sea una serie de potencias es analítica y por tanto por lo hecho anteriormente

Analítica $\Rightarrow$ Holomorfa.

- Teorema de identidad.- Sea G un dominio y $f: G \to \mathbb{C}$ analítica. Si existe $z_0 \in G$ y un disco $D(z_0, R) \subset G$ t.q $f \equiv 0$ en $D(z_0, R)$ entonces $f \equiv 0$ en G. En particular si f se anula en una sucesión $\{z_n\} \subset G$ que converge a algún punto $p \in G$, entonces $f \equiv 0$ en G.

Dem.- Definimos $A = \{ s \in G \mid f$ se anula en una vecindad de $z \}$

Por hip $z_0 \in A$. $\therefore A \neq \emptyset$.

Veamos que A es abto. Dado $s \in A$

existe $R > 0$ t.q. $f \equiv 0$ en $D(s, R)$.

Si $\xi \in D(s, R)$ entonces sea $r = R - |\xi|$,

$\Rightarrow B(\xi, r) \subset B(s, R)$ y $f \equiv 0$ en $B(\xi, r)$

$\therefore \xi \in A \therefore B(s, R) \subset A \therefore A$ es abt.

Ahora, si $s \in \bar{A}$, como G es abto.

existe $\varepsilon > 0$ t.q. $B(s, \varepsilon) \subset G$, para este $\varepsilon > 0$

tomamos una sucesión $\{x\}_{k=N}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ t.q.

$\frac{1}{k} < \varepsilon$ $\forall k \geq N$ de tal forma que $B(s, 1/k) \subset B(s, \varepsilon)$

Para cada k, tomar $s_k \in A$ t.q. $s_k \in B(s, 1/k)$

tenemos una sucesión $\{s_k\}_{k=N}^{\infty} \subset A$ y $s_k \to s$

y por def de A $f(s_k) = 0$ $\forall k \geq N$.

Ahora, f es analítica en G entonces existe

un radio $r_2 > 0$ (que podemos sup. $r_2 \leq \varepsilon$)

t.q. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - s)^n$ $\forall z \in B(s, r_2)$

entonces existe una cola de la suc $\{z_k\}$ contenida

en $B(s, r_2)$ $\therefore$ por el teorema de identidad

para series $f \equiv 0$ en $B(s, r_2)$

$\therefore s \in A \therefore A$ es cerrado $\therefore$ por la conexidad

de G, $A = G$.

- Def: Para $y_0 \in \mathbb{R}$, definimos $I_{y_0} = \{ z \in \mathbb{C} \mid y_0 \leq \operatorname{Im} z < y_0 + 2\pi \}$

Con esto, $\exp : I_{y_0} \to \mathbb{C}^*$ es biyectiva.

- Def: Dado $y_0 \in \mathbb{R}$, la rama del logaritmo con argumento en $[y_0, y_0 + 2\pi)$ se define como:

$$\log_{y_0} : \mathbb{C}^* \to I_{y_0}$$

dada por $\log_{y_0}(w) = \ln|w| + i\theta$

donde θ es el único θ q $\theta \in \operatorname{Arg}(w) \cap [y_0, y_0 + 2\pi)$

En este curso la rama principal será $[-\pi, \pi)$

Obs: $\log_{y_0}(z)$ es continua en $\mathbb{C}^*$ excepto en $L_{y_0} = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = r e^{iy_0} \text{ con } r > 0 \}$
$= \{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) = y_0 \}$

Obs: Por la proposición de la inversa $\log_{y_0}(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus L_{y_0}$

y $\frac{d}{dz} \log_{y_0}(z) = \frac{1}{z}$

3. Integración

3.1 Curvas e integrales de línea

Recordemos que una trayectoria es una función continua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$.

Si $z_1 = \gamma(a)$ y $z_2 = \gamma(b)$ decimos que γ conecta a z_1 con z_2

Decimos que γ es diferenciable en $t \in (a,b)$ si existe $\gamma'(t) = \lim_{s \to 0} \frac{\gamma(s+t) - \gamma(t)}{s}$

Obs.- Si $\gamma(t) = x(t) + i\,y(t) \Rightarrow \gamma'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$

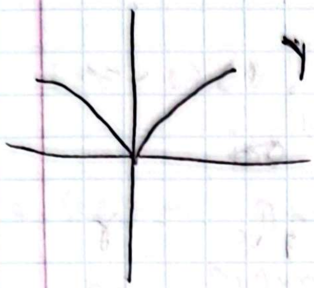
Decimos que γ es de clase C^1 en $[a,b]$ si la función

$$\gamma'(t) = \begin{cases} \gamma'(t) & , \ a < t < b \\ \gamma'(a^+) & , \ t = a \\ \gamma'(b^-) & , \ t = b \end{cases}$$

es continua, y en este caso denotamos $\gamma \in C^1([a,b], \mathbb{C})$

Def.- Decimos que γ es regular en $t \in [a,b]$ si $\gamma'(t) \neq 0$. γ es regular si es regular $\forall t \in [a,b]$

