Sucesiones

Una sucesión es una función cuyo dominio son los naturales y cuyo codominio está contenido en el conjunto de los reales. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

En otras palabras, una sucesión en $\mathbb{R}$ asigna a cada número natural $n = 1, 2, 3 \dots$ un número real determinado de manera única. Las sucesiones se denotarán como a, $\{a_n\}$, $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $f(\mathbb{N})$. Así pues $\{n\}$, $\{(-1)^n\}$ y $\{\frac{1}{n}\}$ designa sucesiones α, β, γ
$\alpha_n = n$, $\beta_n = (-1)^n$ y $\gamma_n = \{\frac{1}{n}$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ llamamos a a_n el n-ésimo término de la sucesión

Operaciones con sucesiones

Las reglas para sumas, productos y cocientes de funciones son aplicables a las sucesiones pues estas son un caso particular de funciones

I) $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$

II) $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$

IV) $c\{a_n\} = \{c a_n\}$

V) si $b_n \neq 0$ $\forall n \geq 1$ $\dfrac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$

Ejemplos

I) $\{2n\} + \{-n^2\} = \{2n - n^2\} = \{1, 0, -3, -8, -15 \dots\}$

II) $\{2n\} \cdot \{-n^2\} = \{-2n^3\} = \{-2, -16, -54, \dots\}$

III) $3\{2n\} = \{6n\} = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$

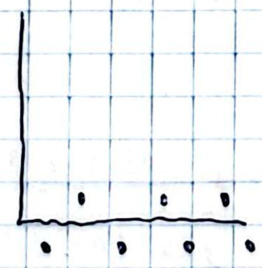
IV) $\dfrac{\{2n\}}{\{-n^2\}} = \left\{-\dfrac{2}{n}\right\} = \left\{-2, -1, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{2} \dots\right\}$

Una sucesión puede representarse gráficamente pero la gráfica por lo general es poco significativa pues la mayor parte de la función no cabe en la gráfica

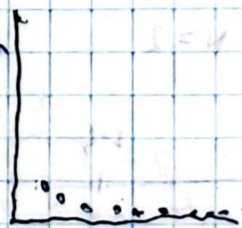
$\alpha_n = n$ $\quad \beta_n = (-1)^n$ $\quad \gamma_n = \frac{1}{n}$

α_n

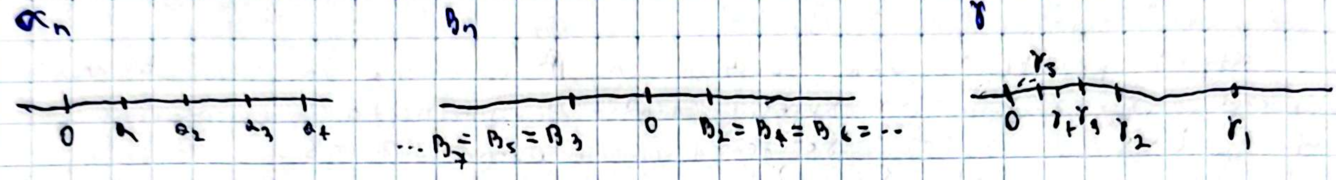
β_n



γ_n



Se obtiene una representación mas conveniente de una sucesión marcando simplemente los puntos $a_1, a_2, a_3, \dots$ sobre una recta



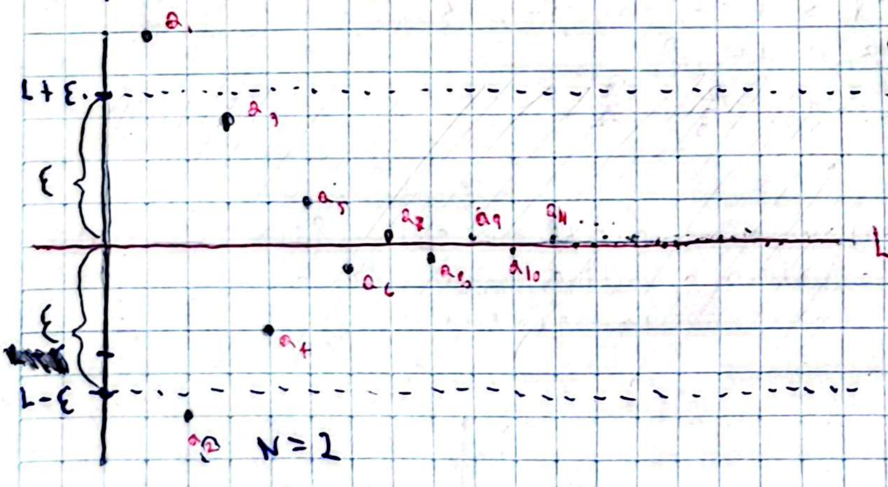
Este tipo de diagramas indican hacia donde va la sucesión. La sucesión $\{a_n\}$ hacia el infinito, la sucesión $\{B_n\}$ va dando saltos entre -1 y 1 y la sucesión $\{\gamma_n\}$ converge hacia 0

Convergencia de una sucesion

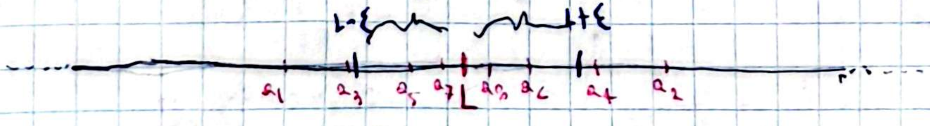
una sucesión $\{a_n\}$ converge hacia L si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$ se tiene $|a_n - L| < \varepsilon$, donde ε representa una vecindad.

Vecindad: Teniendo un numero x su vecindad sera el intervalo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, este intervalo esta alrededor de x

Representación geometrica



para cualquier $\varepsilon > 0$ que tomemos en el intervalo $(L+\varepsilon, L-\varepsilon)$ a partir de un N, todos los demas puntos se quedan dentro del intervalo



$N \geq 5$

Observación: La definición de límite de una sucesión de números reales se usa comprobar que un valor propuesto de X es en realidad el límite. NO proporciona ningún medio para determinar inicialmente cuál podría ser ese valor. Pero con mucha frecuencia en la práctica es necesario llegar a un valor conjeturado del límite mediante el cálculo directo de varios términos de la sucesión

Método de demostración

Primeramente se debe conjeturar un límite de una sucesión, para esto se llevará a cabo cálculos de valores en la sucesión. Al hacer esta afirmación se debe de dar un $\varepsilon > 0$ con lo cual se deberá proporcionar un valor N tal que si $n \in \mathbb{N}$ $n > N$ y se cumplirá que $|a_n - L| < \varepsilon$, si siempre se puede presentar un valor N y se demuestra que este valor funciona, quedará demostrado. En general si propone un límite y luego se encuentra la N, posterior se demuestra a partir de la N encontrada.

Divergencia: Decimos que una sucesión diverge si no converge

Ejemplos

1) $a_n = \frac{1}{n}$

Si tomamos $a_1 = \frac{1}{1}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}, \ldots$ el denominador es cada vez más grande entonces su límite $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

a) Encontramos la N t.q $\varepsilon > 0$ y $n > N$

Queremos que $|a_n - L| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| =$ como $n \in \mathbb{N}$ $= \frac{1}{n}$

Como tenemos que $n > N \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{N}$ $\therefore$ $\varepsilon = \frac{1}{N} = N = \frac{1}{\varepsilon}$

b) Demostración

~~[illegible]~~

Se $\varepsilon > 0$ y $N = \frac{1}{\varepsilon}$

P.D $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ $\quad \forall n > N$

$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$ por hipótesis $n > N \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \varepsilon$

$\therefore$ por transitividad $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$

II) $a_n = \frac{1}{n^2}$

$a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{9}, \dots$ Convergerá a 0 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$

a) Encontramos la N

Tenemos que $|a_n - L| = \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \left|\frac{1}{n^2}\right|$ como $n \in \mathbb{N}$ se tendrá $\left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$, como $n > N \Rightarrow n^2 > N$ entonces $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{N}$ ∴ $\varepsilon = \frac{1}{N} \Rightarrow N = \frac{1}{\varepsilon}$

b) Demostración

Sea $\varepsilon > 0$ y $N = \frac{1}{\varepsilon}$

P.D $\forall n > N$ se cumple que $|a_n - L| < \varepsilon$

$|a_n - L| = \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ como por Hip. $n > N \Rightarrow n^2 > N$ $\Rightarrow \frac{1}{n^2} > \frac{1}{N} \Rightarrow \frac{1}{n^2} > \frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \varepsilon$ ∴ por transitividad

$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$

III) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{n+1}\right) = 3$

a) Encontramos N

Tenemos que $|a_n - L| = \left|\frac{3n+2}{n+1} - 3\right| = \left|\frac{3n+2-3n-3}{n+1}\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right|$
Como $n \in \mathbb{N}$, se tendrá $\left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$, Como $n > N \Rightarrow n+1 > N$ $\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N}$ ∴ $\varepsilon = \frac{1}{N} \Rightarrow N = \frac{1}{\varepsilon}$

b) Demostracion

Sea $\varepsilon > 0$ y $N = \frac{1}{\varepsilon}$

P.D $\forall n > N$ se cumple que $|a_n - L| < \varepsilon$

$|a_n - L| = \left|\frac{3n+2}{n+1} - 3\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$, Como $n > N \Rightarrow n+1 > N$ $\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} > \varepsilon$ ∴ por transitividad

$\left|\frac{3n+2}{n+1} - 3\right| < \varepsilon$

iv) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$

Se puede hacer $\underbrace{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}\cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ y se puede

observar que converge a 0

a) Encontramos N

Tenemos $|a_n - L| = \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - 0\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right|$ como $n\in\mathbb{N}$ se tendra $\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}$, como $n>N$

se tendra que $\sqrt{n} > \sqrt{N} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{N}$, tambien como $n>N$ entonces $n+1 > N \Rightarrow \sqrt{n+1} > \sqrt{N} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Tenemos que $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{N}}$ y $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{N}}$ por propiedad se tendra $\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}}$ ~~como $\sqrt{N} < N \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}}$~~

$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{N}}$ $\therefore$ $\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{N}} \Rightarrow \sqrt{N} = \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow N = \frac{4}{\varepsilon^2}$

b) Demostracion

Sea $\varepsilon > 0$ y $N = \frac{4}{\varepsilon^2}$

P.D $\forall n > N$ se cumple que $|a_n - L| < \varepsilon$

$|a_n - L| = \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - 0\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}$

como $n > N$ se tendra que $\sqrt{n} > \sqrt{N} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{N}}$ y tambien como $n > N \Rightarrow n+1 > N \Rightarrow \sqrt{n+1} > \sqrt{N} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{N}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{2}{\sqrt{N}} = \frac{2}{\left(\sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2}}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} = \varepsilon$

$\therefore \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon$

v) $\lim_{n\to\infty} \frac{b}{n} = 0 \quad b \in \mathbb{R}$

a) Encontramos N

Tenemos $|a_n - L| = |\frac{b}{n} - 0| = |\frac{b}{n}|$. Si $b = 0 \Rightarrow |\frac{b}{n}| = 0$ y como $\varepsilon > 0$ y n se tiene que $|\frac{b}{n} - 0| < \varepsilon$

Si $b \neq 0 \Rightarrow |\frac{b}{n}| = \frac{|b|}{|n|} = \frac{|b|}{n}$ como $n > N \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{N}$

y como $|b| > 0 \Rightarrow \frac{|b|}{n} < \frac{|b|}{N}$

∴ $\varepsilon = \frac{|b|}{N} \Rightarrow N = \frac{|b|}{\varepsilon}$

b) Demostración

Sea $\varepsilon > 0$ y $N = \frac{|b|}{\varepsilon}$

P.D $\forall n > N$ se cumple que $|a_n - L| < \varepsilon$

$|a_n - L| = |\frac{b}{n} - 0| = |\frac{b}{n}| = \frac{|b|}{n}$, como $n > N \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{N}$ y como $|b| > 0 \Rightarrow \frac{|b|}{n} < \frac{|b|}{N} = \frac{|b|}{\left(\frac{|b|}{\varepsilon}\right)} = \varepsilon$ ∴

$|\frac{b}{n} - 0| < \varepsilon$

vi) Si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ y $c \in \mathbb{R} \Rightarrow cx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} cx$

por hipótesis tenemos que sea $\varepsilon > 0$ y N tal que si $n > N$ entonces $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ si $c \neq 0$

P.D $\lim_{n\to\infty} cx_n = cx$

Sea $\varepsilon > 0$ entonces $\exists N$ tal que si $n > N$ $|cx_n - cx| < \varepsilon$
$\Rightarrow |c(x_n - x)| = |c||x_n - x| < \varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{|c|}$

vii) Si $x_n \to x \Rightarrow |x_n| \to |x|$

Sea $\varepsilon > 0$, por hipótesis sabemos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ entonces $\forall n > N$ se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$

P.D $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$

Sea $\varepsilon > 0$ entonces $\exists N$ tal que si $n > N$ $||x_n| - |x|| < \varepsilon$
por propiedad se tiene que $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| < \varepsilon$
∴ $|x_n - x| < \varepsilon$

Teoremas de límites

Def. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ está acotada superiormente si $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $\{x_n\} \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Def.- Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ está acotada inferiormente si $\exists k' \in \mathbb{R}$ tal que $k' \leq \{x_n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Def.- Se dice que una sucesión es acotada si $\exists k, k' \in \mathbb{R}$ tal que $k \leq \{x_n\} \leq k' \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Es claro que puede encontrarse un número real $M > 0$ tal que $-M \leq k$ y $k' \leq M$ así $-M \leq \{x_n\} \leq M$. Con esto se puede escribir

$\{x_n\}$ es una sucesión acotada $\iff \exists k \in \mathbb{R}$ con $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Teorema: Una sucesión convergente está acotada.

Dem: Supongamos que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$, entonces se cumple que $\forall \varepsilon > 0$ (en particular $\varepsilon = 1$) $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, $|x_n - x| < 1$.

$|x_n - x|$ por tanto por la desigualdad del triángulo, se infiere que si $n \geq N$ entonces $|x_n| < |x| + 1$. Si se hace

$M = \sup(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|, |x|+1)$ entonces se deduce que $|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Operaciones y convergencia

Anteriormente se mostraron las operaciones con sucesiones. Ahora veremos qué pasa con la convergencia de las sucesiones al operarlas.

Teorema: Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones de números reales que convergen a x e y respectivamente, y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces:

1) $\{x_n + y_n\}$ converge a $x + y$

Como hipótesis tenemos que $\{x_n\} \xrightarrow{n\to\infty} x$, entonces $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$ $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$

Igualmente tenemos que $\{y_n\} \xrightarrow{n\to\infty} y$, entonces $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n > N$ $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$

P.D $|(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon$

partiendo de $|(x_n + y_n) - (x+y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq$

D. del triangulo

$\leq |x_n - x| + |y_n - y|$ y por hipotesis tendriamos que

$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\therefore$ $|(x_n + y_n) - (x+y)| < \varepsilon$

ii) $\{x_n - y_n\}$ converge a $x - y$

P.D $|(x_n - y_n) - (x - y)| < \varepsilon$

similarmente $|(x_n - y_n) - (x - y)| = |(x_n - x) - (y_n - y)|$

$\leq |x_n - x| + |y_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

iii) $\{x_n \cdot y_n\}$ = converge a $x \cdot y$

De acuerdo a un teorema anterior tenemos que si $\{x\} \to x$ entonces $\exists m_1 \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq m_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y se hace $m = \sup(m_1, |y|)$.

P.D $|(x_n y_n) - (xy)| < \varepsilon$

$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| = |(x_n y_n - x_n y) + (x_n y - xy)|$

$\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| = |x_n(y_n - y)| + |y(x_n - x)|$

$= |x_n| |y_n - y| + |y| |x_n - x|$ por hipotesis se tendra

$|x_n y_n - xy| \leq m|y_n - y| + m|x_n - x|$.

Dado convergencia de $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ se concluye que si $\varepsilon > 0$ entonces $\exists N, N' \in \mathbb{N}$ tales que $n > N$ $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2m}$ y si $n > N'$ $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2m}$, entonces

$\leq m(|y_n - y| + |x_n - x|) = m\left(\frac{\varepsilon}{2m} + \frac{\varepsilon}{2m}\right) = m\left(\frac{\varepsilon}{m}\right) = \varepsilon$

iv) $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ converge a $\frac{x}{y}$ si $y_n \neq 0$

Basta con demostrar que si $\{z_n\} \to z$ con $z \neq 0$ entonces $\left\{\frac{1}{z_n}\right\} \to \frac{1}{z}$

Por hipótesis tenemos que $\forall \varepsilon > 0$ (en particular $\varepsilon = \frac{|z|}{2}$) $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$ $|z_n - z| < \varepsilon$. De la desigualdad del triángulo se tendrá $-a \leq -|z_n - z| \leq |z_n| - |z|$ para $n > N$
$\Rightarrow -|z_n - z| \leq |z_n| - |z| = -\frac{|z|}{2} \leq |z_n| - |z| = \frac{|z|}{2} \leq |z_n|$
$\Rightarrow \frac{1}{z_n} \leq \frac{2}{|z|}$ por lo que se tiene la estimación

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| = \left|\frac{z - z_n}{z_n z}\right| = \frac{1}{|z_n n|} \cdot |z - z_n| \leq \frac{2}{|z|^2} |z - z_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ahora bien si se da $\varepsilon > 0$ $\exists m \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n > m$ $|z_n - z| \leq \frac{1}{2}\varepsilon |z|^2$ por lo tanto

$$\frac{2}{|z|^2} |z_n - z| = \frac{2}{|z|^2} \left(\frac{\varepsilon |z|^2}{2}\right) = \varepsilon.$$

Para demostrar que $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} \to \frac{x}{y}$ se hace al tomar $\{y_n\}$ como la sucesión $\left(\frac{1}{z_n}\right)$ y usando el hecho de que $\{x_n \cdot z_n\} \Rightarrow x\left(\frac{1}{z}\right) = x/z$

Generalización

Algunos de los resultados de los teoremas se pueden generalizar por inducción y tendremos

i) $\lim (a_n + b_n + \cdots + z_n) = \lim a_n + \lim b_n + \cdots \lim z_n$

ii) $\lim (a_n \cdot b_n \cdot \cdots z_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n \cdots \lim z_n$

iii) $\lim (a_n^k) = (\lim a_n)^k$

<u>Ejercicios</u>

1) Teorema de compresión
Si $\{x_n\}, \{y_n\}$ y $\{z_n\}$ son sucesiones tales que $x_n \leq y_n \leq z_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y que $\lim(x_n) = \lim(z_n)$. Entonces $\{y_n\}$ es convergente y $\lim(x_n) = \lim(y_n) = \lim(z_n)$

Dem. Sea $w = \lim(x_n) = \lim(z_n)$. Si se da que $\varepsilon > 0$ entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n > N$ $|x_n - w| < \varepsilon$ y $|z_n - w| < \varepsilon$. De la hipótesis tenemos que

$x_n \leq y_n \leq z_n \Rightarrow |x_n - x| \leq |y_n - y| \leq |z_n - z|$

$\Rightarrow -\varepsilon \leq |y_n - W| \leq \varepsilon \Rightarrow |y_n - W| \leq |\varepsilon|$ $\therefore$ $\lim(y_n) = W$.

II) La sucesión $a_n = n$ es divergente

Si la sucesión fuera convergente entonces se tendría que $|a_n| < M \Rightarrow |n| \leq M$ con $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n < M$ lo cual es imposible pues $\mathbb{N}$ no es acotado $\therefore$ es divergente.

III) La sucesión $a_n = (-1)^n$ es divergente

La sucesión está acotada por lo tanto no se puede hacer lo mismo que con el problema anterior.
Supongamos que existe $L = \lim(a_n)$ sea $\varepsilon = 1$, de tal modo que existe un número natural N tal que

$|(-1)^n - L| < 1$ $\forall n > N$. Si n es un número impar con $n > N$ se obtiene que $|-1 - L| < 1$, de tal modo que $-2 < L < 0$, por otra parte si n es par se obtiene $|1 - L| < 1$ de modo que $0 < L < 2$, puesto que a no puede satisfacer ambas desigualdades, a_n es divergente.

IV) $\lim\left(\frac{2n+1}{n}\right) = 2$

$\lim\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \lim\left(2 + \frac{1}{n}\right)$ Tomando $\{x_n\} = 2$ y $\{y_n\} = \frac{1}{n}$ con la propiedad $\{x_n\} \to x$ $\{y_n\} \to y \Rightarrow \{x_n + y_n\} \to x + y$ se tendrá que $\lim\left(2 + \frac{1}{n}\right) \to 2 + 0 = 2$

V) $\lim\left(\frac{2n+1}{n+5}\right)$

Puesto que $(2n+1)$ y $(n+5)$ no convergen no se puede usar el teorema directamente pero si factorizamos $\frac{1}{n}$:

$\lim\left(\frac{2n+1}{n+5}\right) = \lim\left(\frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{5}{n}}\right)$ y en este caso $\left(2 + \frac{1}{n}\right)$ converge

y $\left(1 + \frac{5}{n}\right)$ también y en particular $1 + \frac{5}{n} \to 1$ con lo

cual aplicando $\{x_n\} = 2 + \frac{1}{n}$ y $\{y_n\} = 1 + 5n \Rightarrow$

$\lim\left(\frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{5}{n}}\right) = \frac{2}{1} = 2$

Escaneado con CamScanner

VI) $\lim \left(\frac{2n}{n^2+1}\right) = 0$

No se puede aplicar la propiedad pues $(2n)$ y (n^2+1) divergen factorizando $\frac{1}{n}$

$\lim \left(\frac{2n}{n^2+1}\right) = \frac{2}{n+\frac{1}{n}}$ Igualmente no se puede aplicar.