- Ejemplo:



$y = x^{2/3}$ se puede parametrizar como

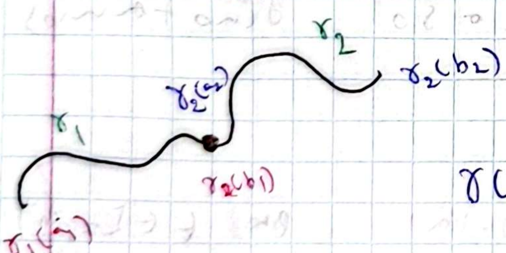
$\gamma(t) = t^3 + i\,t^2$

$\Rightarrow \gamma$ es de clase C^∞ pero no es regular en $t=0$

- Def.- Decimos que $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es C^1 a trozos si existe una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ t.q. $\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}$ es de clase C^1

(De la misma forma diremos que será regular a trozos)

Def.- Dadas dos trayectorias $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ y $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ t.q. $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ def la "suma" o "unión" de las curvas como: $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2]$



$$\gamma(t) := (\gamma_1 + \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t + a_2 - b_2), & \text{si } t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

- **Def.-** Un cambio de variable de $[a,b]$ a $[\bar{a},\bar{b}]$ es una función biyectiva creciente $\phi: [\bar{a},\bar{b}] \to [a,b]$ de clase C^1 con inversa C^1

- **Def.-** Una reparametrización de γ, es otra trayectoria $\bar{\gamma}$ t.q existe un cambio de variable ϕ con $\gamma = \bar{\gamma} \circ \phi$

Ejemplo:

Sea $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ con $\gamma(t) = e^{it}$, y

Sea $\bar{\gamma}: [0,1] \to \mathbb{C}$ t.q $\bar{\gamma}(s) = e^{2\pi i s}$,

es una reparametrización de γ.

Obs.- Si γ es regular en t_0, entonces $\bar{\gamma}$ reparametrización es regular en $s_0 = \phi^{-1}(t_0)$

Obs.- La relación "$\bar{\gamma}$ es reparametrización de γ" es de equivalencia.

- **Def.-** Dada una trayectoria C^1 a trozos, su longitud de arco se define como

$$l(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$$

- Proposición.- Sea γ, C^1 a trozos:

(i) Si $\tilde{\gamma}$ es repara. de γ entonces $\ell(\tilde{\gamma}) = \ell(\gamma)$

(ii) Si $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ y $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ con

$\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2) \Rightarrow \ell(\gamma_1 + \gamma_2) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2)$

(iii) La función $s = \phi(t) = \int_a^t |\gamma'(t)|\, dt$

es un cambio de variable de $\phi : [a,b] \to [0, \ell(\gamma)]$

con $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\phi^{-1}(s))$. Esta es llamada

"parametrización por longitud de arco"

- Def.- Una curva es una clase de equivalencia de trayectorias por parametrización. Decimos que la curva es de clase C^1 (C^1 a trozos, regular, ...) si existe un representante que lo sea

- Def.- Dada una trayectoria $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ su trayectoria opuesta se define como:

$$(-\gamma) : [a,b] \to \mathbb{C} \quad \text{con}$$

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t)$$

Def.- Una trayectoria se dice:

- Simple: si γ es inyectiva
- Cerrada: si $\gamma(a) = \gamma(b)$
- Cerrada simple: si es cerrada e inyectiva.

Teorema de la curva de Jordan:

Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es curva cerrada simple, entonces existen dominios $\text{int}(\gamma)$ y $\text{Ext}(\gamma)$ t.q

(i) $\text{int}(\gamma) \cap \text{Ext}(\gamma) = \emptyset$

(ii) $\partial\, \text{int}(\gamma) = \gamma[a,b] = \partial\, \text{Ext}(\gamma)$

(iii) $\mathbb{C} \setminus \gamma[a,b] = \text{int}\,\gamma \uplus \text{Ext}(\gamma)$

Es decir γ separa al plano complejo en dos secciones

Integrales de funciones:

Consideremos funciones $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ t.q $f = u + iv$ tales que u, v son integrables entonces def:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt.$$

Ejemplo:

$$\int_0^{2\pi} e^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} \cos(t)\,dt + i\int_0^{2\pi} \sin(t)\,dt$$
$$= [\sin(t)]_0^{2\pi} + i\,[-\cos(t)]_0^{2\pi}$$
$$= 0 + 0 = 0$$

Obs: cumple las mismas prop. de la integral real

- propiedades.- Si $f(t) = u(t) + i\,v(t)$, cont.

(i) $\overline{\int_a^b f} = \int_a^b \overline{f}$

(ii) $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

(iii) Si $F = U + iV$ es dif con $F' = f$

entonces $\int_a^b f(t) = F(b) - F(a)$

- Def: Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es una trayectoria de clase C^1 a trozos y $f : \gamma[a,b] \to \mathbb{C}$ continua, entonces definimos la integral de f sobre γ como:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

Teorema pues es una integral importante

- **Teorema.-** Sea $a \in \mathbb{C}$, $f: \mathbb{C}\setminus\{a\} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \frac{1}{z-a}$ y sea la curva $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = Re^{it} + a$, con $R>0$. entonces

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a}\, dz = 2\pi i$$

- **Def.-** El kernel (núcleo) de cauchy es la función $\alpha: \mathbb{C}^2 \setminus \{(z,z) \mid z \in \mathbb{C}\} \to \mathbb{C}$ dada por $\alpha(z,w) = \frac{1}{2\pi(z-w)}$

Obs.- Entonces por el teo. anterior

$$\int_\gamma \alpha(z,w)\, dz = i \quad \forall w, \ \gamma := \partial D(0,R)$$

- **proposición.-**

(i) si $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ es una trayectoria C^1 a trozos y $f, g: \gamma[a,b] \to \mathbb{C}$ son continuas y $\alpha \in \mathbb{C}$ entonces

$$\int_\gamma (\alpha f + g)\, dz = \alpha \int_\gamma f\, dz + \int_\gamma g\, dz$$

(ii) Si $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi: [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{C}$ es una reparametriz de γ entonces

$$\int_{\tilde{\gamma}} f\, dz = \int_\gamma f\, dz$$

Escaneado con CamScanner

(iii) $\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$

(iv) Si $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$ curvas t.q. $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ entonces

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

• Def.- Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ trayectoria C^1 a trozos y $f : \gamma[a,b] \to \mathbb{C}$ continua. Se definen

$$\int_\gamma f(z)\,d\bar{z} = \int_a^b f(\gamma(t))\,\overline{\gamma'(t)}\,dt$$

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt$$

• Proposición.- Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ trayectoria C^1 a trozos y $f : \gamma[a,b] \to \mathbb{C}$ continua entonces

(i) $\overline{\int_\gamma f(z)\,dz} = \int_\gamma \overline{f(z)}\,d\bar{z}$

(ii) $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz| \leq \|f\|_\infty\, \ell(\gamma)$

con $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\gamma} |f(z)|$

Dem.

(i) Tenemos que

$$\overline{\int_\gamma f(z)\,dz} = \overline{\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt}$$

Ahora consideramos $\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$

$\Rightarrow \gamma'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$ $\therefore$ con $f(\gamma(t)) = u + iv$

$$\Rightarrow I = \overline{\int_a^b (u+iv)(x'+iy')\,dt}$$

$$= \overline{\int_a^b (ux' - vy') + i(uy' + vx')}$$

$$= \overline{\int_a^b (ux'-vy') + i\int_a^b (uy'+vx')}$$

$$= \int_a^b (ux'-vy') - i\int_a^b (uy'+vx')$$

$$= \int_a^b (ux'-vy') - i(uy'+vx')\,dt$$

$$= \int_a^b (u-iv)(x'-iy')\,dt = \int_a^b \overline{f(\gamma(t))}\,\overline{\gamma'(t)}\,dt$$

$$= \int_\gamma \overline{f(z)}\,d\overline{z}$$

(ii) $\left|\int_\gamma f\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt$

$= \int_\gamma |f(z)|\,|dz|$

f acotada en γ

Por otro lado $\int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)| \leq \|f\|_\gamma \int_a^b |\gamma'(t)|\,d$

$= \|f\|_\gamma\, \ell(\gamma)$.

Teorema: Sea $U \subset \mathbb{C}$ abto, f continua en U y sup. que existe una función $F \in Hol(U)$ t.q. $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in U$, entonces

(i) Si $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$, C^1 a trozos,
$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

(ii) si γ es cerrada ent. $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Dem.- notemos que $\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)$
$= f(\gamma(t))\,\gamma'(t)$

$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(F\circ\gamma)(t)\,dt$

$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

y la otra inmediata.