$\lim \left(\frac{2}{n+\frac{1}{n}}\right) = \lim \left(\frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}\right) \Rightarrow \frac{0}{1} = 0$

VII) $\lim \left(\frac{\operatorname{sen}(n)}{n}\right) = 0$

$\operatorname{sen}(n)$ y $\frac{1}{n}$ no convergen pero se puede observar que $-1 \leq \operatorname{sen}(n) \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$ y por el teorema de compresión se tiene que $-\frac{1}{n}$ converge a 0 y $\frac{1}{n}$ converge a 0 $\therefore \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} \to 0$

VIII) Si $\lim x_n = 0$ y $\lim y_n = y \Rightarrow \lim (x_n \cdot y_n) = 0$

Tenemos que $|y_n| < k$ i.a $k \in \mathbb{R}$. Como $x_n \to 0$, entonces $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n \geq N \quad |x_n| < \varepsilon$ en particular para $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{k}$

P.D $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n \geq N \quad |x_n \cdot y_n - 0| < \varepsilon \Rightarrow |x_n \cdot y_n| < \varepsilon$

Tenemos $|x_n \cdot y_n| \leq k|y_n| < k\varepsilon = k\left(\frac{\varepsilon}{k}\right) = \varepsilon$

Sucesiones monotonas

Se han estudiado varias maneras de ver la convergencia de una sucesión. Sin embargo hay muchos casos en los que no hay un prospecto evidente para el limite de una sucesión. El método que se presentara es de un alcance un tanto restringido pero su aplicación es bastante util. Se aplica a sucesiones que son monotonas en el sentido siguiente.

Def.- Sea $\{x_n\}$ una sucesión. Se dice que x_n es creciente si satisface la desigualdad $x_{n+1} >$ \ y No decreciente si $x_{n+1} \geq x_n$

Def.- Se dice que $\{x_n\}$ es Decreciente, se cumple la desigualdad $x_{n+1} < x_n$ y No creciente si $x_{n+1} \leq x_n$

Def.- Se dice que una sucesión es monotona si es creciente o bien, decreciente

Teorema de convergencia monotona

Una sucesión monotona es convergente si y solo si está acotada, además:

a) si $\{x_n\}$ es una sucesión creciente acotada, entonces $\lim(x_n) = \sup\{x_n\}$

b) si $\{y_n\}$ es una sucesion decreciente acotada, entonces $\lim(y_n) = \inf\{y_n\}$

Anteriormente se vio que una sucesion convergente debe ser acotada.

a) Se trata primero el caso en que $\{x_n\}$ es una sucesión creciente y acotada. Por hipotesis hay un numero real M tal que $x_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$. De acuerdo con el axioma del supremo $\exists x'$ t.q. $x' = \sup\{x_n\}$;

P.D $x' = \lim(x_n)$

Si se da $\varepsilon > 0$, entonces $x' - \varepsilon$ no es cota superior de $\{x_n\}$, por lo tanto hay un numero natural N tal que

$x' - \varepsilon \leq N$ pero como $\{x_n\}$ es una sucesión creciente se tendrá $x' - \varepsilon \leq x_N \leq x_n \leq x'$ como x' es el supremo, $x' + \varepsilon$ será una cota superior tal que $x' + \varepsilon \geq x'$ de forma que $x' - \varepsilon \leq x_N \leq x_n \leq x' \leq x' + \varepsilon$, por transitividad $x' - \varepsilon \leq x_n \leq x' + \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon \leq x_n - x' \leq \varepsilon \Rightarrow |x_n - x'| < \varepsilon$ con lo que $\lim (x_n) = x'$

b) Si $\{y_n\}$ es una sucesión decreciente acotada, entonces es evidente que $x_n = -y_n$ es una sucesión creciente acotada entonces $\lim (x_n) = \sup \{y_n\}$, por una parte $\lim (x_n) = -\lim (y_n)$ y por otra parte, por propiedades del supremo $\sup (-y_n) = -\inf (y_n)$ por lo tanto $\lim (y_n) = -\lim (x_n) = \inf (y_n)$

Subsucesiones y el teorema de Bolzano-Weierstrass

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de numeros reales y sea $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$ una sucesión estrictamente creciente de numeros naturales entonces la sucesión $\{x'_n\}$ esta dada por $\{x'_n\} = (x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3}, \dots, x_{r_n}, \dots)$ se llama subsucesión de $\{x_n\}$

Por ejemplo las sucesiones siguientes son subsucesiones de $\{x_n\} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots)$

$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n+2}, \dots\right)$ $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{2n-1}, \dots\right)$

$\left(\frac{1}{2!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{6!}, \dots, \frac{1}{(2n)!}, \dots\right)$

Las siguientes no son subsucesiones

$\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \dots\right)$ $\left(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \dots\right)$

Teorema.- Si una sucesión $\{x_n\}$ converge a un numero real x; entonces cualquier subsucesión de $\{x_n\}$ tambien converge a x.

Dem: Sea $\varepsilon > 0$ y sea N tal que $n \geq N$, entonces $|x_n - x| < \varepsilon$. Puesto que $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$ es una sucesión creciente de numeros naturales, es facil demostrar (por inducción) que $r_n \geq n$. Por tanto si $n \geq N$ se tiene tambien $r_n \geq n \geq N$ de tal modo que $|x_{r_n} - x| < \varepsilon$. Por lo tanto la subsucesión tambien converge a x

El uso de subsucesiones facilita la presentación de un criterio para la divergencia de una sucesión

Criterio de divergencia

Sea $\{x_n\}$ una sucesión. Entonces los sig enunciados son equivalentes.

I) La sucesión $\{x_n\}$ no converge a una $x \in \mathbb{R}$

II) $\exists \varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists r_k \in \mathbb{N}$ tal que $r_k \geq k$ y $|x_r - x| \geq \varepsilon_0$

III) $\exists \varepsilon_0 > 0$ y una subsucesión $\{x_{r_n}\}$ de x_n tal que $|x_{r_n} - x| \geq \varepsilon_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Dem.-

I $\Rightarrow$ II Si $\{x_n\}$ no converge a x, entonces para alguna $\varepsilon_0 > 0$ es imposible encontrar un número natural N tal que el criterio de convergencia sea válido. Es decir para cualquier $N \in \mathbb{N}$ no se cumple que $\forall n > N$ la desigualdad $|x_n - x| < \varepsilon_0$ es válida. En otras palabras, para cualquier $N \in \mathbb{N}$ existe un número natural $r_k \geq N$ tal que $|x_{r_N} - x| \geq \varepsilon_0$

II $\Rightarrow$ III Sea $\varepsilon_0 > 0$ como en el inciso II y sea $r_1 \in \mathbb{N}$ tal que $r_1 \geq 1$ y $|x_{r_1} - x| \geq \varepsilon_0$. Ahora sea $r_2 \in \mathbb{N}$ tal que $r_2 > r_1$ y $|x_{r_2} - x| \geq \varepsilon_0$ y de manera continua, obteniendo así la subsucesión $\{x'_n\} = x_{r_n}$ de x_n tal que $|x_{r_n} - x| \geq \varepsilon_0$

III $\Rightarrow$ I Supongase que $\{x_n\}$ tiene una subsucesión $\{x_{r_n}\}$ que satisface la condición del inciso III, entonces x_n no converge a x. Si lo hiciera, entonces la subsucesión x_{r_n} también convergería a x, pero esto es imposible ya que ninguno de los términos de x_{r_n} pertenece a la vecindad ε_0 de x

I) La sucesión $a_n = (-1)^n$ es divergente

Si la sucesión $a_n = (-1)^n$ convergiera a un número x, entonces toda subsucesión de a_n debería converger a x. Si tomamos la subsucesión $a'_n = \{1, 1, 1, \dots\}$ esta converge a 1, pero si tomamos la subsucesión $a''_n = \{-1, -1, -1, \dots\}$ esta converge a -1, y x no puede ser 1 y -1 a la vez ∴ la sucesión diverge

II) La sucesión $x_n = \{1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots\}$ es divergente.

Esta sucesión se puede definir por $\{y_n\}$ donde $\{y_n\} = n$ si n es impar y $\{y_n\} = \frac{1}{n}$ si n es par, primeramente se puede observar que esta sucesión no esta acotada por tanto no puede ser convergente. De otra manera se observa que si la sucesión convergiera a un número x, se tendría que cuando n es impar la subsucesión no converge, con esto sería más que claro que la sucesión no converge, pero también se puede observar cuando n es par, converge a 0 y la sucesión no puede converger y diverger al mismo tiempo ∴ es divergente.

Existencia de subsucesiones monotonas

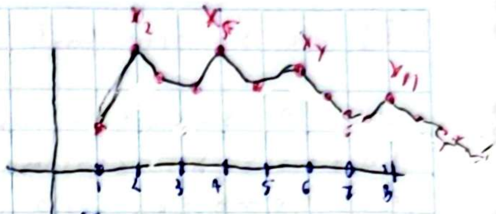
Si bien no toda sucesión es monotona, se demostrara que toda sucesión tiene una subsucesión monotona.

Teorema de la subsucesión monotona.

Si $\{x_n\}$ es una sucesión, entonces existe una subsucesion de x_n que es monotona.

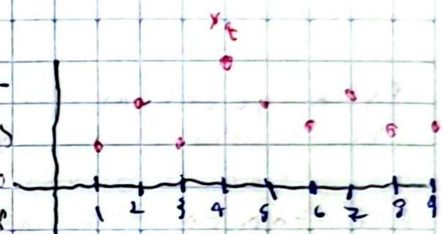
Dem: Para los fines de la demostración se dira que un m-esimo termino de x_m es un "pico" si $x_m \geq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ (es decir x_m nunca es exedido por ningun termino que lo precede). Se consideran dos casos dependiendo de si x_n tiene un numero infinito o finito de picos.

Caso 1: x_n tiene un número infinito de picos en este caso, los picos se ordenan mediante subíndices crecientes, por tanto se tienen los picos $x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \dots x_{m_k} \dots$ donde $m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_k < \dots$ puesto que cada uno de los términos es un pico se tiene $x_{m_1} \geq x_{m_2} \geq x_{m_3} \geq \dots \geq x_{m_k} \geq \dots$
∴ la subsucesión (x_{m_k}) de picos es una subsucesión decreciente de X



$x_2, x_5, x_4, x_{11}, \dots$ son picos

Caso 2: x_n tiene un número finito de picos (posiblemente cero). Sean estos picos $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots x_{m_r}$. Sea $s_1 = m_r + 1$ el primer índice después del último pico, puesto que x_{s_1} no es un pico existe $s_2 > s_1$ tal que $x_{s_1} < x_{s_2}$, puesto que x_{s_2} no es un pico existe $s_3 > s_2$ tal que $x_{s_2} < x_{s_3}$. Si se continúa de esta manera, se obtiene una subsucesión creciente x_{s_n} de X



x_t es el único pico

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Una sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

Dem= Del teorema de subsucesión monótona se sigue que $\{x_n\}$ es una sucesión acotada entonces tiene una subsucesión $\{x_{r_n}\}$ que es monótona. Puesto que esta subsucesión está acotada y es monótona, por el teorema de convergencia monótona, se deduce que la subsucesión es convergente.

Criterio de Cauchy

El teorema de convergencia monótona es de extraordinaria utilidad e importancia, pero tiene la desventaja significativa de que solo se aplica a sucesiones que son monótonas.
Es importante contar con una condición que implique la convergencia de una sucesión que no requiera saber el valor del límite y que no se restrinja a sucesiones monótonas y es aquí donde el criterio de Cauchy entra.

Def.- Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m,n > N$ se tiene $|x_n - x_m| < \varepsilon$

Lema: Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente, entonces x_n es una sucesión de Cauchy

Dem: Si $x = \lim(x_n)$, entonces, por definición de convergencia $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ (en particular $N = \frac{\varepsilon}{2}$) tal que $\forall n > N$ $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ por tanto si $N' = N$ y si $n, m \geq N'$ entonces se tiene

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Lema: Una sucesión de Cauchy está acotada

Dem.- Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy y sea $\varepsilon = 1$. Si $N' = N$ y $n > N$, entonces $|x_n - x_N| \leq 1$ por tanto, por desigualdad de triangulo se tiene que $|x_n| \leq |x_N| + 1$ para $n > N$. Si se hace

$M = \sup(|x_1|, |x_2|, \ldots |x_{N-1}|, |x_N| + 1)$ entonces se sigue que $|x_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Criterio de convergencia de Cauchy

Una sucesión $\{x_n\}$ es convergente si y solo si es una sucesión de Cauchy

Ejemplos

1) $a_n = \frac{1}{n}$ es de Cauchy

P.D $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q $\forall m,n \geq N$ $|x_n - x_m| < \varepsilon$

$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$ Si se da $\varepsilon > 0$, entonces hay un numero natural N tal que $N = \frac{2}{\varepsilon}$. Por tanto si $m, n > N$ entonces se tiene $\frac{1}{n} < \frac{1}{N}$ y $\frac{1}{m} < \frac{1}{N} \Rightarrow$

$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N}$ y con $N = \frac{2}{\varepsilon}$ $\frac{2}{N} = \frac{2}{\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} = \varepsilon$

ii) $a_n = \frac{n}{n+1}$ es de Cauchy

P.D $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n, m > N$ $|a_n - a_m| < \varepsilon$ con $N = \frac{2}{\varepsilon}$

$$\left|\frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1}\right| = \left|\frac{n(m+1) - m(n+1)}{(n+1)(m+1)}\right| = \left|\frac{n-m}{(n+1)(m+1)}\right| = \left|\frac{n-m+1-1}{(n+1)(m+1)}\right|$$

$$= \left|\frac{(n+1) - (m+1)}{(n+1)(m+1)}\right| = \left|\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1}\right| \leq \left|\frac{1}{m+1}\right| + \left|\frac{1}{n+1}\right| < \frac{1}{N} + \frac{1}{N}$$

si $m > N \Rightarrow m+1 > N \Rightarrow \frac{1}{m+1} < \frac{1}{N}$ tambien $n > N \Rightarrow n+1 > N$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N}$, $\frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} = \varepsilon$

Sucesiones propiamente divergentes.

"Desigualdad de Bernoulli"

$(1+h)^n \geq 1 + nh$ para $h \geq -1$

ó

$(1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2 \geq \frac{n(n-1)}{2} h^2$ para $h \geq 0$

$\lim (a_n - a_{n+1}) = 0$ ó $\lim (a_{n+1} - a_n) = 0$

~~Si $\{x_n\}$ una sucesión que converge a x y $\{x_n\} \geq 0$. Entonces la sucesión $\sqrt{x_n}$ converge a $\sqrt{x}$~~

~~Caso 1~~

~~$x = 0$ si $x = 0$, sea $\varepsilon > 0$ dado puesto que $x_n \to 0$, existe un numero natural K tal que si $n \geq K$ entonces $0 \leq x_n = x_n - 0 < \varepsilon^2 \therefore 0 \leq \sqrt{x_n} < \varepsilon$ para $n \geq K$~~

$n > N$

Desigualdad

$0 < a < b$

$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$

$n < \sqrt{nN} < \frac{n+N}{2} < N$

$n! \geq 2^{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

donde $n > m$

$\frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}$

Escaneado con CamScanner

Formas de demostrar que una sucesión converge

a) A un límite dado

i) Definición - si a_n converge a L, entonces $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

ii) Supremo - si a_n es creciente y converge a L entonces $L = \sup(a_n)$ ó si a_n es decreciente y converge a L' entonces $L' = \inf(a_n)$

b) Que la sucesión converge y después hallar el límite

i) Separar y propiedades
Separar la sucesión en otras sucesiones donde se conozca el límite mediante, si $a_n \to x$ $b_n \to y \Rightarrow a_n + b_n \to x+y$, $a_n - b_n \to x - y$, $a_n \cdot b_n \to x \cdot y$, $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{x}{y}$, $|a_n| \to |x|$, $\sqrt{a_n} \to \sqrt{x}$ etc.

ii) Teorema de compresión
Si $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ y z_n son sucesiones tales que $x_n \leq y_n \leq z_n$ y que $\lim(x_n) = \lim(z_n) \Rightarrow y_n$ es convergente y $\lim(x_n) = \lim(y_n) = \lim(z_n)$ o en general si x_n y z_n convergen y_n converge

iii) Algunas propiedades

$\lim(x_n) = \lim(x_{n+1})$, $\lim(x_n - x_{n+1}) = 0$

Si a_n es acotada y $b_n \to 0 \Rightarrow a_n \cdot b_n \to 0$

iv) Teorema de convergencia monótona
Si es creciente y acotada superior entonces converge, ($\lim(x_n) = \sup$

Si es decreciente y acotada inferiormente entonces converge ($\lim(x_n) = \inf(x_n)$)

v) Criterio de Cauchy

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$

Escaneado con CamScanner

Formas de demostrar que una sucesión diverge

I) Definición
Demostrando que no cumple la definición de convergencia

II) No acotada
suponer que converge y demostrar que no está acotada

III) Convergencia monótona

suponer que converge y sabiendo si es creciente o decreciente demostrar que no está acotada superior o inferiormente

IV) Subsucesiones

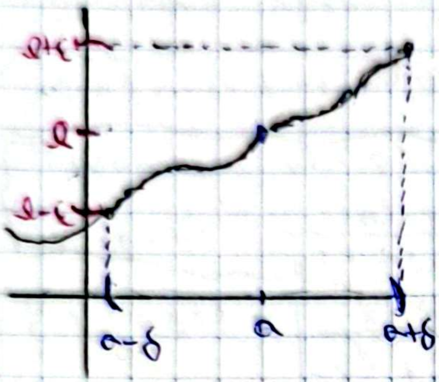
Demostrar que existen X'_n y X''_n subsucesiones de X_n tales que convergen a valores distintos

V) Acotamiento

Sea a_n y b_n sucesiones tales que $a_n \leq b_n$
si b_n diverge entonces a_n diverge

Limites

Def: Decimos que una función tiene límite en "a" si $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$



$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

Teorema:

El límite de una función es único

Dem: Supongamos que $\lim_{x \to a} f(x) = m$ y $\lim_{x \to a} f(x) = n$

P.D $m = n$

Si la hipótesis se cumple tendremos que

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_1 > 0$ t.q si $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - m| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_2 > 0$ t.q si $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - n| < \varepsilon$

Sumando las expresiones

$|f(x) - m| + |f(x) - n| < 2\varepsilon$

Como se cumple $\forall \varepsilon > 0$, en particular se cumplirá para $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}$

$|f(x) - m| + |f(x) - n| < \varepsilon_0$

Además se tiene que $|f(x) - n| = |n - f(x)|$

$|f(x) - m| + |n - f(x)| \Rightarrow$ por la desigualdad del triángulo tendremos

$|f(x) - m + n - f(x)| \leq |f(x) - m| + |n - f(x)| < \varepsilon_0 \Rightarrow$

$|-m + n| < \varepsilon_0 \Rightarrow$ Como se cumple $\forall \varepsilon_0 > 0$ se tendrá que
$|-m + n| = 0 \Leftrightarrow |n| - |m| \leq |n - m| < \varepsilon_0 \Rightarrow |n| \geq |m| \Rightarrow m = n$ ✓

Escaneado con CamScanner

Ejercicios

I) Sea $f(x)=b$, $\lim_{x\to c} f(x)=b$

P.D $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ t.q si $0<|x-c|<\delta \Rightarrow |b-b|<\varepsilon$

Queremos que $|b-b|<\varepsilon \Rightarrow |0|<\varepsilon$

Teniendo $0<|x-c|<\delta \Rightarrow 0<\delta$ $\therefore$ $\delta=\varepsilon$

Sea $\varepsilon>0$ y $\delta=\varepsilon$

Por hipótesis $0<|x-c|<\delta \Rightarrow 0<\delta \Rightarrow |0|<\delta \Rightarrow |b-b|<\delta$

Como $\delta=\varepsilon \Rightarrow |b-b|<\varepsilon$ ///

II) $\lim_{x\to c} x = c$

P.D $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ t.q si $0<|x-c|<\delta \Rightarrow |x-c|<\varepsilon$

Sea $\varepsilon>0$ y $\delta=\varepsilon$

Por hipótesis $0<|x-c|<\delta$ como $\delta=\varepsilon \Rightarrow |x-c|<\varepsilon$ ///

III) $\lim_{x\to 2} (3x-5)=1$

P.D $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ t.q si $0<|x-2|<\delta \Rightarrow |(3x-5)-1|<\varepsilon$

Queremos que $|3x-6|<\varepsilon$

Tenemos que $0<|x-2|<\delta \Rightarrow 0<|3x-6|<3\delta=\varepsilon$ $\therefore$ $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$

Sea $\varepsilon>0$ y $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$

Por hipótesis $0<|x-2|<\delta \Rightarrow 0<|3x-6|<3\delta$ como $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$

$|3x-6|<\varepsilon \Rightarrow |(3x-5)-1|<\varepsilon$ //

Norma

iv) $\lim_{x\to 8} (\sqrt[3]{x} - 2) = 0$

P.D $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ t.q si $0<|x-8|<\delta \Rightarrow |\sqrt[3]{x}-2|<\varepsilon$

Sabemos que $|x-8|<\delta$ y queremos $|x^{\frac13}-8^{\frac13}|<\varepsilon$

Tenemos $x^{\frac13}-8^{\frac13}$ y recordando $(a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\Rightarrow (a-b) = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

$|x^{\frac13}-8^{\frac13}| = \left|\frac{x-8}{x^{\frac23}+8^{\frac13}x^{\frac13}+8^{\frac23}}\right| = \left|\frac{x-8}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}\right| = \left|\frac{x-8}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+1+3}\right|$

$= \left|\frac{x-8}{(\sqrt[3]{x}+1)^2+3}\right| < \left|\frac{\delta}{(\sqrt[3]{x}+1)^2+3}\right|$

Tenemos que $0\le(\sqrt[3]{x}+1)^2 \Rightarrow 3\le(\sqrt[3]{x}+1)^2+3 \Rightarrow \frac13 \ge \frac{1}{(\sqrt[3]{x}+1)^2+3}$

$\left|\frac{\delta}{(\sqrt[3]{x}+1)^2+3}\right| < \frac{\delta}{3} = \varepsilon$ si $\delta = 3\varepsilon$

Sea $\varepsilon>0$ y $\delta = 3\varepsilon$

Por hipotesis $|x-8|<\delta$ y tenemos que $0\le(\sqrt[3]{x}+1)^2 \Rightarrow 3\le(\sqrt[3]{x}+1)^2+3$

$\Rightarrow \frac13 \ge \frac{1}{(\sqrt[3]{x}+1)^2+3} \Rightarrow$

$\left|\frac{x-8}{(\sqrt[3]{x}+1)^2+3}\right| < \frac{\delta}{3} \Rightarrow \left|\frac{x-8}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}\right| < \frac{\delta}{3} \Rightarrow |x^{\frac13}-8^{\frac13}| < \frac{\delta}{3}$