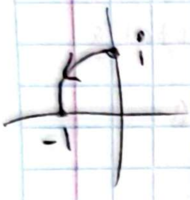
Ejemplo:

Evaluar $\int_\gamma \frac{dz}{z^2}$ sobre γ dada por el cuadrado que va de $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$

Notemos que si definimos $f: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \frac{1}{z^2}$ es continua en ese abierto y además $F(z) = -\frac{1}{z}$ definida en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ es holomorfa t.q. $F'(z) = \frac{1}{z^2}$

$\therefore \int_\gamma \frac{dz}{z^2} = 0.$

• Calcular $\int_\gamma \frac{dz}{z}$. dado γ el arco de circunferencia que va de i a -1



Sea $F(z)=\log_0(z)$ entonces F es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\ell_{2\pi}$ abierto y t.q. $F'(z)=\frac{1}{z}$

además $f:\mathbb{C}\setminus\ell_{2\pi}\to\mathbb{C}$ dada por $f(z)=\frac{1}{z}$

es continua en $\mathbb{C}\setminus\ell_{2\pi}$ $\therefore$ $\int_\gamma f(z)=\log_0(-1)-\log_0(i)$

$=\ln|-1|+i\arg_0(-1)-\ln|i|-i\arg_0(i)$

$=0+i\pi-0-i\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}i$

Ob): Si $f_n:\mathbb{C}\setminus\{a\}\to\mathbb{C}$ con $f(z)=(z-a)^n$

con $\boxed{n\in\mathbb{Z}}$ ($n\neq$. admite la primitiva

$F_n(z)=\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ $\therefore$ para γ cerrada

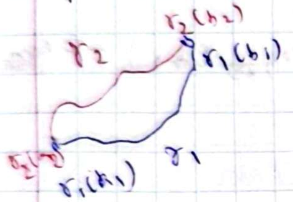
$$\int_\gamma (z-a)^n\,dz=0 \quad \forall n\neq -1$$

~~Ob): El teo. anterior nos dice que siempre que se cumplan las hip. (la integral solo depende de los extremos).~~

Escaneado con CamScanner

• Def.- Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abto y $f \in C(U, \mathbb{C})$

(i) Decimos que f es independiente de la trayectoria si para cualquier 2 curvas $\gamma_j : [a_j, b_j] \to U$ t.q. $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$ y $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$ entonces $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f$



(ii) una función $F \in Hol(U)$ se llama antiderivada o primitiva de f si $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in$

Obs 1.- Si f es continua y tiene primitiva entonces f es independiente de la trayectoria

Obs 2.- Si G es un dominio, la antiderivada es única salvo suma de constante.

• Teorema.- Sea G un dominio y f continua en G, entonces los sig. son equivalentes:

(i) f admite una primitiva $F \in Hol(G)$

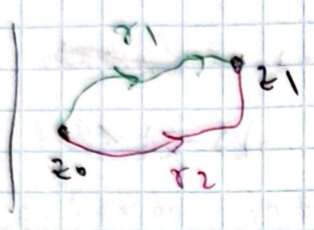
(ii) $\forall \gamma$ curva serrada en G, $\int_\gamma f = 0$

(iii) f es independiente de la trayectoria.

Dem.-

(i) $\Rightarrow$ (ii) ✓

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Se toma $\gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2)$



que es una curva cerrada $\therefore$ por (ii)

$$\int_\gamma = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

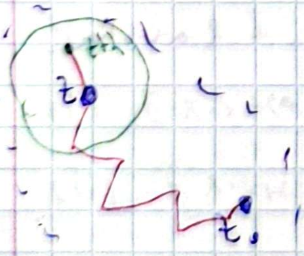
Def $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds$, donde la integral se toma sobre cualquier trayectoria C' a trozos que une a z_0 con z la cual existe pues G es un dominio, por (iii) F está bien definida.

Como G es un dominio, existe $r>0$ t.q. $D(z,r) \subset G$, si tomamos $h \in \mathbb{C}$ t.q. $|h| < r$

$\Rightarrow |(z+h) - z| = |h| < r \Rightarrow z+h \in D(z,r)$

Ahora conectamos z con $z+h$ con la línea recta

$\ell(t) = z + th$, $0 \le t \le 1$. Así



$$F(z+h) = \int_{z_0}^{z+h} f(s)\,ds = \underbrace{\int_{z_0}^{z} f(s)}_{F} + \int_{z}^{z+h} f$$

$$\Rightarrow F(z+h) - F(z) = \int_{z}^{z+h} f(s)\,ds$$

Ahora notemos que $\int_{\ell} dt = \int_0^1 h\,dt = h$

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(s)\,ds - f(z)\cdot\frac{h}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} [f(s)\,ds - f(z)]\,ds$$

$$\Rightarrow \left| \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|h|}\int_z^{z+h} |f(s)-f(z)|\,|ds|$$