$\Rightarrow |\sqrt[3]{x}-2| < \frac{\delta}{3} \Rightarrow |(\sqrt[3]{x}-2)-0| < \frac{\delta}{3}$ como $\delta = 3\varepsilon$ $|(\sqrt[3]{x}-2)-0| < \varepsilon$

v) $\lim_{x\to 5}(x^2) = 25$

P.D: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ t.q si $0<|x-5|<\delta \Rightarrow |x^2-25|<\varepsilon$

1) Buscamos δ adecuado

Se tiene que $|f(x)-L| = |x^2-25| = |(x+5)(x-5)| = |x+5||x-5| \le |x+5|\delta$

Tenemos $|x-5|<\delta$ y asumamos $\delta_1 = 1 \Rightarrow |x-5|<1$

$-1 < x-5 < 1 \Rightarrow 4 < x < 6 \Rightarrow$ [illegible] $< x+2 <$ [illegible] $\Rightarrow |x+2| <$ [illegible] 11

lo que implica que $|x+5|\delta < 11\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{11}$

Tenemos que para $\delta = 1$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{11}$ se cumplirá lo pedido, pero para asegurar se tomará el mínimo

$\therefore \delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{11})$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{11})$

por hipótesis $0 < |x-5| < \delta \Rightarrow |x-5| < \min(1, \frac{\varepsilon}{11})$

$\Rightarrow |x-5| \leq 1$ y $|x-5| < \frac{\varepsilon}{11} \Rightarrow -1 < x-5 < 1$ y $|x-5| < \frac{\varepsilon}{11}$

$\Rightarrow |x+5| < 11$ y $|x-5| < \frac{\varepsilon}{11} \Rightarrow |x+5||x-5| < \varepsilon \Rightarrow |x^2-25| < \varepsilon$ //

v) $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

P.D sea $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.q si $0 < |x-0| < \delta \Rightarrow ||x|-0| < \varepsilon$

Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \varepsilon$

Tenemos que $||x|-0| = ||x|| = |x|$ y por hipótesis $|x| < \delta$

$\Rightarrow |x| < \delta$ como $\delta = \varepsilon \Rightarrow |x| < \varepsilon$ //

vi) $\lim_{x \to 0} (x \sin(\frac{1}{x})) = 0$

P.D $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.q si $0 < |x| < \delta \Rightarrow |x\sin(\frac{1}{x})| < \varepsilon$

I) Encontremos la δ adecuada

Sabemos que $|\sin(\frac{1}{x})| \leq 1$ y como $|x| \geq 0 \Rightarrow |x||\sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$
y como $|x| < \delta \Rightarrow |x\sin(\frac{1}{x})| < \delta = \varepsilon$

II) Demostración
Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \varepsilon$

Tendremos que $|\sin(\frac{1}{x})| \leq 1 \Rightarrow |x\sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$ y por hipótesis
$|x\sin(\frac{1}{x})| < \delta \Rightarrow |x\sin(\frac{1}{x}) - 0| < \varepsilon$ //

vii) $\lim_{x \to c} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{c}$ con $c > 0$ y $x > 0$

P.D. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q si $0 < |x-c| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| < \varepsilon$

I) Encontramos un δ

Tenemos $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = \left|\frac{c-x}{xc}\right| = \frac{|c-x|}{|xc|} = \frac{|x-c|}{|xc|}$ como $x, c > 0$

$= \frac{1}{x} \cdot \frac{|x-c|}{c}$ y como $|x-c| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \frac{|x-c|}{c} < \frac{1}{x} \cdot \frac{\delta}{c}$

Tenemos $|x-c| < \delta$ supongamos $\delta = \frac{c}{2}$

$|x-c| < \frac{c}{2} \Rightarrow -\frac{c}{2} < x - c < \frac{c}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}c < x < \frac{3}{2}c \Rightarrow \frac{2}{c} > \frac{1}{x} > \frac{2}{3c}$

Como $c > 0 \Rightarrow \frac{1}{|x|} < \frac{2}{c} \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \frac{\delta}{c} < \frac{2}{c} \cdot \frac{\delta}{c} = \frac{2\delta}{c^2} = \varepsilon$

Como $\varepsilon = \frac{2\delta}{c^2} \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon c^2}{2}$

Tenemos que para $\delta = \frac{c}{2}$ y $\delta = \frac{\varepsilon c^2}{2}$ se cumple lo pedido, para asegurar se toma $\delta = \min\left(\frac{c}{2}, \frac{\varepsilon c^2}{2}\right)$

II) Demostración

Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \min\left(\frac{c}{2}, \frac{\varepsilon c^2}{2}\right)$

por hipótesis $0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |x-c| < \min\left(\frac{c}{2}, \frac{\varepsilon c^2}{2}\right) \Rightarrow$

$|x-c| < \frac{c}{2}$ y $|x-c| < \frac{\varepsilon c^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{2}{c}$ y $|x-c| < \frac{\varepsilon c^2}{2}$

Teniendo $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = \frac{|x-c|}{|xc|} = \frac{1}{x} \cdot \frac{|x-c|}{c}$ como $\frac{1}{x} < \frac{2}{c}$

$\frac{1}{x} \cdot \frac{|x-c|}{c} < \frac{2}{c} \cdot \frac{|x-c|}{c} = \frac{2|x-c|}{c^2}$ y como $|x-c| < \frac{\varepsilon c^2}{2}$

$\frac{2|x-c|}{c^2} < \frac{2 \cdot \frac{\varepsilon c^2}{2}}{c^2} = \varepsilon$ //

Operaciones con sucesiones

Lemas

i) Si $|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{2}$ y $|y-y_0|<\frac{\varepsilon}{2}$ $\Rightarrow$ $|(x+y)-(x_0+y_0)|<\varepsilon$

$|x-x_0|+|y-y_0|=\varepsilon$

$|(x-x_0)+(y-y_0)|\le|x-x_0|+|y-y_0|=\varepsilon$

$|(x-x_0)+(y-y_0)|=|(x+y)-(x_0+y_0)|=\varepsilon$

ii) Si $|x-x_0|<\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}\right\}$ y $|y-y_0|<\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}$

$\Rightarrow$ $|xy-x_0y_0|<\varepsilon$

$|xy-x_0y_0|=|xy-xy_0+xy_0-x_0y_0|=|y_0(x-x_0)+x(y-y_0)|$

$\le|y_0(x-x_0)|+|x(y-y_0)|=|y_0||x-x_0|+|x||x-x_0|$

$<|y_0|\cdot\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}\right\}+|x|\cdot\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}$

Tendremos que $|x-x_0|<\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}\right\}\le1$

$\Rightarrow$ $|x|-|x_0|\le|x-x_0|<1$ $\Rightarrow$ $|x|-|x_0|<1$ $\Rightarrow$ $|x|<1+|x_0|$

y como $|y_0|<|y_0|+1$ $\Rightarrow$ $\frac{|y_0|}{|y_0|+1}<1$

$\Rightarrow$ $|y_0|\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}\right\}+|x|\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}=|y_0|\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}+|x|\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}$

$<\frac{|y_0|}{|y_0|+1}\cdot\frac{\varepsilon}{2}+(|x_0|+1)\cdot\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

iii) Si $y_0\neq0$ y $|y-y_0|<\min\left\{\frac{|y_0|}{2},\frac{\varepsilon|y_0|^2}{2}\right\}$ $\Rightarrow$ $y\neq0$ y

$\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right|<\varepsilon$

$|y_0|-|y|\le|y_0-y|=|y-y_0|<\min\left\{\frac{|y_0|}{2},\frac{\varepsilon|y_0|^2}{2}\right\}\le\frac{|y_0|}{2}$

$|y_0|-|y|<\frac{|y_0|}{2}$ $\Rightarrow$ $|y|>|y_0|-\frac{|y_0|}{2}$ $\Rightarrow$ $|y|>\frac{|y_0|}{2}$ como $|y_0|>0$

$\Rightarrow$ $\frac{|y_0|}{2}>0$ $\Rightarrow$ $|y|\ge\frac{|y_0|}{2}>0$ $\Rightarrow$ $|y|>0$ $\Rightarrow$ $y\neq0$

$$\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right| = \left|\frac{y-y_0}{y y_0}\right| = \frac{|y-y_0|}{|y\, y_0|} < \frac{\min\left\{\frac{|y_0|}{2}, \frac{\varepsilon |y_0|^2}{2}\right\}}{|y\, y_0|}$$

$$\frac{\varepsilon |y_0|^2}{2|y||y_0|} = \frac{\varepsilon |y_0|}{2|y|} \quad \text{como } |y| < \frac{|y_0|}{2} \Rightarrow \frac{\varepsilon|y_0|}{2|y|} < \frac{\varepsilon |y_0|}{2\left(\frac{|y_0|}{2}\right)} \leq \varepsilon$$

Teoremas

Si $\lim_{x\to a} f(x) = n$ y $\lim_{x\to a} g(x) = m$ entonces

i) $\lim_{x\to a} (f+g)(x) = n+m$

P.D $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$ t.q si $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |(f+g)(x)-(n+m)|<\varepsilon$

$|(f+g)(x)-(m+n)| = |f(x)+g(x)-m-n| \leq |f(x)-n| + |g(x)-m|$ y quiero que sea menor a ε, para hallarlo se acota con $\frac{\varepsilon}{2}$

por hipotesis $|f(x)-n|<\varepsilon$ y $|g(x)-m|<\varepsilon$ como se cumple $\forall \varepsilon>0$ en particular se cumplira para $\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$|f(x)-n| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|g(x)-m| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x)-n| + |g(x)-m| < \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)-n+g(x)-m| \leq |f(x)-n| + |g(x)-m| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(x)+g(x)-(m+n)|<\varepsilon$

que se cumple con $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

ii) $\lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = n\cdot m$

P.D $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ t.q si $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)g(x) - n\cdot m| < \varepsilon$

$|f(x)g(x) - mn| = |f(x)g(x) - ng(x) + ng(x) - nm| = |g(x)(f(x)-n) + n(g(x)-m)|$

$\leq |g(x)||f(x)-n| + |n||g(x)-m|$

Tenemos que $|n||g(x)-m| < |n+1||g(x)-m|$ y quiero que sea $<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow |n+1||g(x)-m| \leq (|n|+1)|g(x)-m| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |g(x)-m| < \frac{\varepsilon}{2(|n|+1)}$

Ahora si tomamos $|g(x)-m|<1 \Rightarrow |g(x)| \leq |m|+1$

Entonces $|g(x)||f(x)-n| + |n||g(x)-m| < (|m|+1)|f(x)-n| + |n|\frac{\varepsilon}{2(|n|+1)}$

Y si tomamos $|f(x)-n| < \frac{\varepsilon}{2(|m|+1)} \Rightarrow$

$< (|m|+1)\frac{\varepsilon}{2(|m|+1)} + (|n|+1)\frac{\varepsilon}{2(|n|+1)} = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Que se cumple con $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$

iii) Si $m \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$

Otras propiedades y teoremas

Sea $\lim_{x\to a} f(x) = m$ y $\lim_{x\to a} g(x) = n$, $c \in \mathbb{R}$

i) $\lim_{x\to a} c\, f(x) = cm$

Por propiedades $g(x) = c$ y $f(x) = f$ $\lim_{x\to a} c \cdot f(x) = \lim_{x\to a} c \cdot \lim_{x\to a} f(x)$

$\Rightarrow \lim_{x\to a} c = c$ y $\lim_{x\to a} f(x) = m \Rightarrow cm$

ii) $\lim_{x\to a} -f(x) = -m$

De la misma manera $g(x) = -1$ y $f(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} (-1) \cdot f(x) = \lim_{x\to a} (-1) \cdot \lim_{x\to a} f(x)$

$\Rightarrow \lim_{x\to a} (-1) = -1$ y $\lim_{x\to a} f(x) = m \Rightarrow -m$

iii) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} (x^2 + \operatorname{sen}(x) + \sec(x)) =$

$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} x^2 + \operatorname{sen}(x) + \sec(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} x^2 + \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}(x) + \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \sec(x)$

$\Rightarrow \frac{\pi^2}{9} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2$

Teoremas

i) Sea $\lim_{x\to c} f_k = L_k$ para $n \in \mathbb{N}$, se tendrá entonces que

$\lim_{x\to c} (f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n) = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n$

Por inducción sobre n

1) B.I

Para $n=1$ $\lim_{x\to c} (f_1) = L_1$ por hipótesis

2) H.I

Supongamos que se cumple para $n=k$ $\lim_{x\to c} (f_1 + f_2 + \dots + f_k) = L_1 + L_2 + \dots L_k$

b) P. I

P.D: $\lim_{x\to c} f_1+f_2+\cdots+f_k+f_{k+1} = L_1+L_2+\cdots+L_k+L_{k+1}$

Tenemos $\lim_{x\to c}(f_1+f_2+\cdots+f_k+f_{k+1})$, que por propiedades sera igual a

$\underbrace{\lim_{x\to c}(f_1+f_2+\cdots f_k)}_{H.I} + \lim_{x\to c} f_{k+1} = L_1+L_2+\cancel{L_3}+\cdots+L_k + \lim_{x\to c} f_{k+1} =$

$L_1+L_2+L_3+\cdots+L_k+L_{k+1}$

II) De la misma forma $\lim_{x\to c}(f_1\cdot f_2\cdot\cdots f_n) = L_1\cdot L_2\cdot L_3\cdots L_n$

III) Como consecuencia se tendra que $\lim_{x\to c}(f(x))^n = L^n$

IV) Si P es una funcion polinomica, entonces $\lim_{x\to c} P(x) = P(a)$

Sea $P(x)$ una función polinomica, entonces se tendra

$$\lim_{x\to c} P(x) = \lim_{x\to c}\left[a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0\right]$$

$$= \lim_{x\to c}(a_n x^n) + \lim_{x\to c}(a_{n-1}x^{n-1})+\cdots+\lim_{x\to c}(a_1 x) + \lim_{x\to c}(a_0)$$

$$= a_n\left[\lim_{x\to c}(x)\right]^n + a_{n-1}\left[\lim_{x\to c}(x)\right]^{n-1}+\cdots+a_1\left[\lim_{x\to c}(x)\right] + \lim_{x\to c}(a_0)$$

$$= a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1}+\cdots+a_1 c + a_0$$

$$= P(c)$$

V) Si P y q son funciones polinomicas y $q(c)\neq 0$ entonces

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{q(x)} = \frac{P(c)}{q(c)}$$

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x\to c}(P(x))}{\lim_{x\to c} q(x)} = \frac{P(c)}{q(c)}$$

vi) Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $a \leq f(x) \leq b$ $\forall x$ $\Rightarrow$ $a \leq \lim_{x \to c} f(x) \leq b$

vii) Teorema de compresión

Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ entonces

$\lim_{x \to a} g(x) = L$

P.D $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.q si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon_1$ y

$\lim_{x \to a} h(x) = L \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon_2$

Como se cumple $\forall \varepsilon$, en particular se cumplirá para $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ $\quad |h(x) - L| < \varepsilon$

$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$ $\quad -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon$

$-\varepsilon + L < f(x) < \varepsilon + L$ $\quad -\varepsilon + L < h(x) < \varepsilon + L$

Como $f(x) \leq h(x)$ $\quad -\varepsilon + L < f(x) < h(x) < \varepsilon + L$ y como

$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \Rightarrow -\varepsilon + L < f(x) < g(x) < h(x) < \varepsilon + L$

$\Rightarrow -\varepsilon + L < g(x) < \varepsilon + L \Rightarrow -\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$

con $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

viii) Si g es acotada y $\lim_{x \to a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) \cdot f(x) = 0$

Dem: Tendremos como g es acotada que $0 \leq |g(x)| \leq K$ para $K \in \mathbb{R}$ $\forall x \in Dom(g)$ además por hipótesis

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.q si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ entonces

$0 \leq |g(x)||f(x)| < K|f(x)|$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ también $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$

$$\lim_{x\to a} (0) \leq \lim_{x\to a} |g(x)||f(x)| \leq \lim_{x\to a} K|f(x)|$$

$$0 \leq \lim_{x\to a} g(x)\cdot f(x) \leq K \lim |f(x)|$$

$$0 \leq \lim_{x\to a} g(x)\cdot f(x) \leq K\cdot 0 = 0$$ y por el teorema de compresión

$$\lim_{x\to a} g(x) f(x) = 0$$

★ x) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$

Sea $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{h\to 0} f(a+h) = m$

P.D. $l = m$

Sea $\varepsilon > 0$, sabemos que $\exists \delta > 0$ t.q si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$
$|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$

Tomemos $|l-m| = |l - f(x) + f(x) - m| \leq |l - f(x)| + |f(x) - m|$

$= |f(x) - l| + |f(x) - m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |f(x) - m|$

Por hipótesis

para $\frac{\varepsilon}{2}$ $\exists \delta_1 > 0$ t.q si $0 < |h - 0| < \delta \Rightarrow |f(a+h) - m| < \frac{\varepsilon}{2}$

entonces sea $x \neq a$ $0 < |x-a| < \delta$ y $0 < |x-a| < \delta_1$
con $h = x - a$

$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} + |f(x) - m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |f(h+a) - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

con $h = x-a$ y $\delta = \min(\delta, \delta_1)$

$\therefore$ $|l-m| < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ $\Rightarrow$ $|l-m| = 0$ $\Leftrightarrow$ $l = m$

Cambio de variable para límites

Si tenemos $\lim_{x \to a} f(x)$, sea $v = g(x)$, entonces

sabiendo $\lim_{x \to a} g(x)$ tendremos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{v \to \lim_{x \to a} g(x)} f(v)$$

Ejemplos

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$

Sea $v = 3x \Rightarrow \lim_{x \to 0} (3x) = 0$;

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{v \to 0} 3 \frac{\sin(v)}{v} = 3 \lim_{v \to 0} \frac{\sin(v)}{v} = 3$$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(0) - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot \sin(\frac{x}{2}) \sin(\frac{x}{2})}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} \sin(\frac{x}{2}) \sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}}$$

Sea $v = \frac{x}{2} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x}{2} = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} \sin(\frac{x}{2}) \sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}} = \lim_{v \to 0} \frac{\frac{1}{2} \sin(v) \sin(v)}{v^2} =$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin(v)}{v} \cdot \lim_{v \to 0} \frac{\sin(v)}{v} = \frac{1}{2}$$

Limites laterales

Def.- $\exists$ limite bajo f en "a" por la derecha si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\delta(\varepsilon)$ t.q si $0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Def.- $\exists$ limite bajo f en "a" por la izquierda si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\delta(\varepsilon)$ t.q si $0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Calcular el limite por la izquierda y derecha de

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0^+ \\ x \geq 0}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0^- \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x+1 = 1$

Cuando tenemos una funcion donde los limites laterales son distintos puede llegar la pregunta ¿Existe limite en 0? si lo pensamos el limite podria ser 0 o 1 pero por el teorema de unicidad esto no puede ser. Por lo tanto para que el limite exista ambos limites laterales tienen que ser el mismo

Teorema de Existencia

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Dem)

$\Rightarrow$) Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ entonces dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $0 < |x -$

$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ entonces $0 < x - a < \delta \Rightarrow a < x < \delta + a$

$\Rightarrow 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ y tambien

$0 < a - x < \delta \Rightarrow -a < -x < \delta - a \Rightarrow a - \delta < x < a \Rightarrow$

$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

$\Leftarrow$) Supongamos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

Sea $\varepsilon > 0$ entonces $\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Rightarrow \exists \delta_1 > 0$ t.q $a - \delta < x < a$

$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ y también

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \Rightarrow \exists \delta_2 > 0$ t.q $a < x < a + \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Elegimos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ entonces

$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow$ cualquiera de los dos $a - \delta < x < a$ ó $a < x < a + \delta$

en cualquiera de los dos casos $|f(x) - L| < \varepsilon$ por lo tanto

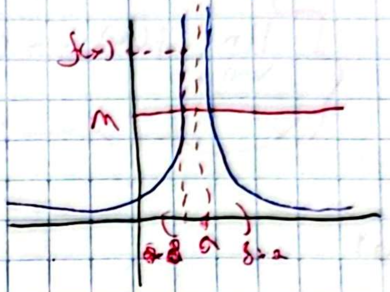
$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ así $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Límites Infinitos

Def.- Decimos que $\lim_{x\to a} f(x)$ diverge a infinito si:

$\forall M>0 \quad \exists \delta>0 \quad \delta(M)$ t.q si $0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>M$

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$



Ejemplo

1) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

P.D $\forall M>0 \quad \exists \delta>0 \quad \delta(M)$ t.q si $0<|x|<\delta \Rightarrow \frac{1}{x^2}>M$

$$\frac{1}{x^2} > M \Rightarrow \frac{1}{M} > x^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{M}} > x \Rightarrow \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Sea $M>0$ y $\delta = \sqrt{\frac{1}{M}}$

por hipotesis $0<|x|<\delta \Rightarrow |x| < \sqrt{\frac{1}{M}} \Rightarrow x^2 < \frac{1}{M}$

$\Rightarrow M < \frac{1}{x^2}$ //

2) $\lim_{x\to 5} \frac{1}{(x-5)^2} = +\infty$

P.D $\forall M>0 \quad \exists \delta>0 \quad \delta(M)$ t.q si $0<|x-5|<\delta \Rightarrow \frac{1}{(x-5)^2} > M$

$$\frac{1}{(x-5)^2} > M \Rightarrow \frac{1}{M} > (x-5)^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{M}} > |x-5| \Rightarrow \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Sea $M>0$ y $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow$

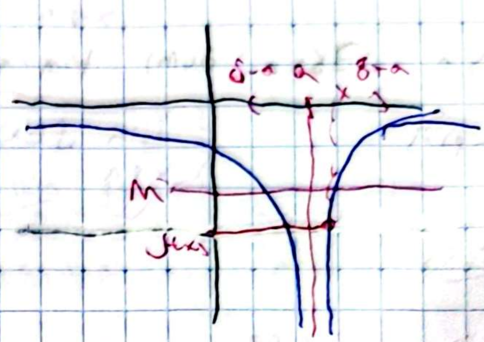
por hipotesis $|x-5|<\delta \Rightarrow |x-5| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow (x-5)^2 < \frac{1}{M}$