Como f es continua en z, ent. ~~existe~~ dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ con $\delta < r$ t.q. si $|s-z| < \delta$

$\Rightarrow |f(s)-f(z)| < \varepsilon$

Si $s = z + th$ ent. $|s-z| = t|h| \leq |h|$

Si $|h| < \delta$, ent. $|f(s)-f(z)| < \varepsilon$ para $s \in [z, z+h]$

$$\Rightarrow \left| \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|h|}\int_z^{z+h} \varepsilon\,|ds| = \varepsilon \frac{|h|}{|h|} = \varepsilon$$

$\therefore \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z) \quad \therefore F'(z) = f(z)$ $\blacksquare$

Obs.- La propiedad

$$\int_\gamma f\,dz = 0 \quad \forall \gamma \text{ cerrada}$$

se le llama propiedad integral de Cauchy

● Proposición.- Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ con disco de conv. $D(z_0, R)$. Entonces

$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1}$ tiene radio de conv. R

y es t.q. $F' = f$. En particular f no depende de la trayectoria y cumple la propiedad integral de cauchy.

⊛ Primeras versiones del teo. de cauchy.

Teorema de la curva de Jordan ✓

● Def.- Un dominio $D \subset \mathbb{C}$ se dice **Dominio de Jordan** C^1 a trozos, si ∂D es la traza de una curva de Jordan Γ C^1 a trozos. t.q. D es el $\text{int}(\Gamma)$.

Se suele denotar $D := D^+$ y $D^- := \mathbb{C} \setminus \overline{D^+}$

● Def.- Dado un cerrado $X \subset \mathbb{C}$, decimos que $f \in C^1(X, \mathbb{C})$ si

(i) Existe $U \subset \mathbb{C}$ abto t.q. $X \subset U$

(ii) Existe $\tilde{f} \in C^1(U, \mathbb{C})$ t.q. $\tilde{f}|_X = f$.

Teorema de green.- Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio de Jordan, $\Gamma = \partial D$ y $P, Q \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R})$ ent.

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dA$$

Teorema de green (complejo).- Dado $D \subset \mathbb{C}$ dominio de Jordan, $f \in C^1(\overline{D}, \mathbb{C})$, entonces

(i) $$\iint_D \partial_{\bar{z}} f(z)\,dA_z = \frac{1}{2i}\int_\Gamma f(s)\,ds$$

(ii) $$\iint_D \partial_z f(z)\,dA_z = \frac{i}{2}\int_\Gamma f(s)\,d\bar{s}$$

Corolario.- Bajo las condiciones del teorema de green. Si $f, g \in C^1(\overline{D}, \mathbb{C})$, entonces.

$$\frac{1}{2i}\int_\Gamma f(s)\,g(s)\,ds = \iint_D g(z)\,\partial_{\bar{z}} f(z)\,A_z + \iint_D f(z)\,\partial_{\bar{z}}\,g(z)\,A_z$$

Teorema de Cauchy (1ro) Sea $D \subset \mathbb{C}$ dominio de Jordan y $f \in C^1(\overline{D}, \mathbb{C})$ t.q. $f \in Hol(D)$. Entonces

$$\int_\Gamma f\,dz = 0$$

Si $G \subset \mathbb{C}$ dominio y $f \in Hol(G)$, entonces para cualquier curva de Jordan, γ contenida en G y t.q. $\text{int}(\gamma) \subset G$, se tiene que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

- Teorema (Formula de Borel - Pompeiu)

Dado $D \subset \mathbb{C}$ dominio de Jordan y $w \in C^1(\bar{D}, \mathbb{C})$ se cumple que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{w(s)}{s-z}\,ds + \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\partial_{\bar{s}} w(s)}{z-s}\,dA_s = \begin{cases} w(z) & \text{si } z \in D \\ 0 & \text{si } z \in D^- \end{cases}$$

- Corolario.- Bajo las condiciones del teo. anterior, si $w \in Hol(D)$ entonces

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{w(s)}{s-z}\,ds \quad , z \in D$$

(Formula integral de Cauchy)

Def.- Def.- $C_\Gamma^n[\varphi](z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z)^n}\,dw$

- Teorema.- Sea Γ curva C^1 a trozos y $\varphi \in L_1(\Gamma)$, entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $C_\Gamma^n[\varphi] \in Hol(\mathbb{C} \setminus \Gamma)$ y

$$\frac{d}{dz} C_\Gamma^n[\varphi](z) = \frac{n}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw = n\, C_\Gamma^{n+1}[\varphi](z)$$

Además $\lim_{|z|\to\infty} C_\Gamma^n(z) = 0$.

- **Teorema:** Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abto y $f \in Hol(U)$. Entonces $f \in C^{\infty}(U)$ e infinitamente $\mathbb{C}$-diferenciable. Mas aún, $f^{(n)} \in Hol(U)$

- **Corolario** (Formula integral de Cauchy)
  Bajo las condiciones de la formula integral de Cauchy,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw$$

- **Lema:** Sea Γ una curva. $\{f_n : \Gamma \to \mathbb{C}\}$ sucesión de funciones acotadas en Γ. t.q $f_n \to f$ en Γ, con $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ acotada. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma} f_n(z)\, dz = \int_{\Gamma} f(z)\, dz$$

- Holomorfa $\iff$ Analitica

- **Proposición:** Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abto y $f \in Hol(U)$. Entonces en cada disco abto, $D \subset U$, f tiene una primitiva local, es decir, $\exists F_D \in Hol(D)$ t.q $F_D' = f|_D$ $\therefore$ para cualquier curva cerrada en D, $\int_{\Gamma} f = 0$

- Teorema (Morera, 1ra versión)

Sea $G \subset \mathbb{C}$ dominio y $f \in C(G, \mathbb{C})$.

Si para toda curva cerrada γ en G

se tiene que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ entonces

$f \in Hol(G)$.

Dem:

[$\exists F \in Hol(G)$ primitiva $\Leftrightarrow$ f integra cero en curvas cerradas $\Leftrightarrow$ f es ind. de la trayectoria]

- Def: un conjunto $D \subset \mathbb{C}$ se dice convexo si $\forall a, b \in D$, $[a, b] \subset D$ (el segmento recta que une a a con b)

Notación: $\Delta(a, b, c)$ denota el triangulo formado por a, b y $c \in \mathbb{C}$

- Teorema (Morera triangulos)

Sea D un dominio convexo. Si $f \in C(D, \mathbb{C})$ t.q. para cualquier triangulo $\Delta \subset D$, $\int_{\partial\Delta} f(s)\,ds = 0$ entonces $f \in Hol(D)$.

- Teorema de Goursat (Triangulos)

Sea D un dominio convexo y $f: D \to \mathbb{C}$ una función $\mathbb{C}$-diferenciable en D. Entonces para cualquier triangulo $\Delta \subset D$ se cumple que $\int_{\partial\Delta} f(s)\,ds = 0$

- Corolario.- $f: D \to \mathbb{C}$ es complejo dif $\Leftrightarrow$ f holomorfa en D (abierto)

- Teorema de Cauchy (convexos)

Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio convexo, $f \in Hol(D)$.
Entonces para toda curva cerrada $\Gamma \subset D$, se cumple:
que $\int_\Gamma f(s)\,ds = 0$

- Teorema de Goursat (sin un punto)

Sea $D \subset \mathbb{C}$ dominio convexo, $p \in D$ y
f continua en D y holomorfa en $D \setminus \{p\}$
entonces

(i) $\forall \Delta \subset D$, $\int_{\partial D} f = 0$

(ii) $\exists F \in Hol(D)$ t.q $F' = f$. por ende $f \in Hol(D)$

Ejemplo.- $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin(z)}{z} & , z \neq 0 \\ 1 & , z = 0. \end{cases}$

• **Def.-** Sea Γ una curva cerrada (C^1 a trozos)

El **Índice** de Γ sobre $z_0 \notin \Gamma$ se define como:

$$I_\Gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{ds}{s-z_0}$$

• **Teorema del índice.** Sea Γ una curva cerrada.

Entonces.

(i) $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$, $I_\Gamma(z) \in \mathbb{Z}$

(ii) I_Γ es constante en cada componente convexa de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$

(iii) $I_\Gamma = 0$ en la componente no conexa.

• **Teorema** (Fórmula integral de Cauchy para convexos)

Sea D un convexo y Γ una curva cerrada contenida en D. Entonces para cualquier $f \in Hol(D)$, se cumple que:

$$\forall z \in D\setminus\Gamma \qquad f(z)\, I_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(s)}{s-z}\, ds$$

• **Teorema:** (Estimada de Cauchy)

Sea $f \in Hol(B(a,r))$ y sup. que existe $M>0$ t.q. $\sup_{z\in B(a,r)} |f(z)| < M$, entonces

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} M.$$

- **Teorema de Liouville** - Toda función entera y acotada en $\mathbb{C}$ es constante.

- **Teorema** - (Propiedad del valor medio de Gauss) Sea $f \in C^1(\overline{B}(a,r)) \cap Hol(B(a,r))$, entonces

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\,d\theta$$

- **Def** - Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abto y $w: U \to \mathbb{C}$ continua, se dice que w satisface la propiedad del valor medio (en discos ∞) en U si $\forall a \in U$, $\forall r > 0$, $\overline{B}(a,r) \subset U$

$$\Rightarrow w(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(a+re^{i\theta})\,d\theta$$

<u>Obs</u> - Las funciones Holomorfas satisfacen PVM.