$\Rightarrow M < \frac{1}{(x-5)^2}$

Def.- Decimos que $\lim_{x \to a} f(x)$ diverge a menos infinito si

$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q. si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$



Ejemplos

i) $\lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x-1)^4} = -\infty$

P.D. $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \ \delta(M)$ t.q. si $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \frac{-1}{(x-1)^4} < -M$

$\frac{-1}{(x-1)^4} < -M \Rightarrow -(x-1)^4 > -\frac{1}{M} \Rightarrow (x-1)^4 < \frac{1}{M}$

$\Rightarrow |x-1| < \frac{1}{\sqrt[4]{M}}$

Sea $M > 0$ y $\delta = \frac{1}{\sqrt[4]{M}}$

Por hipótesis $|x-1| < \delta \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{\sqrt[4]{M}} \Rightarrow (x-1)^4 < \frac{1}{M}$

$\Rightarrow \frac{1}{(x-1)^4} > M \Rightarrow -\frac{1}{(x-1)^4} < -M$ //

2) $\lim_{x \to 2} \frac{1-x}{(x-2)^2} = -\infty$

P.D. $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q. si $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \frac{1-x}{(x-2)^2} < -M$

$\frac{1-x}{(x-2)^2} < -M \Rightarrow \frac{x-1}{(x-2)^2} > M$

Sea $\delta = \frac{1}{2} \Rightarrow |x-2| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x-2 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < x-1 < \frac{3}{2}$

$\Rightarrow x-1 \cdot \frac{1}{(x-2)^2} > \frac{1}{2} \cdot K$ y quiero que $\frac{1}{2} \cdot K = M \Rightarrow$

$K = 2M$

es decir $\frac{1}{(x-2)^2} > 2m \Rightarrow (x-2)^2 < \frac{1}{2m} \Rightarrow |x-2| < \frac{1}{\sqrt{2m}} = \delta$

Sea $m>0$ y $\delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2m}}\}$

por hipotesis $0<|x-2|<\delta \Rightarrow$

$0<|x-2|<\frac{1}{2}$ y $0<|x-2|<\frac{1}{\sqrt{2m}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < x-1$ y $2m < \frac{1}{(x-2)^2}$

$$\frac{1}{2}\cdot 2m < \frac{(x-1)}{(x-2)^2}$$

$$m > \frac{(x-1)}{(x-2)^2} \quad (1)$$

propiedades

I) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

$\Rightarrow$) Tenemos que $\forall m>0\ \exists \delta_1>0$ t.q si $0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow f(x)>m$

si $f(x)>m>0 \Rightarrow |f(x)|>m \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{m}$ y si

$\varepsilon = \frac{1}{m}$ tendriamos lo que queremos $\therefore m=\frac{1}{\varepsilon}$

Sea $m=\frac{1}{\varepsilon}$

por hipotesis $f(x)>m \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

$\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$ con $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$\Leftarrow$) Tenemos que $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0$ t.q si $0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$

Sea $\varepsilon = \frac{1}{m}$

por hipotesis $\frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{m} \Rightarrow |f(x)| > m \Rightarrow$

$f(x) > m$ //

$= |g + |x|| \leq (\xi + |x|)$

11) Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = k$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = +\infty$

Sabemos que

$\forall M > 0$ $\exists \delta_1 > 0$ t.q si $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow$ $f(x) > M$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_2 > 0$ t.q si $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - k| < \varepsilon$

P.D $\forall M > 0$ $\exists \delta > 0$ t.q si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) + g(x) < M$

Sí que $f(x) > M \Rightarrow f(x) + g(x) > M + g(x)$

Además sí que $|g(x) - k| < \varepsilon$

Caso 1 $k > 0$

$|g(x) - k| < \varepsilon \Rightarrow k - \varepsilon < g(x) < k + \varepsilon$, sea $\varepsilon = \frac{|k|}{2}$

$\Rightarrow 0 < k - \frac{k}{2} < g(x) \Rightarrow 0 < \frac{k}{2} < g(x)$

$\Rightarrow M + g(x) > M + 0 = M$

Caso 2 $k < 0$

$|g(x) - k| = |-k - g(x)| \Rightarrow -k - \varepsilon < -g(x) < \varepsilon - k$ sea $\varepsilon = \frac{|k|}{2}$

$-k - \frac{|k|}{2} < -g(x) < -k + \frac{|k|}{2} \Rightarrow -k + \frac{k}{2} < -g(x) < -k - \frac{k}{2}$

$\Rightarrow -\frac{k}{2} < -g(x) < -\frac{3k}{2} \Rightarrow 0 < \frac{k}{2} \leq g(x) \leq \frac{3}{2}k$.

~~$\Rightarrow M + g(x) > M +$~~ $\frac{3}{2} = M$

Sabemos que $M + \frac{3|k|}{2} > 0$ entonces si tomamos $M' = M + \frac{3|k|}{2}$

$f(x) > M' \Rightarrow f(x) > M + \frac{3}{2}|k| \Rightarrow f(x) + g(x) > M + \frac{3}{2}|k| + g(x)$

$> M + \frac{3|k|}{2} + \frac{3}{2}k \Rightarrow M + \frac{3k}{2} + \frac{3}{2}k = M$

iii) $\lim_{x \to a} h(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = k \Rightarrow \lim_{x \to a} h(x) + g(x) = -\infty$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to a} h(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = k$ con $k \neq 0$

iv) $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$ si $k > 0$ (1)

Sabemos que $k > 0$ ó $k < 0$

$\forall m > 0 \; \exists \delta_1 > 0$ t.q si $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) > m$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_2 > 0$ t.q si $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - k| < \varepsilon$

PD $\forall N > 0 \; \exists \delta > 0$ t.q si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) \cdot g(x) > N$

Queremos que $f(x) \cdot g(x) > N$

Se que $f(x) > m \Rightarrow f(x) \cdot g(x) > m \cdot g(x)$

Se que $|g(x) - k| < \varepsilon \Rightarrow k - \varepsilon < g(x) < k + \varepsilon$

como se cumple $\forall \varepsilon$ en particular para $\varepsilon = \frac{|k|}{2}$

y tomamos $k > 0$

$0 < \frac{k}{2} < g(x) \Rightarrow m \cdot g(x) > \frac{k}{2} \cdot m = N \Rightarrow m = \frac{2N}{k}$

Sea $m = \frac{2N}{k}$ y por hipotesis

$0 < \frac{k}{2} < g(x) < \frac{3k}{2}$

$f(x) \cdot g(x) > m \cdot g(x) > m \cdot \frac{k}{2} = \frac{2N}{k} \cdot \frac{k}{2} > N$

con $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

v) $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$ si $k < 0$

VI) $\lim_{x \to a} h(x) \cdot g(x) = -\infty$ si $k > 0$

Sabemos que

$\forall m > 0 \ \exists \delta_1 > 0$ t.q si $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) < -m$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0$ t.q si $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - k| < \varepsilon$

P.D $\forall N > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) \cdot g(x) < -N$

Sabemos que $f(x) < -m \Rightarrow f(x) \cdot g(x) < -m \cdot g(x)$

También $|g(x) - k| < \varepsilon \Rightarrow k - \varepsilon < g(x) < k + \varepsilon$

Como se cumple $\forall \varepsilon > 0$ en particular para $\varepsilon = \frac{k}{2} > 0$

$\frac{k}{2} < g(x) < \frac{3}{2}k \Rightarrow -m \cdot g(x) < -m \cdot \frac{3k}{2} = N \Rightarrow m = -\frac{2N}{3k}$

Sea $m = -\frac{2N}{3k}$ por hipótesis

$f(x) < -m \Rightarrow f(x) \cdot g(x) < -m \cdot g(x) < -m \cdot \frac{3k}{2} = -\left(-\frac{2N}{3k}\right) \cdot \frac{3k}{2} = N$

Para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

VII) $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$ si $k < 0$

Supongamos que $f(x) \leq g(x)$

VIII) Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) = +\infty$

P.D $\forall m > 0 \ \exists \delta_2 > 0$ t.q si $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow g(x) > m$

por hipótesis $f(x) > m \Rightarrow g(x) > f(x) > m \Rightarrow g(x) > m$

IX) Si $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

x) Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = +\infty$

P.D $\forall M>0 \ \exists \delta>0$ t.q si $0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)\cdot g(x) > M$

Sabemos que $\forall M>0 \ \exists \delta_1>0$ t.q si $0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow f(x) < \sqrt{M}$

$\forall M>0 \ \exists \delta_2>0$ t.q si $0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow g(x) < \sqrt{M}$

$f(x) > \sqrt{M} \Rightarrow f(x)\cdot g(x) > \sqrt{M}\cdot\sqrt{M} \Rightarrow f(x)\cdot g(x) > M$

Sea $M>0$, y $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Si $0<|x-a|<\delta \leq \delta_1 \Rightarrow f(x) > \sqrt{M}$
Si $0<|x-a|<\delta \leq \delta_2 \Rightarrow g(x) > \sqrt{M}$ $\Rightarrow f(x)\cdot g(x) > M$

xi) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = +\infty$

xii) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = -\infty$

$\forall M>0 \ \exists \delta_1>0$ t.q si $0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow f(x) > \sqrt{M}$

$\forall M>0 \ \exists \delta_2>0$ t.q si $0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow g(x) < -\sqrt{M}$

$f(x) > \sqrt{M}$ y $-g(x) > \sqrt{M} \Rightarrow -f(x)\cdot g(x) > M \Rightarrow f(x)\cdot g(x) < -M$

Sea $M>0$ y $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Si $0<|x-a|<\delta \leq \delta_1 \Rightarrow f(x) > \sqrt{M}$
$0<|x-a|<\delta \leq \delta_2 \Rightarrow -g(x) > \sqrt{M}$ $\Rightarrow f(x)\cdot g(x) < -M$

Limites laterales infinitos

Def: Decimos que $\lim_{x \to a} f(x)$ diverge a infinito por la derecha

si $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q si $0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) > M$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

Def: Decimos que $\lim_{x \to a} f(x)$ diverge a infinito por la izquierda

si $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q si $0 < a - x < \delta \Rightarrow f(x) > M$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$$

Def: Decimos que $\lim_{x \to a} f(x)$ diverge a menos infinito por la derecha

si $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q si $0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) < -M$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Def: Decimos que $\lim_{x \to a} f(x)$ diverge a menos infinito por la izquierda

si $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q si $0 < a - x < \delta \Rightarrow f(x) < -M$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

Ejercicios

1) $\lim_{x \to 1^+} \frac{x-2}{x-1} = -\infty$

P.D $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q si $0 < x - 1 < \delta \Rightarrow \frac{x-2}{x-1} < -M$

$$\frac{x-2}{x-1} = 1 - \frac{1}{x-1} < 1 - \frac{1}{\delta} = -M \quad \therefore \quad \delta = \frac{1}{M+1}$$

Sea $M > 0$ y $\delta = \frac{1}{M+1}$

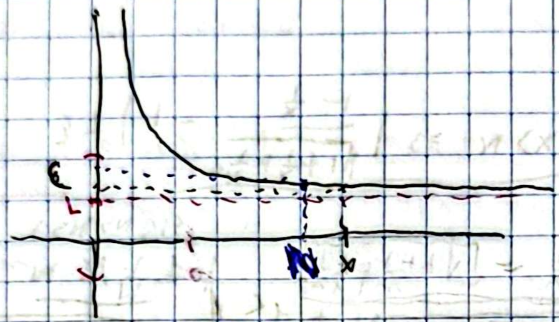
Por hipotesis $x - 1 < \delta \Rightarrow -\frac{1}{x-1} < -\frac{1}{\delta} \Rightarrow 1 - \frac{1}{x-1} < 1 - \frac{1}{\delta}$

$\Rightarrow \frac{x-2}{x-1} < 1 - \frac{1}{\delta} \Rightarrow \frac{x-2}{x-1} < 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{M+1}\right)} = -M$

Limites al infinito

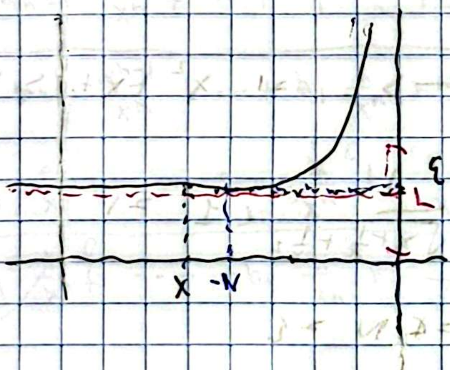
Def.- Decimos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ si

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0$ t.q. si $x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$



Def.- Decimos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ si

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0$ t.q. si $x < -N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$



Ejemplos

1) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

PD) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0$ t.q. si $x > N \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$

si $x > N \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{N} = \varepsilon \therefore N = \frac{1}{\varepsilon}$

Sea $\varepsilon > 0$ y $N = \frac{1}{\varepsilon}$

Por hipótesis $x > N \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{N} \Rightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$ //

ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} = \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

PD $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = 1$

PD $\forall \varepsilon>0\ \exists N>0$ t.q. si $x>N \Rightarrow \left|\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}-1\right|<\varepsilon$

si $x>N>1$

$$\left|\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}-1\right| \leq \left|\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}\right| + |1| \leq \frac{1-N}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} + 2N-1$$

Queremos que $\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} < 1 \Rightarrow \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} > 1 \Rightarrow$

$1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} > 1 \Rightarrow \frac{x^2+x+1}{x^2} > 1 \Rightarrow x^2+x+1 > x^2$

$\Rightarrow x+1>0 \Rightarrow x>-1$.

Si $N>1 \Rightarrow x>1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} < 1 \Rightarrow$

$\frac{1-N}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} + 2N-1 < 1-N+2N-1 = N > \varepsilon$

Sea $\varepsilon>0$, y $N = \max\{1, \varepsilon\}$

Límites al infinito en el infinito

Def: Decimos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ si

$\forall M>0\ \exists N>0$ t.q. si $x>N \Rightarrow f(x)>M$

Def: Decimos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ si

$\forall M>0\ \exists N>0$ t.q. si $x>N \Rightarrow f(x) < -M$

Def: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ $\forall M>0\ \exists N>0$ t.q. si $x<-N \Rightarrow f(x)>M$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\forall M>0\ \exists N>0$ t.q. si $x<-N \Rightarrow f(x) < -M$

propiedades

I) Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, entonces $\lim_{x \to \infty} p(x) = \infty$ si $a_n > 0$

II) Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, entonces $\lim_{x \to \infty} p(x) = -\infty$ si $a_n < 0$

III) $$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n}{b_n} \quad \text{si } n = m$$

como $n = m$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{a_n \frac{x^n}{x^n} + a_{n-1} \frac{x^{n-1}}{x^n} + \dots + a_1 \frac{x}{x^n} + \frac{a_0}{x^n}}{b_n \frac{x^n}{x^n} + b_{n-1} \frac{x^{n-1}}{x^n} + \dots + b_1 \frac{x}{x^n} + \frac{b_0}{x^n}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{a_n + a_{n-1} \cancel{\frac{1}{x}}^{0} + \dots a_1 \cancel{\frac{x}{x^n}}^{0} + \cancel{\frac{a_0}{x^n}}^{0}}{b_n + b_{n-1} \cancel{\frac{x}{x}}^{0} + \dots + b_1 \cancel{\frac{x}{x^n}}^{0} + \cancel{\frac{b_0}{x^n}}^{0}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n}$$

IV) $\lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \infty$ si $n > m$

V) $\lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0$ si $m > n$

Asintotas

Asintotas horizontales

La recta $y = L$ es una asintota horizontal de la curva $y = f(x)$ si $\exists M > 0$ t.q. si $f(x) > L$ o $f(x) < L$ $\forall x$ t.q. $|x| > M$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ ó $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

Asintotas verticales

La recta $x = a$ es una asintota vertical de la curva $y = f(x)$ si al menos uno de los sig. límites se da

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$

Continuidad

Una función f es continua en el punto a si

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q. si $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

osea se cumple lo sig

i) $f(a)$ existe

2) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si almenos una de estas tres condiciones no se cumple la funcion f es discontinua en $x = a$

Ejemplos

i) Probar que $f(x) = b$ es continua en $\mathbb{R}$

Como ya hemos visto $\lim_{x \to a} f(x) = b$ $\forall x \in \mathbb{R}$ y puesto que $f(c) = b$, entonces f es continua en toda $c \in \mathbb{R}$

III) $f(x) = x$ continua en $\mathbb{R}$

Igualmente $\lim_{x \to c} f(x) = c$ y $f(c) = c$ $\therefore$ es continua $\forall c \in \mathbb{R}$

IV) $f(x) = \frac{1}{x}$

no es continua en $x = 0$ pues $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \nexists$

V) $sgn(x)$

No es continua en $x = 0$ pues $\lim_{x \to 0} sgn(x) = \nexists$

V) $f(x) = \lfloor x \rfloor$

Es continua para $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

VI) $f(x) = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

Es continua para los intervalos $(-\infty, -1) \cup \{\mathbb{R} - \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{Z}\} \cup (1, \infty)$

VII) Demuestra que $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ es continua en $x = 2$

P.D. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.q. si $|x-2| < \delta \Rightarrow |3x^2 - 2x + 1 - 9| < \varepsilon$

$|3x^2 - 2x - 8| = |3x+4||x-2| \leq |3x+4| \delta =$

Si $\delta = 1$

$|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow 3 < 3x < 9 \Rightarrow 7 < 3x+4 < 13$

$\Rightarrow |3x+4| < 13 \Rightarrow 13\delta > \varepsilon \Rightarrow \delta > \frac{\varepsilon}{13}$

Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{13})$

por hipótesis $|x-2| < \delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{13}\} \leq 1$

como $\delta < 1 \Rightarrow |3x+4| < 13$ y como $\delta < 1 \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{13}$

$\Rightarrow |x-2||3x+4| < 13\delta \Rightarrow |3x^2 - 2x + 1 - 9| < 13(\frac{\varepsilon}{13}) = \varepsilon$ //

$\therefore$ es continua en $x = 2$

VIII) Demostrar que $f(x) = \sin(x)$ es continua en $x = a$

P.D $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.q si $|x-a| < \delta \Rightarrow |\sin(x) - \sin(a)| < \varepsilon$

Usando la identidad $\sin(x) - \sin(a) = 2\sin\left[\frac{1}{2}(x-a)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(x+a)\right]$

Tenemos que

$|\sin(x) - \sin(a)| = \left|2\sin\left[\frac{1}{2}(x-a)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(x+a)\right]\right| \leq \left|2\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| = |x-a| < \delta = \varepsilon$

Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \varepsilon$

IX) Demostrar que toda $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$

Tenemos que $f(1) = \frac{\sin(1)}{1} = \sin(1)$

P.D $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.q si $|x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\sin(x)}{x} - 1\right| < \varepsilon$

Tenemos que $\left|\frac{\sin(x)}{x} - 1\right| = \left|1 - \frac{\sin(x)}{x}\right|$ y además

$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \cos(x) \Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 - \cos(x)$

Se tiene $\left|1 - \frac{\sin(x)}{x}\right| \leq 1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \leq 2\left|\frac{x}{2}\right| \leq |x| < \delta = \varepsilon$

Sea $\varepsilon > 0$, y $\delta = \varepsilon$

Por hipótesis ...

X) $f(x) = e^x$ para $x > a$

Tenemos $f(a) = e^a$

P.D $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.q si $|x-a| < \delta \Rightarrow |e^x - e^a| < \varepsilon$

$|e^x - e^a| \leq$ teniendo $|a^x - 1| \leq 2|x|(a-1)$ ①

$|e^x - e^a| = |e^a(e^{x-a} - 1)| = e^a|e^{x-a} - 1| \leq 2e^a|x-a|(e-1)$ por ①

$<$ por $|x-a| < \delta \Rightarrow 2e^a|x-a|(e-1) = 2e^a(e-1)\delta = \varepsilon$

$\Rightarrow$ si $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2\,\varepsilon^a(\varepsilon-1)}$

---

xi) $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \in \mathbb{I} \end{cases}$

Como ya hemos visto $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ con $a \neq 0$ $\nexists$ $\therefore$ $f(x)$ no es continua $\forall x \neq 0$

Pero $f(0) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ $\therefore$ es continua en un único punto

xii) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ es fracción irreducible} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$ Función de Dirichlet

Como se ha visto $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ $\forall x_a$, como $f(a) = 0$ solo si a es irracional, esta función es continua en $x = a$ y a es irracional pero no si a es racional

Teorema 1

Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en a entonces:

(1) $f+g$ es continua en a

Dem: Como f y g son continuas en a, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$ $\Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f+g)(a)$

(2) $f \cdot g$ es continua en a

Dem: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$

$\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a)$

Y si además $g(a) \neq 0$

(3) $\frac{1}{g}$ es continua en a

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{1}{g(a)}$

Ejemplos

i) Funciones polinomicas

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ y si tomamos a $g(x) = a_n$ y $f(x) = x^n$ tendremos que la función polinomica es siempre continua

ii) Función racional

Si p y q son funciones polinomicas tal que $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ tendremos que $r(x)$ es continua $\forall x \neq a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ siendo $a_1, a_2 \dots a_n$ raices de $q(x)$

Teorema 2

Si g es continua en a, y f es continua en $g(a)$ entonces $f \circ g$ es continua en a

Dem: Sea $\varepsilon > 0$, como f es continua en $g(a)$, para este ε $\exists \delta_1 > 0$ t.q. si $|x - g(a)| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(g(a))| < \varepsilon$ (1)

y como g es continua en a, para δ_1 $\exists \delta > 0$ t.q. si $|x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \delta_1$

$\therefore$ si $|x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \delta_1 \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$

$\therefore$ $f \circ g$ es continua en a

Teorema del limite compuesto

Si f es continua en ℓ y $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$, entonces $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\ell) = f(\lim_{x \to a} g(x))$

Dem: Definamos $G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$

Se tiene entonces, $\lim_{x \to a} G(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \ell = G(a)$

$\Rightarrow \lim_{x \to a} G(x) = G(a)$ $\therefore$ G es continua en a

y como f es continua en $L = G(a)$ entonces

$\lim_{x\to a} (f\circ G)(x) = f\circ G(a)$ por lo tanto

$$\lim_{x\to a} f\circ g = \lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{x\to a} f(G(x)) = f(G(a)) = f(L) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

Colorario

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$ y g continua en L $\Rightarrow$ $g(\lim_{x\to\infty} f(x)) = g(L) = \lim_{x\to\infty} g(f(x))$

Propiedades extra: $\lim_{x\to a} x^r = a^r$ con $r\in\mathbb{R}$ $x>0$

podemos escribir $\lim_{x\to a} x^r$ entonces $= \lim_{x\to a} e^{\ln(x^r)} = e^{\lim_{x\to a} r\ln(x)}$

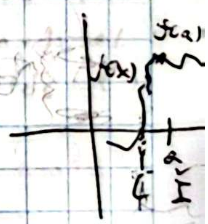
$\Rightarrow e^{r\lim_{x\to a}\ln(x)} \Rightarrow e^{r\ln(a)} = e^{\ln(a^r)} = a^r$

1) $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim_{x\to a} g(x)}$ si $f(x)>0$

$1^\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 1^\infty \Rightarrow e^{\lim_{x\to a} g(x)\cdot[f(x)-1]}$

Teorema 3

Si $f(x)$ es continua en a y $f(a)>0$ (<0) entonces existe un intervalo I que contiene a a tal que $f(x)>0$ (<0) $\forall x\in I$



Dem: Sea $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$ y $\delta = \delta_1$

Por hipotesis $|x-a|<\delta_1=\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \frac{f(a)}{2}$

$\Rightarrow -\frac{f(a)}{2} + f(a) < f(x) < \frac{f(a)}{2} + f(a) \Rightarrow \frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3}{2}f(a)$

$\Rightarrow I = \left(a - \delta\left(\frac{f(a)}{2}\right), a + \delta\left(\frac{f(a)}{2}\right)\right)$

Función continua en intervalos

Intervalo abierto

Si f es continua en para todo x en (a,b), entonces se dice que f es continua en (a,b).

Intervalo cerrado:

Si f es continua en el intervalo $[a,b]$, entonces

(1) f es continua en x $\forall x \in (a,b)$

(2) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Cotas superiores mínimas

Def.- Un conjunto A de números reales está acotado superiormente si existe un número x tal que

$$x \geq a \quad \forall a \in A$$

Cabe aclarar que existen múltiples cotas superiores. También la relación de la definición de conjuntos con las funciones. Si A es el conjunto $\{f(x) : a \leq x \leq b\}$, entonces la función f está acotada superiormente en $[a,b]$ si y solo si el conjunto A está acotado superiormente.

Def.- Un número x es una cota superior mínima de A si

(1) x es cota superior de A
(2) Si y es una cota superior de A, entonces $x \leq y$

y se escribe $\sup(A)$

Def.- Un conjunto A está acotado inferiormente si existe un número x tal que

$$x \leq a \quad \forall a \in A$$

Def.: Dicho número se denomina cota inferior máxima si

(1) x es una cota inferior de A
(2) Si y es una cota inferior de A, entonces $y \leq x$

A dicho se le denomina $\text{Inf}(A)$

Se le dice supremo si no pertenece al conjunto pero es cota superior mínima
Se le llama máximo si es cota superior mínima y pertenece al conjunto
Se le llama ínfimo si no pertenece al conjunto pero es cota inferior máxima
Se le llama mínimo si es cota inferior máxima y pertenece al conjunto

Teorema del supremo: Si un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tiene cota superior entonces existe supremo

Teorema del ínfimo: si un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ está acotado inferiormente entonces existe ínfimo.

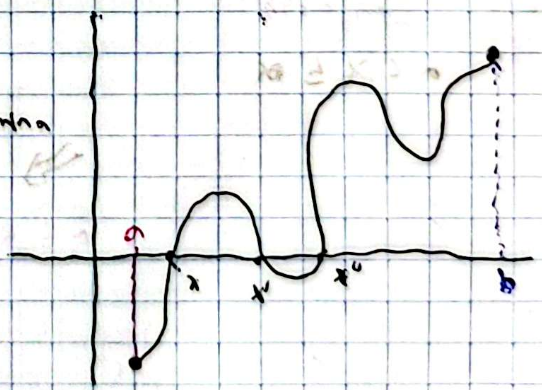
Tres teoremas fuertes de continuidad

A continuación se mostrarán 3 teoremas respecto a continuidad los cuales tendrán gran impacto en capítulos sig.

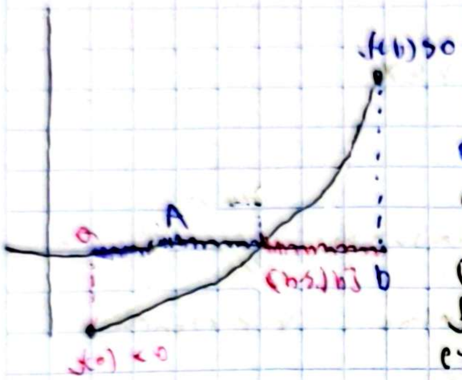
I) Teorema de Bolzano

Si f es continua en $[a,b]$ y satisface que $f(a) < 0 < f(b)$ (o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces existe algún $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = 0$

Geométricamente, esto significa que la gráfica de una función continua que comienza por debajo del eje x y termina por encima debe cortar dicho eje en almenos 1 ocasión.



Dem:



Definamos el conjunto A

$A=\{x : a\le x\le b,\ y\ f(y)<0\ \forall y\in[a,x]\}$

a) $A\neq\emptyset$ pues $a\in A$ ya que $f(a)<0$ y $a\in[a,x]$

Como $f(a)<0$ en $A\subset[a,x]$ y por hipótesis $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$ es decir, es continua por la derecha en A, por el Teorema 3 tenemos

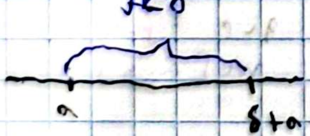
1) $\exists\,\delta>0$ t.q A contiene a todos los puntos que satisfacen $a\le x\le a+\delta$. $[a, a+\delta]\subset A$

También tenemos que b es cota superior de A pues $\forall y\in A$ $b\ge y$, y como $f(b)>0$ y por hipótesis $f(x)$ es continua en $[a,b]$ es decir continua por la izquierda en A, por el Teorema 3 tendremos

2) $\exists\,\delta_1>0$ t.q $0\le b-x<\delta_1 \Rightarrow f(x)>0$

Entonces todos los puntos que satisfacen que $b-\delta_1\le x\le \delta_1$ $[b-\delta_1, b]$ son cotas superiores de A

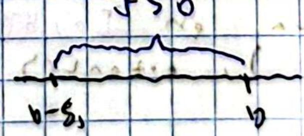
Entonces de 1) y 2) tenemos que si $\alpha=\sup(A)$ entonces $a\le\alpha\le b$, pues

a) 

$\Rightarrow a\le\alpha$

$[a, a+\delta)$

$a<x\le\alpha$

b) 

$\Rightarrow \alpha\le b$

$(b-\delta_1, b]$

$\alpha\le y\le b$

$\Searrow$ $\Swarrow$

$a\le\alpha\le b$

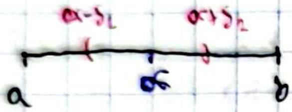
D.D $f(\alpha)=0$

Ahora demostraremos que $f(\alpha)=0$, excluyendo las posibilidades $f(\alpha)>0$ y $f(\alpha)<0$

Caso 1, $f(\alpha)<0$

Como $f(\alpha)<0$ y $f(x)$ continua en α, pues $f(x)$ continua en $[a,b]$, con $\alpha\in[a,b]$, por el teorema 3

1) $\exists\delta_2>0$ t.q. $f(x)<0$ $\forall x$ tal que $\alpha-\delta_2<x<\alpha+\delta_2$



Esto implica que $\exists x_0$ en $(\alpha,\alpha+\delta_2)$ tal que $f(x_0)<0$, entonces quiere decir que por 1) y 1)

$x_0\in A$ pues estaríamos diciendo que $\alpha\le x_0$ en A, lo cual no puede ser pues α es el supremo de A.

Caso 2, $f(\alpha)>0$

Como $f(\alpha)>0$ y $f(x)$ continua en α, pues $f(x)$ continua en $[a,b]$, con $\alpha\in[a,b]$, por el teorema 3

2) $\exists\delta_3>0$ t.q. $f(x)>0$ $\forall x$ tal que $\alpha-\delta_3\le x\le\alpha+\delta_3$

Esto implica que $\exists x_1$ en $(\alpha-\delta_3,\alpha)$ tal que $f(x_1)>0$, entonces quiere decir que por 2)

$x_1<\alpha$ pues como $f(x_1)>0$ implica que $x_1\in[b-\delta_1,b]$ entonces x_1 es cota superior, lo cual no puede ocurrir si $x_1<\alpha$ pues $\forall y\in[b-\delta_1,b]$, $\alpha\le y$

$\therefore$ $f(\alpha)=0$

$\therefore$ $\exists x\in[a,b]$ t.q. $f(x)=0$

I) Teorema del valor intermedio

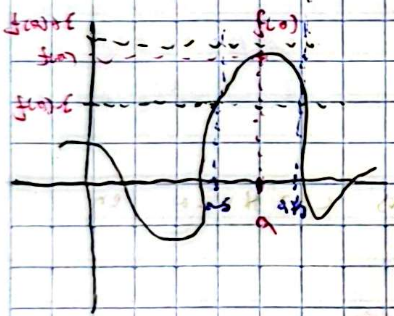
Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a) < c < f(b)$ (o $>$), entonces existe algún $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = c$

Dem: Sea $g(x) = f(x) - c$, entonces g es continua y $g(a) - c < c < g(b) - c \Rightarrow g(a) < 0 < g(b)$, y por el teorema de Bolzano $\exists x \in [a,b]$ tal que $g(x) = 0$ $\Rightarrow f(x) - c = 0 \Rightarrow f(x) = c$

II) Teorema:

Si f es continua en a, entonces $\exists \delta > 0$ t.q. f está acotada superiormente (inferiormente) en el intervalo $(a-\delta, a+\delta)$

Dem:



Como $f(x)$ es continua en a, tendremos que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q. $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Como se cumple $\forall \varepsilon$ en particular para $\varepsilon = 1$ entonces

$|f(x) - f(a)| < 1 \Rightarrow f(x) - f(a) < 1 \Rightarrow$
$f(x) < f(a) + 1 \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$

También $-1 < f(x) - f(a) \Rightarrow f(x) > -1 + f(a) \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$

$\therefore$ $f(x)$ está acotada

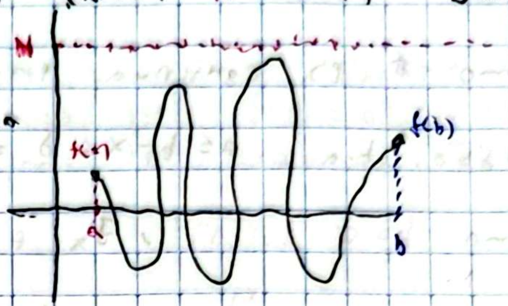
En este sentido, cabe destacar en particular la observación de que si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ entonces existe $\delta > 0$ tal que f está acotada en el conjunto $\{x \mid a \leq x < a+\delta\}$ pudiendo hacer lo mismo en el caso $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Con esto podemos abordar el siguiente teorema

2) Continuidad acotada

Si f es continua en $[a,b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a,b]$, es decir existe N tal que $f(x)\le N$ $\forall x\in[a,b]$

Geométricamente, este teorema significa que la gráfica de f se sitúa por debajo de alguna recta paralela al eje horizontal



Dem: Sea $A=\{x \mid a\le x\le b,$ y f está acotada superiormente en $[a,x]\}$

i) $A\neq\emptyset$ pues "a" pertenece a A

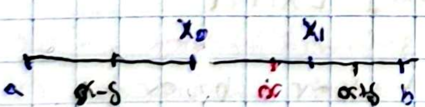
ii) A está acotada superiormente por b pues $\forall y\in[a,b]$ $b\geq y$, entonces por el axioma del supremo existe $\alpha=\sup(A)$, tal que $\alpha\le b$

P.D $\alpha=b$

Tenemos que desechar los dos casos, $\alpha>b$ y $\alpha<b$. $\alpha>b$ es imposible pues $\alpha\le b$ partir de la hipótesis, entonces supongamos que $\alpha<b$

Como f es continua en $[a,b]$ y $\alpha\in[a,b]$, f es continua en α y por el teorema 1)

1) $\exists\delta>0$ t.q f está acotada superiormente en el intervalo $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$



Tenemos que $(\alpha-\delta,\alpha)\subset A$, y como $\alpha=\sup(A)$ $\exists x_0\in(\alpha-\delta,\alpha)$ t.q $\alpha-\delta<x_0\le\alpha$.

Como $x_0\in[a,\alpha)\Rightarrow f$ está acotada en $[a,x_0]$, pero si x_1 es cualquier número tal que $\alpha<x_1<\alpha+\delta$, sabemos por 1) que f está acotada en $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$ y $(\alpha,x_1)\subset(\alpha-\delta,\alpha+\delta)\Rightarrow f$ está acotada en $[\alpha,x_1]$, entonces $x_1\in A$ pues estaríamos diciendo que $x_1>\alpha=\sup(A)$ $\therefore$ $\alpha=b$

Con esto hemos demostrado que f esta acotado en $[a, x]$ $\forall_x < b$.

P.D) $b \in A$

Como f es continua en b, por el teorema 11)

$\exists \delta > 0$ t.q $0 \leq b - x < \delta \Rightarrow f$ esta acotada en $[b-\delta, b]$

Como $b = \alpha = \sup(A)$, $\exists x_2 \in A$ t.q $b - \delta < x_2 < b$.

Como $x_2 \in A$, f es acotada superiormente en $[a, x_2]$, pero $[x_2, b] \subset [b-\delta, b]$ y f es acotada superiormente en $[b-\delta, b]$, entonces f es acotada superiormente en $[x_2, b]$ y por lo tanto f esta acotada en $[a, x_2] \cup [x_2, b] = [a, b]$ $\therefore$ $b \in A$.

I) Corolario

Si f es continua sobre $[a, b] \Rightarrow f$ esta acotada inferiormente

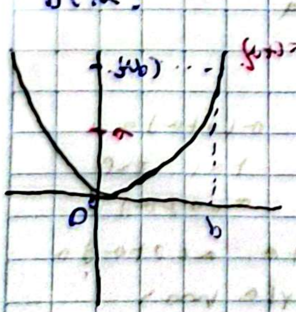
Dem: Sea $-f$, es continua en $[a, b]$, por el teorema anterior tendremos que $\exists N$; tal que $-f(x) \leq N \Rightarrow$ $f(x) \geq -N \Rightarrow f$ esta acotada inferiormente

Ejercicios

I) Raiz cuadrada

Todo numero positivo admite una raiz cuadrada. Es decir si $a > 0$, existe algun numero x tal que $x^2 = a$

Dem:



Sea $f(x) = x^2$, que es continua. Existe evidentemente $b > 0$ tal que $f(b) > a$, de hecho si $a > 1$ podemos tomar $b = a$ y si $a < 1$, podemos tomar $b = 1$.

Como $f(0) < a < f(b)$, por el teorema de Bolzano $\exists x \in [0, b]$ t.q $f(x) = a$, es decir $x^2 = a$

ii) Raíz n-ésima (positiva)

Todo número real positivo tiene raíz n-ésima. Esto es si $a \in \mathbb{R}^+$, $\exists x$ tal que $x^n = a$

Dem: Sea $f(x) = x^n$, como es creciente y continua, existe $b > 0$ tal que $f(b) > a$. También tenemos que $f(0) = 0^n = 0 < a$
$\Rightarrow f(0) < a < f(b)$ y por el teorema de Bolzano, $\exists x \in [0, b]$ t.q. $f(x) = a$

iii) Raíz n-ésima (todo)

Todo número real tiene raíz n-ésima (impar)

Dem: Tenemos un número real positivo tal que $x^n = a$, entonces $(-x)^n = -a$ (ya que n es impar), de manera que $-a$ tiene raíz n-ésima $-x$.

Afirmar que, para n impar, cualquier número a tiene una raíz n-ésima, es equivalente a decir que la ecuación $x^n - a = 0$ admite una raíz si n es impar. Expresado de esta manera se puede hacer una gran generalización

iv) Polinomio grado impar

Si n es impar, entonces cualquier ecuación de la forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

admite una raíz.

v) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y periódica con período $T > 0$. Probar que existe x_0 tal que $f(x_0 + \frac{T}{2}) = f(x_0)$ ...
... positivo y otro negativo.

Dem: Consideremos la función $g(x) = f(x + \frac{T}{2}) - f(x)$, la cual es continua pues f es continua, y además:

$$g(0) = f(0 + \tfrac{T}{2}) - f(0) = f(\tfrac{T}{2}) - f(0) \quad \text{y}$$

$$g(\tfrac{T}{2}) = f(\tfrac{T}{2} + \tfrac{T}{2}) - f(\tfrac{T}{2}) = f(T) - f(\tfrac{T}{2}) = f(0) - f(\tfrac{T}{2})$$

Entonces $g(0)$ y $g(\frac{T}{2})$ tienen signos opuestos, y por el teorema de Bolzano $\exists x_0 \in (0, \frac{T}{2})$ tal que $g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = f(x_0 + \frac{T}{2})$

vi) Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función continua, probar que dados $x_1, x_2, x_3, \ldots \in (a,b)$ existe $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$f(x_0) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) \cdots + f(x_n)]$$

Sol.- Sea $g(x) = f(x) - \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$ la cual es continua por f es continua.

Tendremos g va (...)

$$g(a) = f(a) - \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] < 0$$

$$g(b) = f(b) - \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] > 0$$

Por el teorema de bolzano $\exists x_0 \in [a,b)$ t.q

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] = 0 \Rightarrow$$

$$f(x_0) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$$

vii) Sea $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a < b$ y $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua, que satisface $\frac{1}{b} \leq f(x) \leq \frac{1}{a}$ $\forall x \in [a,b]$. Demuestre que existe $x \in [a,b]$ tal que

$$x f(x) = 1$$

Sol.- tenemos que $x f(x) = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$, definimos la función $g(x) = f(x) - \frac{1}{x}$ la cual es continua $\forall x \in [a,b]$ y además

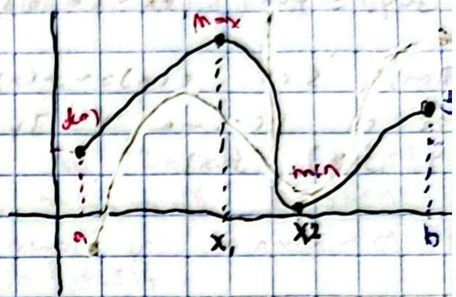
$g(a) = f(a) - \frac{1}{a} \leq 0$ y $g(b) = f(b) - \frac{1}{b} \geq 0$, por el teorema de bolzano existe $x_0 \in [a,b]$ tal que

$$g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - \frac{1}{x_0} = 0 \Rightarrow f(x_0) = \frac{1}{x_0} \Rightarrow x_0 f(x_0) = 1$$

3) Teorema de Weierstrass (maximos y minimos)

Si f es continua sobre $[a,b]$, entonces existen $x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x \in [a,b]$

Geometricamente dice que una función continua, tendra dos valores x_1, x_2 en los cuales alcanza su maximo y su minimo (depende de la funcion)



Dem:
caso 1.- $\exists x_2$ t.q $f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x \in [a,b]$

Sea $A = \{ f(x) \mid x \in [a,b] \}$, como f es continua en $[a,b]$ por el Teorema 2

o) $\exists M \in \mathbb{R}$ t.q $f(x) \leq M$ $\forall x \in [a,b]$ $\Rightarrow$ A esta acotado superiormente

oo) $A \neq \emptyset$, pues $a \in [a,b]$ y $f(a) \leq M$, por lo tanto $f(a) \in A$

Como A esta acotado superiormente, por el teorema del supremo $\exists \alpha$ t.q $\alpha = \sup(A) \Rightarrow \alpha \geq f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

P.D $\exists x_2 \in [a,b]$ t.q $f(x_2) = \alpha$

Supongamos que $f(x_2) \neq \alpha$ $\forall x \in [a,b]$, entonces $\alpha - f(x_2) \neq 0$ y definamos $g(x) = \dfrac{1}{\alpha - f(x_2)}$ pues esta continua y definida $\forall x \in [a,b]$

Como g es continua en $[a,b]$ por el Teorema 2

o) $\exists N \in \mathbb{R}$, $N \geq 0$ t.q $g(x) \leq N$ $\forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\alpha - f(x_2)} \leq N$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \dfrac{1}{N} \leq \alpha - f(x_2) \Rightarrow f(x) \leq \alpha - \dfrac{1}{N}$ $\forall x$

$\Rightarrow \alpha - \dfrac{1}{N}$ es cota superior y ademas $\alpha - \dfrac{1}{N} < \alpha$!

pues estamos diciendo que una cota superior es menor al supremo

$\therefore \exists x_2 \in [a,b]$ tal que $f(x_2) = \alpha$ y por tanto $f(x) \leq f(x_2)$

caso 2.- Se hace analogamente

Escaneado con CamScanner

I) Corolario Teo. 3 (Mínimo)

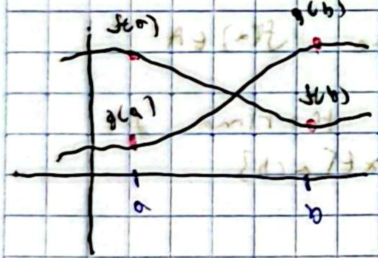
Si f es continua en $[a,b]$, entonces $\exists y \in [a,b]$ t.q $f(y) \leq f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

Dem: Sea $g(x) = -f(x)$, como $g(x)$ es continua en $[a,b]$ por el teorema 3 $\exists y \in [a,b]$ t.q $g(x) \leq g(y)$ $\Rightarrow$ $-f(x) \leq f(y)$ $\Rightarrow$ $f(y) \leq f(x)$

II) Máximos y mínimos

Si f es continua en $[a,b]$ entonces $\exists y$ y $z \in [a,b]$ tal que $f(y) \leq f(x) \leq f(z)$ $\forall x \in [a,b]$
(Toda función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor máximo y valor mínimo)

III) Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$, tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < f(b)$. Demostrar que $\exists c \in [a,b]$ tal que $f(x) = g(x)$



Sea $h(x) = f(x) - g(x)$, como f y g son continuas, $h(x)$ es continua.