- **Proposición** - Sea $U \subset \mathbb{C}$ abto y $u \in Har(U, \mathbb{R})$. Entonces u satisface PVM.

- **Def** - Sea $U \subset \mathbb{C}$ abto. Una función continua $u: U \to \mathbb{R}$ se dice subarmónica (o de sub) en U si

$$\forall a \in U, \forall r > 0, \overline{B}(a,r) \subset U \Rightarrow u(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{i\theta})\,d\theta$$

Ejemplos.-

- Toda armónica es subarmónica
- $|f|$ es subarmónica con f holomorfa
- Si $u \in Har(U, \mathbb{R}) \Rightarrow |u|$ es subarmónica

- Lema.- Sea $\phi : [a,b] \to [0, \infty)$ continua.

Entonces si $\|\phi\|_1 := \int_a^b |\phi(t)|\, dt = 0$

entonces $\phi \equiv 0$ en $[a,b]$

- Teorema del módulo máximo.- (1ra versión)

Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio y $u \in C(D, \mathbb{R})$ subarmónica en D. Supongamos que u alcanza su máximo en D entonces u es constante en D.

- Teorema (Máximo 2da versión)

Sea D un dominio acotado, y $u \in C(\bar{D}, \mathbb{R})$ y subarmónica en D. Entonces

$$\max_{\bar{D}} u = \max_{\partial D} u$$

Principio del módulo máximo.-

Sea D un dominio y $f \in H(D)$

(i) Si $|f|$ alcanza su máximo en D, entonces f es constante en D.

(ii) Si $f \in C(\bar{D})$ y D acotado, entonces $\max_{\bar{D}} |f| = \max_{\partial D}$

Igual para armónicas.

Corolario.- (principio del mínimo)

Bajo las hip. del teo. anterior, una función armónica no puede alcanzar su mínimo en D.

- **Teorema de Morera generalizado:** Sea Ω abto, $a \in \Omega$ y $f \in Hol(\Omega \setminus \{a\}) \cap C(\Omega, \mathbb{C})$ t.q $\forall \Delta \subset \Omega$, $\int_{\partial\Delta} f = 0$ entonces $f \in Hol(\Omega)$

- **Def:** Una cadena de curvas es una "suma formal"

$$\Gamma = a_1\gamma_1 + \dots + a_N\gamma_N$$

donde $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ son curvas y $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{Z}$.

Un ciclo es una cadena de curvas cerradas.

$\Gamma^* =$ traza de la cadena (imagen)'

- **Def:** Sea Ω un abto y Γ un ciclo en Ω

Decimos que Γ es Homologa a 0 en Ω si:

$\forall z \notin \Omega$, $I_\Gamma(z) = 0$ → $(\Gamma \simeq 0)$

- **Teorema:** (Cauchy versión homologa)

Sea Ω un abto y Γ un ciclo en Ω y $f \in Hol(\Omega)$. Si $\Gamma \simeq 0$ en Ω entonces

(i) $\forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*$, $f(z) I_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(s)}{s-z}\,ds$

(ii) $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$

- **Corolario:** Sea Ω un abto y Γ_1, Γ_2 cadenas t.q $\Gamma_1 - \Gamma_2$ es ciclo con $\Gamma_1 - \Gamma_2 \simeq 0$ en Ω entonces

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz \qquad \forall f \in Hol(\Omega)$$

Corolario.- Sea Ω un abierto, Γ un ciclo en Ω, $\Gamma \approx 0$, entonces para $f \in Hol(\Omega)$, $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$

$$f^{(n)}(z)\, I_\Gamma(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\, ds$$

4. Ceros y singularidades

Notación: $B'(a,r) := B(a,r) \setminus \{a\}$

$\overline{B}'(a,r) = \overline{B}(a,r) \setminus \{a\}$.

- **Def.-** Sea Ω un abierto y f una función definida en Ω excepto para un número finito de puntos.

  Un punto $z = a \in \Omega$ se dice singularidad aislada si existe $r > 0$ t.q. $B(a,r) \subseteq \Omega$ y $f \in Hol(B'(a,r))$

- **Def.-** Una singularidad aislada de f, $z = a$ se dice removible si existe una vecindad $B(a,\delta)$ de "a" y $F \in Hol(B(a,\delta))$ t.q. $F(z) = f(z)$ $\forall z \in B'(a,\delta)$.