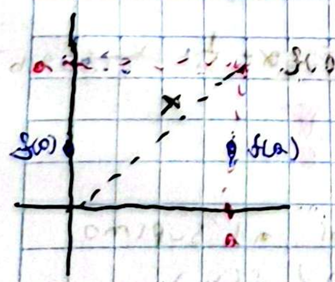
$h(a) = f(a) - g(a) > 0$ $\quad$ $h(b) < 0 < h(a)$
$h(b) = f(b) - g(b) < 0$

$\therefore$ $\exists c \in [a,b]$ t.q $h(x) = 0$ $\Rightarrow$ $f(x) - g(x) = 0$ $\Rightarrow$ $f(x) = g(x)$

IV) Teorema del punto fijo [I]

Si $f(x)$ es continua en $[0,a]$ y si $f(0) > 0$ y $f(a) < a$, entonces $\exists x \in [0,a]$ t.q $f(x) = x$

Dem: Sea $h(x) = f(x) - x$.



Como $f(x)$ es continua y x también, h es continua

$h(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$ $\quad\Rightarrow$ $h(a) < 0 < h(a)$
$h(a) = f(a) - a = f(a) - a < 0$

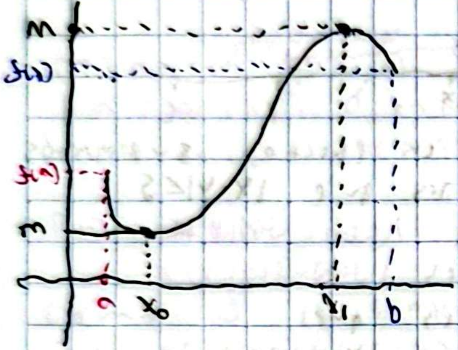
$\therefore$ por el teorema de Bolzano $\exists x \in [0,a]$ t.q $h(x) = 0$ $\Rightarrow$ $f(x) - x = 0$ $\Rightarrow$ $f(x) = x$.

V) Intervalo acotado y cerrado

I

Sea una función $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua en el intervalo $[a,b]$. Entonces el conjunto $f[I] = f([a,b]) = \{ f(x) \mid x \in I \}$, es un intervalo acotado y cerrado.

Dem.- Como f es continua



Como f es continua en $[a,b]$, por el teorema de máximos y mínimos, existen

$M = \max\{f(I)\}$ $m = \min\{f(I)\}$

Entonces $\forall x \in [a,b]$ $m \leq f(x) \leq M$ y como $f(x) \subset f(I) \Rightarrow f([a,b]) \subseteq [m,M]$

Por otro lado si $c \in [m,M]$, $\exists x \in [a,b]$ tal que $f(x) = c \Rightarrow [m,M] \subset f[a,b]$ $\therefore$ $f([a,b]) = [m,M]$

Continuidad uniforme

Def.- Una función f es uniformemente continua en un intervalo I así:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.q. si } |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Hemos visto que una función puede ser continua en toda la recta real, o en un intervalo abierto, sin ser uniformemente continua en estos dominios de definición. Por otra parte $f(x) = x^2$ es uniformemente continua en cualquier intervalo cerrado.

Esto no debería sorprender y nos induce a pensar que cualquier función continua en un intervalo cerrado es uniformemente continua en dicho intervalo. Para demostrarlo necesitaremos el siguiente lema.

Lema.-

Sean $a < b < c$ y los intervalos $[a,b]$, $[b,c]$ con f continua en $[a,c]$. Sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que se cumple lo sig.

I) si $x,y \in [a,b]$ y $|x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

II) si $x,y \in [b,c]$ y $|x-y| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

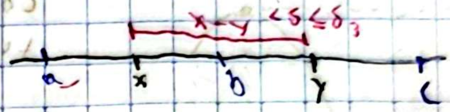
Entonces $\exists \delta > 0$ t.q. si $x,y \in [a,c]$ $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Dem:

Como f es continua en b, por definición $\exists \delta_3$ t.q $|x-b|<\delta_3 \Rightarrow |f(x)-f(b)|<\frac{\varepsilon}{2}$ (III) Además si $|y-b|<\delta_3 \Rightarrow |f(y)-f(b)|<\frac{\varepsilon}{2}$
Entonces tenemos:

$$|f(x)-f(y)| = |f(x)-f(b)+f(b)-f(y)| \leq |f(x)-f(b)|+|f(b)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Entonces sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$



Es fácil demostrar que este es el valor buscado, en efecto supongamos que x e y son puntos del intervalo $[a,c]$ tales que $|x-y|<\delta$. Si x e y están en el intervalo $[a,b]$ entonces $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ según I), si x e y están en $[b,c]$, entonces $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ por II). La única posibilidad que queda es que $x<b<y$ o $y<b<x$. En ambos casos como $|x-y|<\delta$ se verifica que $|x-b|<\delta$ y $|y-b|<\delta$, por tanto que $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ según III)

Teorema:

Si f es continua en $[a,b]$ entonces f es uniformemente continua en $[a,b]$

Dem: Dado $\varepsilon>0$ diremos que f es ε-buena en $[a,b]$ si existe algún $\delta>0$ tal que para todo y,z de $[a,b]$ si $|y-z|<\delta \Rightarrow |f(y)-f(z)|<\varepsilon$

Sea $\varepsilon>0$ P.D f es ε-buena en $[a,b]$

Sea $A=\{x \mid a \leq x \leq b,\ y\ f \text{ es } \varepsilon\text{-buena en } [a,x]\}$

1) $A \neq \emptyset$ puesto que $|a-a|=0$ y $|f(a)-f(a)|=0<\varepsilon$

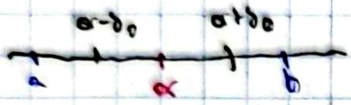
2) A está acotado superiormente por b

Como A está acotado superiormente por el axioma del supremo $\exists \alpha = \sup(A)$

P.D $\alpha = b$

Supongamos que esto $\alpha \neq b$ no es

Como b es cota superior no puede ocurrir que $\alpha > b$
Entonces supongamos que $a < \alpha < b$.
Como f es continua en $[a,b]$ y tenemos $\alpha \in [a,b]$, entonces f es continua en $\alpha \Rightarrow \exists \delta_0 > 0$ t.q. si $|x-\alpha| < \delta_0 \Rightarrow |f(x)-f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

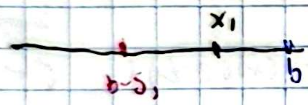


Por lo tanto si $|y-\alpha| < \delta_0$ y $|z-\alpha| < \delta_0$ entonces $|f(y)-f(z)| < \varepsilon$. Esto asegura que f es ε-buena en el intervalo $[\alpha-\delta_0, \alpha+\delta_0]$

Entonces por el Lema sabemos que f es ε-buena en $[a, \alpha+\delta_0]$, entonces $\alpha+\delta_0 \in A$ ¡! esto contradice el hecho de que $\alpha = \sup(A)$ $\therefore$ $\alpha = b$

P.D. $b \in A$

Como f es continua en b por la izquierda, $\exists \delta_1 > 0$ t.q. si $0 \leq b-x \leq \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(b)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, entonces sea $b-\delta_1 < x_1 < b$ con $x_1 \in A$ que existe pues $b = \alpha = \sup(A)$ entonces f es ε-buena en $[a, x_1]$ y f es ε-buena en $[x_1, b]$ entonces por el Lema, f es ε-buena en $[a,b]$



$\therefore$ f es uniformemente continua en $[a,b]$

<u>Ejercicios</u>

Determinar si son uniformemente continuas

a) $f(x) = \ln(x)$ para $x \in (0,1)$
No es u.c., supongamos que lo es

Dem.- Supongamos que si es u.c. entonces

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.q. si $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$, en particular para $\varepsilon = 1$ $|\ln(x) - \ln(y)| < 1$

Por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{n} < \delta$.

Sean $x = e^{-n}$ y $y = e^{-(n+1)}$ $\Rightarrow |x-y| = \left|\frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^{n+1}}\right| = \left|\frac{e^{n+1}-e^n}{e^n e^{n+1}}\right|$

$= \left|\frac{e^n(e-1)}{e^n(e^{n+1})}\right| = \left|\frac{e-1}{e^{n+1}}\right| < \left|\frac{e}{e^{n+1}}\right| = \left|\frac{1}{e^n}\right| < \frac{1}{n} < \delta$

Entonces $|\ln(e^{-n}) - \ln(e^{-(n+1)})| = |-n+n+1| = 1$ ¡!

$\therefore$ No es u.c.

iii) $f(x) = x\sin(x)$ para $[0,\infty)$

no es u.c

Dem: su pongamos que lo es, entonces

$\exists \varepsilon>0$ $\forall \delta>0$: $|x-y|<\delta \Rightarrow |x\sin(x) - y\sin(y)| < \varepsilon$

Por la propiedad arquimediana $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$

sean $x = 2\pi n$ y $y = 2\pi n + \frac{1}{n}$

$|x-y| = |2\pi n - 2\pi n - \frac{1}{n}| = |\frac{1}{n}| < \delta$

$|x\sin(x) - y\sin(y)| = |(2\pi n)\sin(2\pi n) - (2\pi n + \frac{1}{n})\sin(2\pi n + \frac{1}{n})|$

$= |-2\pi\sin(2\pi + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\sin(2\pi + \frac{1}{n})| = |-2\pi(-\sin(\frac{1}{n})) - \frac{1}{n}(-\sin(\frac{1}{n}))|$

$= |2\pi\sin(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n})| < |2\pi + \frac{1}{n}| > 2\pi$!

$\therefore$ No es u.c.

iv) $f(x) = e^x$ para $x \in [0,\infty]$

no es u.c.

Dem: supongamos que si es u.c.

Por la propiedad arquimediana $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{n} < \delta$

Sea $x = \ln(n)$ y $y = \ln(n+1)$ $\Rightarrow$ $|\ln(n) - \ln(n+1)| = |\ln\frac{n}{n+1}| \leq |\frac{1}{n}| < \delta$

$|e^{\ln(n)} - e^{\ln(n+1)}| = |n - n - 1| = |-1| = 1$! $\therefore$ No es u.c.

v) $f(x) = 3x$ $[0,1]$

P.D. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tq si $|x-y| < \delta \Rightarrow |3x - 3y| < \varepsilon$

$|3x - 3y| = 3|x-y| = 3\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{3}$

Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

Por hipótesis $|x-y| < \delta \Rightarrow |3x - 3y| < 3\delta = 3(\frac{\varepsilon}{3}) = \varepsilon$ //

$x - y - 2\sqrt{xy} \leq x - y$

vi) Si f y g son u.c. en A => f+g es u.c. (utilizando límites)

Por hipótesis $\exists \delta_1 > 0$ t.q para $x, y \in A$, $|x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists \delta_2 > 0$ t.q para $x, y \in A$, $|x-y| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$

P.D $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.q para $x, y \in A$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |(f+g)(x) - (f+g)(y)| < \varepsilon$

Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$\varepsilon > |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \geq |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| = |(f+g)(x) - (f+g)(y)|$

vii) Si f y g son u.c. en A => f·g es u.c. (utilizando límites)

Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Dem: Por hipótesis y límites $\exists \delta_1 > 0$ t.q si $x, y \in A$ $|x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists \delta_2 > 0$ t.q si $|x-y| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2|f(x)|}$

$\Rightarrow |(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(y)| < \varepsilon$

viii) Si f es u.c. en A, g u.c. en B y f(x) pertenece a B $\forall x \in A$ => $g \circ f$ es u.c. en A.

$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{|x-y|}$ $\quad < x - 2\sqrt{xy} - y \leq x - y$

$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq x - y$

$x > y$

$\sqrt{xy} > y$

$-\sqrt{xy} < -y$

$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{x-y}$

$x - \sqrt{xy} + y \quad x + y$

$x - \sqrt{xy} + x < 2y$

La Derivada

Representación Geométrica

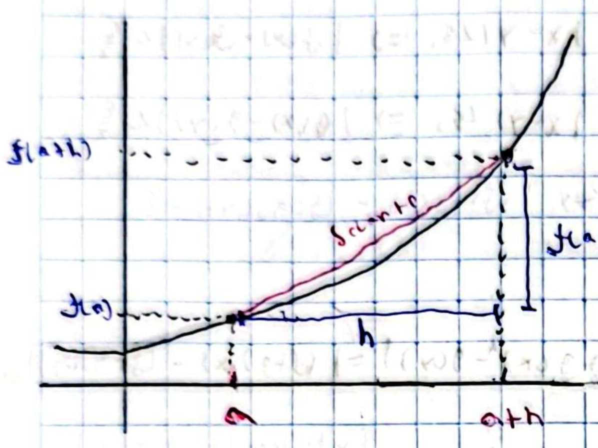


Figura (1)

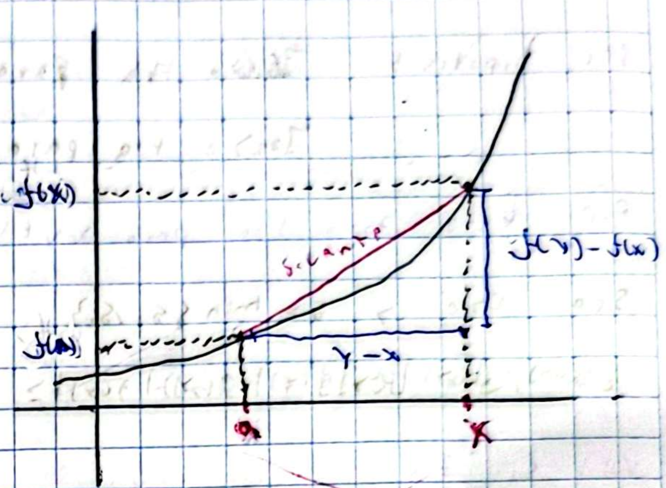


Figura (2)

La derivada surge por el problema de trazar rectas tangentes a curvas. Una forma que se ideo para poder calcular las rectas tangentes es aproximarlo mediante secantes. En la figura 1 tenemos que la pendiente de la secante sera $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, y el limite cuando los valores a y b se acercan osea cuando h tiende a cero, sera la pendiente de la recta tangente que se busca.

Otra forma de verlo es en la figura 2 donde tenemos dos valores a e x y la pendiente de la secante sera $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ y el limite cuando x se acerca a a sera la pendiente de la recta tangente.

Def.- una funcion f es Diferenciable en "a" si existe

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_a = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \left.\frac{df}{dx}\right|_a = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Entonces tendremos que la ecuacion de la recta tangente a cualquier punto de una funcion diferenciable sera

$$y - f(a) = \frac{df}{dx}(a)\,(x-a)$$

Ejemplos

1) $f(x) = c \Rightarrow \frac{df}{dx} = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$$

ii) $f(x) = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

iii) $f(x) = x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = n x^{n-1}$

$$\lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{y^n - x^n}{y-x} = \lim_{y\to x} y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + y x^{n-2} + x^n$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2}x^1 + \cdots + x x^{n-2} + x^{n-1} = n x^{n-1}$$

iv) $f(x) = 2x + 3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+2h+3-2x-3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

v) Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = 3x^2+1$ en el punto $x = 1$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(1+h)^2+1-3(1)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3+6h+h^2+1-3-1}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 6+h = 6$$

Entonces $y - 4 = 6(x-1) \Rightarrow y = 6x-2$

Criterios de la existencia de derivada

A pesar de haber resuelto varias pocas funciones que son diferenciables, tambien veremos casos donde no lo son.

Def.- Una función f, es diferenciable en a si la derivada por la derecha en a es igual a la derivada por la izquierda en a

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Ejemplos

I) $f(x) = |x|$ ¿es diferenciable en 0?

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

si $x<0$, $f(x) = -x$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h}$$

$$-1 \neq 1$$

$\therefore$ No es diferenciable en 0

II) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h}$$

$$0 \neq 1$$

$\therefore$ No es diferenciable

III) $f(x) = [x]$ ¿Es diferenciable en 1?

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

si $1 < x < 2 \Rightarrow f(x) = 1$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{[1+h]-[1]}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{[1+h]-[1]}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^-} -\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0^+} 0$$

$$\infty \neq 0$$

$\therefore$ No es diferenciable

IV) $f(x) = \begin{cases} x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{h\,\text{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h\,\text{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{h}$$

pero $\lim_{h\to 0} \text{sen}\left(\frac{1}{h}\right) \nexists$ $\therefore$ No es derivable

Teorema 1, diferenciable y continua

Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a

Dem:

Queremos que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ o lo que es equivalente
$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0$

P.D $\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0$

Como evaluamos el límite cuando "x" tiende a "a" se tiene que
$x \neq a \Rightarrow x - a \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}(x-a) = f'(a) \lim_{x\to a} (x-a) = f'(a)\cdot 0 = 0$$

Propiedades

Sean f y g derivables en "a", entonces

I) $f+g$ es derivable en "a" y $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

$$\lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x) - f(a) - g(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a)$$

II) $f\cdot g$ es derivable en "a" y $(f\cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + g'(a)\cdot f(a)$

$$\lim_{x\to a} \frac{(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(f(x) - f(a))g(x)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{(g(x)-g(a))f(a)}{x-a}$$

Como g es ~~cont~~ derivable, entonces es continua en "a"

$$= f'(a)\,g(a) + g'(a)\,f(a)$$

iii) Si $g \neq 0$, entonces $\frac{1}{g}$ es derivable en a y además

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g}\right) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{g(a)-g(x)}{(x-a)(g(x)\cdot g(a))}$$

$$= -\lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \cdot \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)g(a)} = -\left.\frac{dg}{dx}\right|_a \cdot \frac{1}{(g(a))^2} = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}$$

iv) Si $g \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en 'a' y además

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - g'(a)\,f(a)}{[g(a)]^2}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)\,g(a) - g(x)\,f(a)}{g(x)\,g(a)}}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)\,g(a) - g(x)\,f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)\cdot g(a)}$$

$$= \left[\lim_{x \to a} \frac{f(x)\,g(a) - g(a)\,f(a) + g(a)\,f(a) - g(x)\,f(a)}{x-a}\right] \cdot \frac{1}{[g(a)]^2}$$

$$= \left[\lim_{x \to a} \frac{(f(x)-f(a))\,g(a) - (g(x)-g(a))\,f(a)}{x-a}\right] \cdot \frac{1}{[g(a)]^2}$$

$$= \frac{f'(a)\cdot g(a) - g'(a)\cdot f(a)}{[g(a)]^2}$$

Norma

Derivadas de funciones especiales

I) $f(x) = sen(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(x)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)\cos(h) + sen(h)\cos(x) - sen(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{sen(x)[\cos(h) - 1] + sen(h)\cos(x)}{h}$$

$sen(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{sen(x)[-2\,sen^2(\frac{h}{2})]}{h} + \frac{sen(h)\cos(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-2\,sen(x)\,sen^2(\frac{h}{2})}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{sen(h)}{h}\cdot\cos(x)$$

$\lim_{h\to 0} \frac{sen(h)}{h} = 1$

$\lim_{h\to 0} \frac{sen(\frac{h}{2})}{h} = \frac{1}{2}$

$$-2\lim_{h\to 0} sen(x)\cdot\lim_{h\to 0} sen(\tfrac{h}{2})\cdot\lim_{h\to 0}\frac{sen(\frac{h}{2})}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\cos(x)$$

$$-2\,sen(x)\cdot 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\cos(x) = \boxed{\cos(x)}$$

II) $f(x) = \cos(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -sen(x)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - sen(x)sen(h) - \cos(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)[\cos(h) - 1] - sen(x)\,sen(h)}{h}$$

$\left\{ sen(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}} \right\}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)[-2\,sen^2(\frac{h}{2})] - sen(x)\,sen(h)}{h}$$

$$-2\lim_{h\to 0}\cos(x)\cdot\lim_{h\to 0} sen(\tfrac{h}{2})\cdot\lim_{h\to 0}\frac{sen(\frac{h}{2})}{h} - \lim_{h\to 0} sen(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h}$$

$$-2\cdot 0\cdot\frac{1}{2} - sen(x)\cdot 1 = \boxed{-sen(x)}$$

III) $f(x) = \tan(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = sec^2(x)$

$$\tan(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(sen(x))\cdot\cos(x) - \frac{d}{dx}(\cos(x))\cdot sen(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + sen^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= 1 + \tan^2(x) = sec^2(x)$$

IV) $f(x) = csc(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -cot(x) \cdot csc(x)$

$f(x) = csc(x) = \frac{1}{sin(x)}$ $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx}(sin(x))}{sin^2(x)} = -\frac{cos(x)}{sin(x)} \cdot \frac{1}{sin(x)}$

$= \boxed{-cot(x) \cdot csc(x)}$

V) $f(x) = sec(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = tan(x) \cdot sec(x)$

$f(x) = sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$ $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx}(cos(x))}{cos^2(x)} = \frac{sin(x)}{cos(x)} \cdot \frac{1}{cos(x)}$

$= -tan(x) \cdot sec(x)$

VI) $cot(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -csc^2(x)$

$f(x) = cot(x) = \frac{cos(x)}{tan(x)}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(tan(x))}{tan^2(x)} = \frac{sec^2(x)}{tan^2(x)}$

$\frac{dy}{dx} - \frac{\frac{1}{cos^2(x)}}{tan^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x) \cdot tan^2(x)} = -\frac{1}{sin^2(x)} = \boxed{-csc^2(x)}$

VII) $f(x) = ln(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

$\lim_{h \to 0} \frac{ln(x+h) - ln(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$

$= \lim_{h \to 0} ln\left(\left[1 + \frac{h}{x}\right]^{\frac{1}{h}}\right) = ln\left(\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right)$

Tenemos $\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = 1^{\infty}$ indeterminación

$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = 1^{\infty} \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} g(x) \cdot [f(x) - 1]}$

$\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = e^{\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[1 + \frac{h}{x} - 1\right]} = e^{\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\frac{h}{x}\right]} = e^{\lim_{h \to 0} \frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}$

$ln\left(\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) = ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \boxed{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$

Norma

viii) $f(x) = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x$

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot (e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Sea $y = e^h - 1 \Rightarrow \lim_{h\to 0} e^h - 1 = 0$ $\therefore$ $y \to 0$

$$e^x \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = e^x \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{1}{y}\ln(y+1)} = e^x \cdot \frac{1}{\lim_{y\to 0} (\ln(y+1)^{\frac{1}{y}})}$$

Tenemos $\lim_{y\to 0} \ln([1+y]^{\frac{1}{y}}) = \ln\left(\lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}}\right) = \ln(e) = 1$

$$\Rightarrow e^x \cdot \frac{1}{\lim_{y\to 0} \ln([1+y]^{\frac{1}{y}})} = e^x \cdot \frac{1}{1} = \boxed{e^x}$$

ix) $f(x) = x^{-n} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-n\, x^{n-1}}{x^{2n}}$

$$f(x) = x^{-n} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^n} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx}(x^n)}{(x^n)^2} = \frac{-n\,x^{n-1}}{x^{2n}}$$

x) $f(x) = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} =$

$$\lim_{y\to x} \frac{y^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{y - x} = \lim_{y\to x} \frac{y^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{(y^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}})(y^{\frac{n-1}{n}} + y^{\frac{n-2}{n}} x^{\frac{1}{n}} + \dots + y^{\frac{1}{n}} x^{\frac{n-2}{n}} + x^{\frac{n-1}{n}})}$$

$$\lim_{y\to x} \frac{1}{y^{1-\frac{1}{n}} + y^{1-\frac{2}{n}} x^{\frac{1}{n}} + \dots + y^{\frac{1}{n}} x^{1-\frac{2}{n}} + x^{1-\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}} + x^{1-\frac{2}{n}} x^{\frac{1}{n}} + \dots + x^{\frac{1}{n}} \cdot x^{1-\frac{2}{n}} + x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}} + x^{1-\frac{1}{n}} + \dots + x^{1-\frac{1}{n}} + x^{1-\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{n\, x^{1-\frac{1}{n}}} = \boxed{\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}}$$

xi) $f(x) = \log_a x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(a)}$

$f(x) = \log_a x$ (cambio de base $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$) $f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(a)} \frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(a)}$$

XII) $y = \log_x a$ $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\ln(a)}{x \ln^2(x)}$

$f(x) = \log_x a = \frac{\ln(a)}{\ln(x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \ln(a) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) = \ln(a) \cdot -\frac{\frac{1}{x}}{\ln^2(x)}$

$= -\ln(a) \cdot \frac{1}{x \ln^2(x)} = -\frac{\ln(a)}{x \ln^2(x)}$

= Pa xia' el gusto

XIII) Sean $f_1, f_2, \dots, f_n$ diferenciables en x, entonces

$\frac{d}{dx}(f_1 + f_2 + \dots + f_n) = f_1' + f_2' + f_3' + \dots + f_n'$

Por inducción sobre n

i) B.I

Para $n = 1 \Rightarrow \frac{d}{dx}(f_1) = f_1'$

ii) H.I Supongamos que se cumple para $n = k$

$\frac{d}{dx}(f_1 + f_2 + \dots + f_k) = f_1' + f_2' + \dots + f_k'$

iii) P.I :

P.D $\frac{d}{dx}(f_1 + f_2 + \dots + f_k + f_{k+1}) = f_1' + f_2' + \dots + f_k' + f_{k+1}'$

Tenemos $\frac{d}{dx}(f_1 + f_2 + \dots + f_k) + \frac{d}{dx}(f_{k+1}) = f_1' + f_2' + \dots + f_k' + f_{k+1}'$ ∎

2) Sean $f_1, f_2, \dots, f_n$ derivables en x, entonces

$\frac{d}{dx}(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n) = \sum_{i=1}^{n} f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_{i-1}(x)\, f_i'(x)\, f_{i+1}(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$

B.I) Para $n = 1$ $\quad \frac{d}{dx}(f_1) = \sum_{i=1}^{1} f'(x) = f'(x)$

H.I) para $n = k$ se cumple.

P.I) P.D $\frac{d}{dx}(f_1 \cdot f_2 \cdots f_k \cdot f_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_{i-1}(x)\, f_i'(x)\, f_{i+1}(x) \cdot \ldots \cdot f_k(x) \cdot f_{k+1}(x)$

$\frac{d}{dx}([f_1 \cdot f_2 \cdots f_k] \cdot f_{k+1}) = \frac{d}{dx}(f_1 \cdot f_2 \cdots f_k) \cdot f_{k+1} + f_{k+1}'(x)(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k)$

$\sum_{i=1}^{k} f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_{i-1}(x)\, f_i'(x)\, f_{i+1}(x) \cdot \ldots \cdot f_k(x) + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k \cdot f_{k+1}'$

$= \sum_{i=1}^{k+1} f_1(x) \cdot \ldots f_{i-1}(x)\, f_i'(x)\, f_{i+1}(x) \cdot \ldots \cdot f_k(x) \cdot f_{k+1}(x)$

Regla de la cadena

Para poder derivar las funciones más interesantes, es necesario disponer de una fórmula para $(f \circ g)'(x)$ en términos de f' y g'. En efecto se demostrará que si g es diferenciable en a y f es diferenciable en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es diferenciable en a y además $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Antes de una demostración veamos algunas consideraciones. Comenzamos aplicando la definición

$$\bullet\ (f \circ g)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h}$$

En algún lugar de esta expresión debería aparecer la definición de $g'(a)$. Una manera de conseguirlo es ponerla a la fuerza.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

Esto no tiene mal aspecto pero mejora si agregamos

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(a) + [g(a+h) - g(a)]) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

Y haciendo $k = g(a+h) - g(a)$ entonces obtendremos

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(g(a) + k) - f(g(a))}{k} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

Y este límite con "k" sería $f'(g(a))$, ya que la continuidad de g en a implica que k tiende a 0 cuando lo hace h. Sin embargo existe un problema, en vigor aun para $h \neq 0$ podría ser que $g(a+h) - g(a) = 0$ para algún valor de h. Entonces consideremos la estrategia a seguir

Teorema. Regla de la cadena

Si g es diferenciable en a, y f diferenciable en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es diferenciable en a y además:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Demostración:

Definimos una función Φ de la siguiente manera

$$\Phi(h) = \begin{cases} \dfrac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} & \text{si } g(a+h) - g(a) \neq 0 \\ f'(g(a)) & \text{si } g(a+h) - g(a) = 0 \end{cases}$$

Tendremos que $\Phi(h)$ es continua en 0

P.D $\lim_{h \to 0} \Phi(h) = \Phi(0) = f'(g(a))$

Se intuye fácilmente que Φ es continua en 0: cuando h tiende a 0, por teorema tenemos que y por la continuidad de g en a

$$\lim_{h \to 0} g(a+h) = g(a) \Rightarrow \lim_{h \to 0} g(a+h) - g(a) = 0$$

De manera que si tomo "h" muy pequeña, $g(a+h) - g(a)$ no es cero, entonces $\Phi(h)$ se aproxima a $f'(g(a))$ y si es cero entonces $\Phi(h)$ es igual a $f'(g(a))$, lo que es mejor ya que la continuidad en 0 de $\Phi(h)$ es el punto crucial de la demostración

Sabemos que f es diferenciable en $g(a)$, esto significa que

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(g(a)+k) - f(g(a))}{k} = f'(g(a))$$

Así que por definición de límite

1) Para $\varepsilon > 0$ $\exists \delta' > 0$ t.q si $0 < |k| < \delta' \Rightarrow \left| \dfrac{f(g(a)+k) - f(g(a))}{k} - f'(g(a)) \right| < \varepsilon$

pero también tenemos que g es diferenciable en a, y por lo tanto continua en a, es decir.

$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a) \Rightarrow \lim_{h\to 0} g(a+h) = g(a)$$

que por definición significa que

2) para $\delta' > 0$ $\exists \delta > 0$ t.q si $|h| < \delta \Rightarrow |g(a+h) - g(a)| < \delta'$.

Entonces sea h t.q $|h| < \delta$, si $k = g(a+h) - g(a) \neq 0$, entonces

$$\Phi(h) = \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} = \frac{f(g(a)+k) - f(g(a))}{k}$$

Entonces se dice $\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{k}$ decir que $|\Phi(h) - f'(g(a))| < \varepsilon$

por otro lado, si $g(a+h) - g(a) = 0$, entonces $\Phi(h) = f'(g(a))$ de manera que se verifica nuevamente que $|\Phi(h) - f'(g(a))| < \varepsilon$

$\therefore \lim_{h\to 0} \Phi(h) = \Phi(0) = f'(g(a))$

si $h \neq 0$ entonces tenemos

$$\frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \Phi(h) \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

Incluso aunque $g(a+h) - g(a) = 0$ (ya que en este caso ambos miembros de la igualdad son iguales a 0) por tanto

$$(f\circ g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \Phi(h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Método de aplicación

Teniendo $f(g(x))$ hacemos $u = g(x)$ quedando $f(u)$ y derivando

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u) \cdot u' \quad \text{sustituyendo la } u$$

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

I) $y = x^{\frac{m}{n}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$

Tenemos $y = (x^{\frac{1}{n}})^m$ Sea $u = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow y = u^m$

$\frac{d}{dx}(u^m) = m u^{m-1} \cdot u' = m (x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot (x^{\frac{1}{n}})' = m\, x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$

$= \boxed{\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}}$

II) $y = a^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a^x \cdot \ln(a)$

$y = a^x \Rightarrow y = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)}$ Sea $u = x\ln(a)$

$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot u' = e^{x\ln(a)} \cdot (x\ln a)' = \boxed{a^x \cdot \ln(a)}$

III) $y = \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$

$y = \left[\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2$ Sea $u = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$\frac{dy}{dx}(u^2) = 2u \cdot u' = 2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'$ Sea $v = \frac{1}{x}$

$2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = -2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}$

IV) $y = \ln(3x^2+1)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{3x^2+1}$

V) $y = x^x$

$y = x^x \Rightarrow y = e^{\ln(x^x)} = e^{x\ln(x)}$

$\frac{dy}{dx} = e^{x\ln(x)} \cdot (x\ln(x))' = x^x \cdot [\ln(x) + 1]$

VI) $y = \log_a(2x+1)$

$y = \log_a(2x+1) = \frac{\ln(2x+1)}{\ln(a)}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2x+1} \cdot \frac{1}{\ln(a)} = \frac{2}{(2x+1)\ln(a)}$

VII) $\log_x(\sin(x))$

$y = \log_x \sin(x) \Rightarrow = \frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \ln(x) - \frac{1}{x} \ln(\sin(x))}{\ln^2(x)}$

$\frac{\cot(x)\ln(x) - \frac{\ln(\sin(x))}{x}}{\ln^2(x)}$

Norma

Escaneado con CamScanner

Generalizaciones

I) $y = a^{f(x)}$

$$y = a^{f(x)} = e^{\ln(a^{f(x)})} = e^{f(x)\cdot\ln(a)}$$

$$\frac{dy}{dx} = a^{f(x)} \cdot [\ln(a)\, f(x)]' = \boxed{a^{f(x)}\left[f(x) + f'(x)\ln(a)\right]}$$

II) $y = [f(x)]^n$

$$y = [f(x)]^n \qquad \frac{dy}{dx} = \boxed{n\,[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)}$$

III) $y = f(x)^{g(x)}$

$$y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x)\ln(f(x))}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)^{g(x)} \cdot [g(x)\ln(f(x))]' = \boxed{f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln(f(x)) + \frac{f'(x)}{f(x)}\cdot g(x)\right]}$$

IV) $y = \log_a f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)\ln(a)} \cdot f'(x) = \boxed{\frac{f'(x)}{f(x)\ln(a)}}$$

V) $y = \log_x f(x)$

$$y = \log_x f(x) = \frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} \qquad \frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\ln(x) - \frac{\ln(f(x))}{x}}{\ln^2(x)}}$$

VI) $y = \log_{f(x)} g(x)$

$$y = \log_{f(x)} g(x) = \frac{\ln(g(x))}{\ln(f(x))} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{g'(x)}{g(x)}\cdot\ln(f(x)) - \frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\ln(g(x))}{\ln^2(f(x))}}$$

$$\log_{x^2}(2x+1)$$

Escaneado con CamScanner

Notación funciones [illegible] y potencias

Con la notación de Leibniz la regla de la cadena debería escribirse

$$\frac{d\, f(g(x))}{dx} = \left.\frac{d\, f(y)}{dy}\right|_{y=g(x)} \cdot \frac{d\, g(x)}{dx}$$

En vez de esto se suele encontrar generalmente la siguiente proposición

Sea $y = g(x)$ y $z = f(y)$ Entonces

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Observe que z en $\frac{dz}{dx}$ denota la función compuesta $f \circ g$, mientras que la z en $\frac{dz}{dy}$ denota la función f.

Ejercicios Halle $\frac{dz}{dx}$

i) $z = \operatorname{sen}(y)$, $y = x + x^2$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dy}(\operatorname{sen}(y)) \cdot \frac{d}{dx}(x+x^2) = \cos(y)\cdot(2x+1) = \cos(x+x^2)(2x+1)$$

ii) $z = \operatorname{sen}(y)$, $y = \cos(x)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dy}(\operatorname{sen}(y)) \cdot \frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\cos(y)\cdot\operatorname{sen}(x) = -\cos(\cos(x))\cdot\operatorname{sen}(x)$$

iii) $z = \operatorname{sen}(v)$ $v = \cos(u)$ $u = \operatorname{sen}(x)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dv}(\operatorname{sen}(v)) \cdot \frac{d}{du}(\cos(u)) \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(x))$$

$$= -\cos(v)\cdot\operatorname{sen}(u)\cdot\cos(x) = -\cos(\cos(u))\cdot\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))\cdot\cos(x)$$

$$= -\cos(\cos(\operatorname{sen}(x)))\cdot\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))\cdot\cos(x)$$

Observamos que es igual al método de aplicación de la regla de la cadena

Otras funciones especiales (Hiperbolicas)

- $\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$
- $\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
- $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$
- $\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$
- $\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$
- $\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)}$

Derivadas

i) $y = \sinh(x)$

$$\frac{d}{dx}(\sinh(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}(e^{x}) - \frac{d}{dx}(e^{-x})\right) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \boxed{\cosh(x)}$$

ii) $y = \cosh(x)$

$$\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \boxed{\sinh(x)}$$

iii) $y = \tanh(x)$

$$y = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \qquad \frac{d}{dx}(\tanh(x)) = \frac{\cosh(x)\cdot\cosh(x) - \sinh(x)\cdot\sinh(x)}{\cosh^{2}(x)}$$

$$= \frac{\cosh^{2}(x) - \sinh^{2}(x)}{\cosh^{2}(x)} = 1 - \tanh^{2}(x) = \boxed{\operatorname{sech}^{2}(x)}$$

iv) $y = \operatorname{csch}(x)$

$$y = \operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sinh(x)}\right) = -\frac{\cosh(x)}{\sinh^{2}(x)} = -\coth(x)\cdot\operatorname{csch}(x)$$

v) $y = \operatorname{sech}(x)$

$$y = \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cosh(x)}\right) = -\frac{\sinh(x)}{\cosh^{2}(x)} = -\tanh(x)\cdot\operatorname{sech}(x)$$

vi) $y = \coth(x)$

$$y = \coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tanh(x)}\right) = -\frac{\operatorname{sech}^{2}(x)}{\tanh^{2}(x)} = -\frac{1}{\cosh^{2}(x)\tanh^{2}(x)}$$

$$= -\frac{1}{\sinh^{2}(x)} = -\operatorname{csch}^{2}(x)$$

Funciones Inversas

Teorema 1.-

Si f es continua e inyectiva en un intervalo, entonces f es creciente o decreciente en dicho intervalo

Dem.-

(1) Si $a<b<c$ son tres puntos del intervalo, entonces

i) $f(a)<f(b)<f(c)$ ii) $f(a)>f(b)>f(c)$ pues $f(a)\neq f(b)\neq f(c)$ Inyectiva

Supongamos que $f(a)<f(c)$, si $f(b)<f(a)$ entonces aplicando el T.V.I. al intervalo $[b,c]$, se obtendrá un x con $b<x<c$ y $f(x)=a$, lo que contradice que f sea inyectiva en $[a,c]$. Analogamente si $f(b)>f(c)$ conduciría a una contradicción de manera que $f(a)<f(b)<f(c)$

(2) Si $a<b<c<d$ son cuatro puntos del intervalo, entonces

i) $f(a)<f(b)<f(c)<f(d)$ ii) $f(a)>f(b)>f(c)>f(d)$

ya que puede aplicarse (1) primero a los puntos $a<b<c$ y luego a los puntos $b<c<d$.

(3) Tomemos cualquier $a<b$ y supongamos que $f(a)<f(b)$. Entonces f es creciente ya que si c y d son dos puntos cualesquiera del intervalo, podemos aplicar (2) al conjunto $\{a,b,c,d\}$ ■

Propiedad explicada Pag (235, Spivak)

Tenemos que si f es una función continua, creciente o decreciente cuyo dominio es un intervalo de la forma (a,b), $(-\infty,b)$, (a,∞), $\mathbb{R}$ entonces el dominio de f^{-1} es también un intervalo de una cuatro formas.

Teorema 2.-

Si f es continua e inyectiva en un intervalo, entonces f^{-1} es también continua

Dem.-

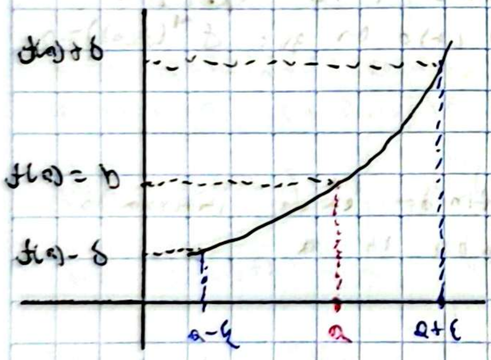
Según el Teorema 1 sabemos que f es creciente o decreciente. Podemos suponer que f es creciente ya que, entonces, el caso en que f es decreciente se puede tratar de manera análoga acudiendo al recurso habitual de usar $-f$, también podemos suponer que el intervalo en el que f esté definida es abierto, ya que es fácil ver que una función continua, creciente o decreciente, en cualquier intervalo puede extenderse a otra definida en un intervalo abierto mayor.

Hemos de demostrar que $\lim_{x\to b} f^{-1}(x) = f^{-1}(b)$ para cada $b \in Dom(f^{-1})$. Este número b es de la forma $f(a)$ para un cierto a del dominio de f.

P.D. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que $|x - b| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(x) - f^{-1}(b)| < \varepsilon$

$$|x - f(a)| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(x) - f^{-1}(f(a))| < \varepsilon$$
$$|x - f(a)| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(x) - a| < \varepsilon$$

Entonces queremos que $-\delta + f(a) < x < f(a) + \delta$ y $-\varepsilon + a < f^{-1}(x) < a + \varepsilon$



En la figura 1 se sugiere la manera de hallar δ (recordando que girando la figura lateralmente puede observarse la gráfica de f^{-1}). Como

$$a - \varepsilon < a < a + \varepsilon$$

se deduce que, porque la función es creciente que:

$$f(a-\varepsilon) < f(a) < f(a+\varepsilon)$$

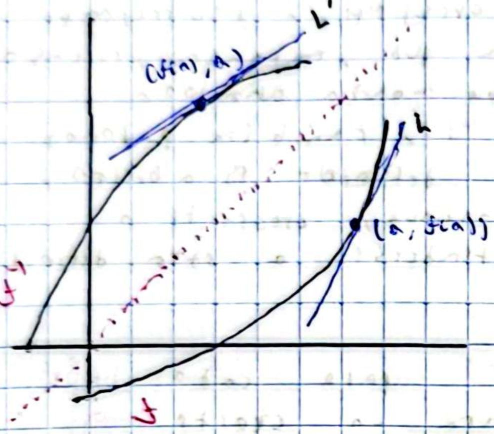
Entonces sea $\delta = \min\{f(a-\varepsilon) - f(a), f(a+\varepsilon) - f$

La elección de esta δ garantiza que $f(a-\varepsilon) \leq f(a) - \delta$ y $f(a) + \delta \leq f(a+\varepsilon)$, por lo tanto si

$f(a) - \delta < x < f(a) + \delta \Rightarrow f(a-\varepsilon) < x < f(a+\varepsilon)$, como f es creciente, f^{-1} también, obtenemos

$$f^{-1}(f(a-\varepsilon)) < f^{-1}(x) < f^{-1}(f(a+\varepsilon))$$
$$\Downarrow$$
$$a - \varepsilon < f^{-1}(x) < a + \varepsilon \Rightarrow |f^{-1}(x) - a| < \varepsilon \ //$$

Una vez vista la continuidad de f^{-1}, faltaría ver qué pasa con la diferenciabilidad.



En la imagen se muestra la gráfica de una función inyectiva, con la recta tangente L en $(a, f(a))$. Si la imagen se refleja con respecto a la diagonal se observa que la gráfica de f^{-1} y la recta tangente L' en $(f(a), a)$.