  En la práctica se suele decir que $f \in Hol(B(a,\delta))$

- **Teorema.-** Sea $f \in Hol(B'(a,r))$ con una singularidad aislada en $z = a$. La singularidad es removible si y solo si existe $r_2 \leq r$ t.q. f es acotada en $B'(a,r_2)$

- **Obs.-** $z = a$ es removible si $\lim_{z \to a} f(z)$ existe

  $\iff \lim_{z \to a} f(z)(z-a) = 0$

~~Sea~~

• **Def.-** Sea $f \in Hol(\Omega)$ y $a \in \Omega$ un cero de f. Se define la multiplicidad de "a" (en f) como:

$$m = \max\{m \in \mathbb{N} \mid f^{(m)}(a) \neq 0 \ \text{y} \ f^{(k)}(a) = 0 \ \forall k < m\}$$

~~[illegible]~~

• **Teorema.-** Si $f \in Hol(\Omega)$ y $a \in \Omega$ es cero de multiplicidad m, entonces existe $B(a,r) \subset \Omega$ y $\varphi \in Hol(B(a,r))$ con $\varphi(z) \neq 0$ $\forall z \in B(a,r)$ t.q. $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$

• **Def.-** Sea $a \in \Omega$ una singularidad aislada de f. Decimos que "a" es polo si $\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$

Obs.- Si a es polo de f $\Rightarrow \lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$ $\Rightarrow \lim_{z \to a} \frac{1}{f(z)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{f}$ tiene singularidad removible en a y de hecho tiene un cero.

• **Def.-** Sea $a \in \Omega$ un polo de f. Decimos que a es polo de orden m si $\frac{1}{f}$ tiene un cero de ~~orden~~ multiplicidad m en a.

Obs.- un cero o polo de orden 1 se les dice "simple"

Obs.- Si f tiene un polo de orden m en "a" ent.

$$f(z) = \frac{B_m}{(z-a)^m} + \dots + \frac{B_1}{(z-a)} + \tilde{\varphi}(z) \quad \text{con } \tilde{\varphi} \in Hol(B(a,r))$$

$$\Rightarrow \cancel{B_1} = \underbrace{B_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,\delta)} f(z)\,dz}_{\text{residuo de } f}$$

- Def.- Si a es polo de $f \in Hol(B'(a,r))$.

El residuo de f en a se define como B_1 donde B_1 es el primer coeficiente de la serie singular.

Obs.- Si a es polo de orden m, ent.

$\lim_{z \to a} f(z)(z-a)^m$ existe $\neq 0$

$\Leftrightarrow \lim_{z \to a} f(z)(z-a)^{m+1} = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{z \to a} |f(z)(z-a)^k| = \infty \quad \forall\, 0 \leq k < m$

¿Qué pasa si a es sing. aislada pero no es removible ni un polo?

Ejemplo.- $f(z) = e^{1/z}$, $z \neq 0$

¿Qué pasa en $z=0$?

- Sea $z \equiv x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \infty$

pero $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$

$\therefore$ $\lim_{z \to 0} |f(z)| \neq \infty$ $\therefore$ $z=0$ no es polo.

- Def.- Decimos que a es singularidad ~~esencial~~ esencial si no es ni polo ni removible.

- Teorema (Casorati-Weierstrass)

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $a \in \Omega$ y $f \in Hol(\Omega \setminus \{a\})$ singularidad aislada. Si a es esencial entonces, para toda $\delta > 0$ t.q $B(a,\delta) \subset \Omega$ se tiene que $f[B'(a,\delta)]$ es densa en $\mathbb{C}$

- Def.- Dados $a \in \mathbb{C}$ y $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ se define el anillo como el conjunto

$$A(a, r_1, r_2) = \{ z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z-a| < r_2$$

Def.- Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión doble de números complejos. Decimos que la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} z_n$ conv. absolutamente si las series $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} z_{-n}$ conv. ambas absolutamente.

En dado caso, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_n + \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n}$

Si $X\neq\emptyset$, dada una sucesión de funciones $\{u_n : X\to\mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, decimos que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(x)$ conv. absolutamente para todo $x\in X$ si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}(x)$ conv. absol.

Decimos que la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(x)$ conv. uniformemente si " " " uniformemente.

Teorema (Series de Laurent)

Sea $f\in \mathrm{Hol}(A(a,r_1,r_2))$. Entonces

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n, \quad z\in A(a,r_1,r_2)$$

y la serie conv. absolutamente en $A(a,r_1,r_2)$ y uniformemente en subanillos cerrados. Tal serie es única y los coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B(a,\rho)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz, \quad n\in\mathbb{Z}$$

~~Obs: Si $n\geq 0 \Rightarrow$ por F.I.C., $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$~~