La pendiente de L' es el recíproco de L. En otras palabras parece que

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

También podría escribirse de manera que exprese $(f^{-1})'(b)$ directamente para cada b del dominio de f^{-1}

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Sin embargo esta demostración geométrica no basta para explorar analíticamente la diferenciabilidad de f^{-1}, por el caso en que $f^{-1}(f(a))=0$

Teorema 3:

Si f es una función continua e inyectiva definida en un intervalo y $f^{-1}(f(a)) = 0$, entonces f^{-1} no es diferenciable en a

Dem: Tenemos que $f(f^{-1}(x)) = x$

Si f^{-1} fuese diferenciable en a, la regla de la cadena implicaría que

$$\frac{d}{da}(f(f^{-1}(a))) = f'(f^{-1}(a)) \cdot (f^{-1})'(a) = 1$$

Por tanto $0 \cdot (f^{-1})'(a) = 1$ lo cual es imposible

Un ejemplo de esto es $f(x) = x^3$

$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$ $f'(0) = 0$ y $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ $(f^{-1})(0) = 0$ con lo que

f^{-1} no es diferenciable en 0

Teorema 1.-

Sea f una función continua e inyectiva definida en un intervalo y supongamos que f es diferenciable en $f^{-1}(b)$, con derivada $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. Entonces f^{-1} es diferenciable en b y además

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Dem: Sea $b = f(a)$, entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - a}{h}$$

Cada número $b+h$ del dominio de f^{-1} puede escribirse de la forma

$$b+h = f(a+k)$$

para un único k, pues f es inyectiva. Entonces:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(f(a+k)) - a}{f(a+k) - b} = \lim_{h \to 0} \frac{k}{f(a+k) - f(a)}$$

Efectivamente vamos por buen camino, no es difícil obtener una expresión explícita para k ya que:

$$b+h = f(a+k) \Rightarrow f^{-1}(b+h) = f^{-1}(f(a+k)) \Rightarrow f^{-1}(b+h) = a+k \Rightarrow$$

$$k = f^{-1}(b+h) - a \Rightarrow k = f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b).$$

Según el Teorema 2, la función f^{-1} es continua en b. Esto significa que k tiende a 0 cuando h tiende a 0. Como

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(a+k) - f(a)}{k} = f'(a) = f'(f^{-1}(b)) \neq 0 \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{k}{f(a+k) - f(a)} = \frac{1}{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+k) - f(a)}{k}} = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

$$\therefore (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Ejercicios

I) Si n es impar, sea $f_n(x) = x^n$ $\forall x$ y si n es par sea $f_n = x^n$ para $x \geq 0$, en ambos casos $f(x)$ es inyectiva, encontrar la derivada de su función inversa

Tenemos $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ como $f'(x) = nx^{n-1}$ y $f'(0) = 0$ y además $f^{-1}(0) = 0$ entonces $f'(f^{-1}(0)) = 0$ con lo que f^{-1} no es derivable en 0, pero para los demás

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n\,x^{1-\frac{1}{n}}} = \boxed{\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}}$$

II) $f(x) = e^x$

$f^{-1}(x) = \ln(x)$ ... $f'(x) = e^x$ ... logaritmo de ...

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

III) ~~Hallar~~ $\frac{d}{dx}(\arcsin(x))$

$\sin = f(x) = \sin(x)$ entonces $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

como $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Rightarrow \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

IV) $f(x) = \arccos(x)$

Si $f(x) = \cos(x)$ entonces $f^{-1}(x) = \arccos(x)$

$$(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

V) $f(x) = \arctan(x)$

Si $f(x) = \tan(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = \arctan(x)$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))}$$

como $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$

$\sec^2(\arctan(x)) = 1 + \tan^2(\arctan(x))$

así

$$\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \boxed{\frac{1}{1+x^2}}$$

VI) $y = \operatorname{arccsc}(x)$

$f(x) = \csc(x)$ $\quad f^{-1}(x) = \operatorname{arccsc}(x)$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc}(x)) = \frac{1}{-\cot(\operatorname{arccsc}(x)) \cdot \csc(\operatorname{arccsc}(x))}$$

$\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$

$\cot(x) = \sqrt{\csc^2(x) - 1}$

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\operatorname{arccsc}(x)] = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

VII) $y = \operatorname{arcsec}(x)$

$f(x) = \sec(x)$ $\quad f^{-1}(x) = \operatorname{arcsec}(x)$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec}(x)) = \frac{1}{\tan(\operatorname{arcsec}(x)) \cdot \sec(\operatorname{arcsec}(x))}$$

$1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$

$\tan(x) = \sqrt{\sec^2(x) - 1}$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec}(x)) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

VIII) $y = \operatorname{arccot}(x)$

$f(x) = \cot(x)$ $\quad f^{-1}(x) = \operatorname{arccot}(x)$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot}(x)) = \frac{1}{-\csc^2(\operatorname{arccot}(x))}$$

$\csc^2(x) = \cot^2(x) + 1$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot}(x)) = -\frac{1}{x^2+1}}$$

IX) $y = \operatorname{arcsinh}(x)$

$f(x) = \sinh(x)$ $\quad f^{-1}(x) = \operatorname{arcsinh}(x)$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsinh}(x)) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh}(x))}$$

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$\cosh(x) = \sqrt{1 + \sinh^2(x)}$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsinh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

X) $y = \text{arc}\cosh(x)$

$f(x) = \cosh(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = \text{arc}\cosh(x)$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc}\cosh(x)) = \frac{1}{\sinh(\text{arc}\cosh(x))}$$

$$\sinh(x) = \sqrt{\cosh^2(x) - 1}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\text{arc}\cosh(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$$

XI) $y = \text{arc}\tanh(x)$

$f(x) = \tanh(x) \qquad f^{-1}(x) = \text{arc}\tanh(x)$

$$1 - \tanh^2(x) = \text{sech}^2(x)$$

$\tanh^2 x$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc}\tanh(x)) = \frac{1}{\text{sech}^2(\text{arc}\tanh(x))}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\text{arc}\tanh(x)) = \frac{1}{1-x^2}}$$

XII) $y = \text{arc}\,\text{csch}(x)$

$f(x) = \text{csch}(x) \qquad f^{-1}(x) = \text{arc}\,\text{csch}(x)$

$$\coth^2(x) - 1 = \text{csch}^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc}\,\text{csch}(x)) = -\frac{1}{\coth(\text{arc}\,\text{csch}(x)) \cdot \text{csch}(\text{arc}\,\text{csch}(x))}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\text{arc}\,\text{csch}(x)) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}}$$

XIII) $y = \text{arc}\,\text{sech}(x)$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\text{arc}\,\text{sech}(x)) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}}$$

XIV) $y = \text{arc}\coth(x)$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\text{arc}\coth(x)) = \frac{1}{1-x^2}}$$

Derivada Implícita

El círculo unitario de radio 1 con centro en el origen, puede representarse implícitamente mediante la ecuación $x^2+y^2=1$ ó explícitamente por las ecuaciones $y=\sqrt{1-x^2}$ $y=-\sqrt{1-x^2}$
una representación explícita de una curva del plano xy está dada por un par de ecuaciones que expresan y en términos de x o x en términos de y y son de la forma $y=f(x)$ ó $x=f(y)$

Es conveniente tener una forma de calcular derivadas de funciones implícitas, dado que en ocasiones es difícil poder despejar una de las variables

La estrategia a seguir es lo siguiente:

i) $y^5+y+x=0$

• Derivamos ambos lados respecto a x

$$\frac{d}{dx}(y^5)+\frac{d}{dx}(y)+\frac{d}{dx}(x)=\frac{d}{dx}(0)$$

• Para términos con "y" utilizamos la regla de la cadena

$$5y^4\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}+1=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(5y^4+1)+1=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}(5y^4+1)=-1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{5y^4+1}$$

ii) $y^2x^2+x^3=4$

$$\frac{d}{dx}(y^2x^2)+\frac{d}{dx}(x^3)=\frac{d}{dx}(4) \Rightarrow \frac{d}{dx}(y^2)\cdot x^2+\frac{d}{dx}(x^2)\cdot y^2+3x^2=0$$

$$\Rightarrow 2y\cdot\frac{dy}{dx}x^2+2x\cdot y^2+3x^2=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}(2yx^2)+2y^2x+3x^2=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2y^2x+3x^2}{2yx^2}$$

iii) $y^2x+\ln(x)y=0$

$$\frac{d}{dx}(y^2x+\ln(x)y)=\frac{d}{dx}(0) \Rightarrow \frac{d}{dx}(y^2)x+\frac{d}{dx}(x)y^2+\frac{d}{dx}(\ln(x))y+\frac{d}{dx}(y)\ln(x)=$$

$$\Rightarrow 2yx\frac{dy}{dx}+y^2+\frac{y}{x}+\frac{dy}{dx}\ln(x)=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}(2yx+\ln(x))+y^2-\frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}-y^2}{2yx+\ln(x)}$$

2

iv) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial x}(y^3) - 3a\frac{\partial}{\partial x}(xy) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - 3a\left(y + x \cdot \frac{dy}{dx}\right)$

$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 3ay - 3ax\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3ay - 3x^2}{3y^2 - 3ax} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$

v) $\cos(x)\,y + \ln(y)\,a^x + x = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}(\cos(x) \cdot y) + \frac{\partial}{\partial x}(\ln(y) \cdot a^x) + \frac{\partial}{\partial x}(x) = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}(\cos(x))y + \frac{\partial}{\partial x}(y) \cdot \cos(x) + \frac{\partial}{\partial x}(\ln(y)) \cdot a^x + \frac{\partial}{\partial x}(a^x) \cdot \ln(y) = 0$

$-\operatorname{sen}(x) \cdot y + \cos(x) \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{a^x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} + a^x \ln(a)\ln(y) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}(x)\,y - a^x\ln(a)\ln(y)}{\cos(x) + \frac{a^x}{y}}$$

Regla general (teorema de la derivada implícita)

En general una representación implícita de una curva en el plano xy está dada por una sola ecuación x,y de la forma $F(x,y) = 0$, entonces tendremos

$\frac{\partial}{\partial x}(F(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(0)$

Tenemos que $F(x,y) = 0$ tendrá términos donde solo aparecen "x" para estos términos tendremos simplemente que

$\frac{\partial}{\partial x}(F(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(F(x,y))$

Pero para los términos donde se tengan "x" y "y" se tendrá usando la regla de la cadena

$\frac{\partial}{\partial x}(F(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(F(x,y)) \cdot \frac{dy}{dx}$

Entonces

$\frac{\partial}{\partial x}(F(x,y)) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(F) + \frac{\partial}{\partial y}(F) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ Entonces

$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}}$

En el caso $\frac{\partial F}{\partial y}$ los "x" serán constantes

En el caso $\frac{\partial F}{\partial x}$ los "y" serán constantes

Ejercicios

i) $y^2\cos(x) = a^2\sin(3x)$

$F(x,y) = y^2\cos(x) - a^2\sin(3x)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\cos(x) - a^2\sin(3x)\right)}{\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\cos(x) - a^2\sin(3x)\right)} = -\frac{2y\cos(x)}{-y^2\sin(x) - 3a^2\cos(3x)}$$

ii) $\log_3(2x+1)y^2 + \tan(\ln(y))e^{x^2} = F(x,y)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(\log_3(2x+1)y^2 + \tan(\ln(y))e^{x^2}\right)}{\frac{\partial}{\partial x}\left(\log_3(2x+1)y^2 + \tan(\ln(y))e^{x^2}\right)} =$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\log_3(2x+1)y + \sec^2(\ln(y))\cdot\frac{1}{y}e^{x^2}}{\frac{2}{(2x+1)\ln(3)}y^2 + \tan(\ln(y))e^{x^2}\cdot 2x}$$

iii) $y = \arcsin(x)$

$y = \arcsin(x) \Rightarrow \sin(y) = x \qquad \frac{d}{dx}(\sin(y)) = \frac{d}{dx}(x) \Rightarrow \cos(y)\cdot\frac{dy}{dx} =$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

iv) $y = x^{x^{x^{\cdots}}}$

$y = x^{x^{\cdots}} \Rightarrow y = x^y \Rightarrow \ln(y) = y\ln(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln(y)) = \frac{d}{dx}[y\ln(x)]$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(y)\cdot\ln(x) + \frac{d}{dx}(\ln(x))\cdot y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\ln(x)\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x - yx\ln(x)} = \frac{x^{2y}}{x(1 - x^y\ln(x))} = \frac{x^{2y-1}}{1 - x^y\ln(x)}$$

vi) $y = \sin(\sin(\sin(\cdots(x)\cdots)))$

$y = \sin(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$

Escaneado con CamScanner

vii) $y = x^{y^{x^{\cdot^{\cdot}}}}$

$y = x^{y^y} \Rightarrow \ln(y) = y^y \cdot \ln(x) \Rightarrow \ln(y) = e^{y\ln(y)} \cdot \ln(x)$

$\frac{d}{dx}(\ln(y)) = \frac{d}{dx}\left(e^{y\ln(y)} \cdot \ln(x)\right) \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{y\ln(x)}\right)\cdot \ln(x) + \frac{d}{dx}(\ln(x))\, e^{y\ln(y)}$

$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = y^y \cdot \frac{d}{dx}(y\ln(y)) \cdot \ln(x) + \frac{y^y}{x}$

$\frac{dy}{dx} = y^{y+1}\cdot\left[\frac{dy}{dx}\cdot\ln(y) + \frac{dy}{dx}\right]\cdot\ln(x) + \frac{y^{y+1}}{x}$

$\frac{dy}{dx} = y^{y+1}\cdot\ln(x)\cdot\ln(y)\frac{dy}{dx} + y^{y+1}\ln(x)\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{y^{y+1}}{x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^{y+1}}{1 - y^{y+1}\ln(x)\ln(y) - y^{y+1}\ln(x)} = \frac{y^{y+1}}{1 - y^{y+1}\cdot y^y\ln^2(x) - y^{y+1}\ln(x)}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^{y+1}}{1 - y^{2y+1}\ln^2(x) - y^{y+1}\ln(x)}$

viii) $y = \ln(\sin(\ln(\sin(\dots(x)\dots))))$

$y = \ln(\sin(y)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$

ix) $y = f(x)^{f(x)^{f(x)^{\cdots}}}$

$y = f(x)^y \Rightarrow \ln(y) = y\ln(f(x))$

$\frac{d}{dx}(\ln(y)) = \frac{d}{dx}(y)\ln(f(x)) + \frac{d}{dx}[\ln(f(x))]\cdot y$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\cdot\ln(f(x)) + \frac{f'(x)}{f(x)}\cdot y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}}{1 - y\ln(f(x))}$

X) $y = f(x)^{g(x)^{f(x)\cdots}}$

$$y = f(x)^{g(x)^y} \Rightarrow \ln(y) = g(x)^y \ln(f(x))$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(y)) = \frac{d}{dx}(g(x)^y)\cdot \ln(f(x)) + \frac{d}{dx}(\ln(f(x)))\cdot g(x)^y$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = g(x)^y \cdot\left[\frac{dy}{dx}\ln(g(x)) + \frac{g'(x)}{g(x)}\cdot y\right] + \frac{f'(x)}{f(x)}\cdot g(x)^y$$

$$\frac{dy}{dx} = y\, g(x)^y \ln(g(x)) \frac{dy}{dx} + y\, g(x)^y \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}\cdot y + y\, g(x)^y \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\, g(x)^y \ln(g(x)) \frac{dy}{dx} + y^2 g(x)^{y-1} \cdot g'(x) + y\, g(x)^y \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 g(x)^{y-1}\cdot g'(x) + y\, g(x)^y \frac{f'(x)}{f(x)}}{1 - y\, g(x)^y \ln(g(x))}$$

XI) $y = f(f(f\cdots(x)\cdots))$

$y = f(y) \quad \frac{dy}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(f(y)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(y)\cdot\frac{dy}{dx} \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx} - f'(y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \frac{dy}{dx}(1 - f'(y)) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$

XII) $y = f(g(f(\cdots g(f(x))\cdots)))$

$y = f(g(y)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f(g(y))) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(g(y))\cdot g'(y)\cdot\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - f'(g(y))\cdot g'(y)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}(1 - f'(g(y))\cdot g'(y)) = 0 \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx} = 0$

Maximos y minimos

Def.- Sea f una función y A un conjunto de números contenido en el dominio de f. Decimos que un punto $x \in A$ es un punto maximo de f si:

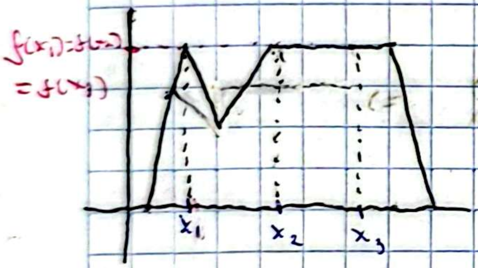
$$f(x) \geq f(y) \quad \forall y \in A$$

El numero $f(x)$ se denomina valor maximo de f en A.

Def. Sea f una función y A un conjunto de números contenido en el dominio de f. Decimos que un punto $x \in A$ es un punto minimo de f si:

$$f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in A$$

El numero $f(x)$ se denomina valor minimo de f en A.



Podemos darnos cuenta que una función f podría tener muchos puntos maximos, aunque a lo sumo solo un valor maximo, en el caso de la figura sería $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$

En general se trabajarán en el caso en que A sea un intervalo cerrado $[a,b]$; si f es continua entonces el teorema de Weierstrass (Teorema fuerte 3) nos garantiza que f alcanza su valor maximo en $[a,b]$

Teorema 1:

Sea f definida sobre (a,b). Si x es un punto maximo (ó minimo) de f en (a,b) y f es diferenciable en x, entonces $f'(x)=0$

Dem:- (caso del maximo)

Como x es un punto maximo se tendrá que $f(x) \geq f(y)$ $\forall y \in (a,b)$. Entonces $f(y)-f(x) \leq 0$ entonces tendremos

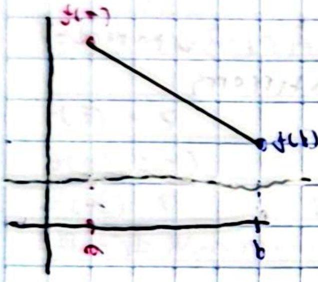
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0 \text{ si } x>y \qquad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 0 \text{ si } y \geq x$$

Con esto sabemos que

$$\lim_{\substack{y \to x^+ \\ (x>y)}} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0 \quad y \quad \lim_{\substack{y \to x^- \\ (x<y)}} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 0$$

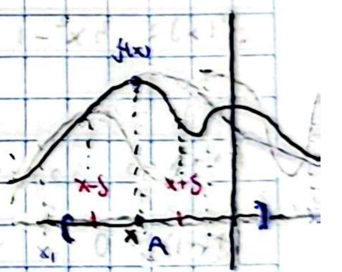
Además $f'(x) \geq 0$ y $f'(x) \leq 0$

Como f es diferenciable en x, ambos límites deben ser iguales entonces $f'(x) \geq 0$ y $f'(x) \leq 0$ se deben cumplir al mismo tiempo con lo cual $f'(x) = 0$ ■ (para el mínimo es similar)



En esta figura se ve porque no se puede sustituir (a,b) por $[a,b]$ en el teorema pues puede negar el caso en que un punto $(f(a))$ sea máximo pero $f'(x)$ no es cero. A no ser que se añada la hipótesis de que $x \in (a,b)$

Def.- Sea f una función y A un conjunto de números contenidos en el dominio de f. Un punto $x \in A$ es un punto máximo (mínimo) local de f en A si $\exists \delta > 0$ tal que x es un punto máximo de f sobre $A \cap (x-\delta, x+\delta)$



Teorema 2:

Si x es un máximo o mínimo local de f en (a,b) y f diferenciable en x entonces $f'(x) = 0$

Claramente el recíproco del teorema 2 no es cierto, tal es el caso de $f(x) = x^3$, tenemos que $f'(0) = 0$ pero f no posee ningún máximo o mínimo local en todo su dominio. El por qué de esto lo veremos más adelante. Es decir: la condición $f'(x) = 0$ no implica que x sea un punto máximo o mínimo local de f

Def.- Un punto crítico de una función f es un número x tal que

$$f'(x) = 0$$

Al número $f(x)$ se le denomina valor crítico de f

Como vimos para un intervalo cerrado no se puede estar seguro si un punto sería maximo o no. pero definiendo a los puntos criticos tenemos una forma de encontrar los maximos y minimos en un intervalo cerrado. Para localizarlos deben considerarse tres clases de puntos

(1) Los puntos criticos de $[a,b]$

(2) Los puntos extremos a y b

(3) Aquellos puntos x de $[a,b]$ tales que f no es diferenciable en x

Si X es un punto maximo o minimo de f en $[a,b]$, entonces x debe pertenecer a una de las tres clases anteriores

Ejercicios

1) Encuentra el maximo y minimo de $f(x) = x^3 - x$ en un intervalo $[-1,2]$

$f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}$

$x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$

Ambas soluciones estan dentro del intervalo $[-1,2]$. Ademas

$f(-1) = 0$ y $f(2) = 6$

Entonces

$f(-1) = 0$

$f(-\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$

$f(\sqrt{\frac{1}{3}}) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$

$f(2) = 6$

En $x = 2$ hay un maximo $f(x) = 6$

En $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ hay un minimo $f(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$

2) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, en $(-1,1)$

$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} \Rightarrow \frac{2x}{(1-x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

Pero en los extremos tenemos que los valores crecen indefinidamente, entonces no tendra maximo y el minimo sera $f(0) = 1$

$\lim_{x \to 1}$

3) $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 3, 5, 7, 9 \quad \text{en } (0, 8.5) \\ 5 & x = 3 \\ -3 & x = 5 \\ 9 & x = 7 \\ 7 & x = 8 \end{cases}$

Tenemos $f'(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 3, 5, 7, 9 \\ 0 & x = 3 \\ 0 & x = 5 \\ 0 & x = 7 \\ 0 & x = 9 \end{cases}$

Los puntos críticos serán $3, 5, 7$ y 9, en los extremos a lo más es 0, y 8.5

$f(3) = 5$
$f(5) = -3$
$f(7) = 9$
$f(9) = 7$

El máximo está en $x = 7$ y es 9

El mínimo está en $x = 5$ y es -3

Criterio de la 1ra derivada

Si f es una función y x un punto máximo [illegible]
tenemos [illegible] $x_0 < x_0 < x_1$ [illegible]

(1) $f'(x_0) < 0$ $f(x) <$ $f'(x_1) > 0 \Rightarrow f(x)$ es mínimo

(2) $f'(x_0) > 0$ y $f'(x_1) < 0 \Rightarrow f(x)$ es máximo

Ejemplo

1) Hallar el máximo o mínimo local de $f(x) = 3x^3 + 2x^2$

$f'(x) = 9x^2 + 4x \Rightarrow 9x^2 + 4x = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0} \quad 9x + 4 = 0 \Rightarrow \underline{x_2 = -\frac{4}{9}}$

Evaluando antes y después

$x_2 = -\frac{4}{9} \quad f'\left(-\frac{5}{9}\right) = \frac{5}{9}$ y $f'\left(-\frac{3}{9}\right) = -\frac{1}{3}$ $\therefore$ en $x_2 = -\frac{4}{9}$ hay un máximo

$x_1 = 0 \quad f'\left(-\frac{1}{10}\right) = -\frac{31}{100}$ y $f'\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{49}{100}$ $\therefore$ en $x_1 = 0$ hay un mínimo