Calculo

Repaso de Lineal

Def.- Sea K un conjunto con dos operaciones binarias $+_K: K\times K \to K$ $\wedge$ $\cdot_K: K\times K \to K$, entonces K es un campo si se cumplen los sig:

- $+_K$ es conmutativa
- $+_K$ es asociativa
- $\exists 0_K \in K$ neutro aditivo
- $\forall a \in K$ $\exists b \in K$ t.q. $a +_K b = 0_K$
- $\cdot$ es asociativo
- $\cdot$ es conmutativa
- $\exists 1_K \in K$ neutro multiplicativo
- Todo $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0_K$ tiene inverso mult.
- $\lambda \cdot_K (\mu +_K v) = \lambda \cdot_K \mu +_K \lambda \cdot_K v$

El campo se denota como $(K, +, \cdot)$ y a los elementos de un campo se le denominan Escalares

Def.- Espacio vectorial.- Sea F un campo y V un conjunto. Un Espacio vectorial sobre F es aquel que se le definen las sig. operaciones

$\oplus: V\times V \to V$
$\odot: K\times V \to V$

Los cuales cumplen:

- $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$
- $u + v = v + u$
- $\exists 0_V$ t.q. $0_V + u = u + 0_V = V$
- $\forall u \in V$ $\exists w \in V$ t.q. $u + w = 0_V$
- $1_K \odot v = v$
- $\lambda \odot (\mu v) = \lambda \mu (v)$
- $(\lambda + \mu) v = \lambda v \oplus \mu v$
- $\lambda (v + w) = \lambda v + \lambda w$

Entonces decimos que V es un espacio vectorial y se denota $(V, +, \cdot, F)$. A los elementos del espacio vectorial se le denominan vectores

⋮

Continua en hojas sueltas

Teorema: (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)
Sea $(V, \langle;\rangle)$ un espacio producto interior, si $u, v \in V$
$\Rightarrow |\langle u;v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

Dem: si $u=\bar{0}$ ó $v=\bar{0}$ $\Rightarrow \langle u;v\rangle = 0$ y $\|u\|=0$ ó $\|v\|=0$
$\Rightarrow |\langle u;v\rangle| = 0 = \|u\|\|v\|$

si $u\neq\bar{0} \wedge v\neq\bar{0} \Rightarrow \bar{x}=\frac{1}{\|u\|}u$, $\bar{y}=\frac{1}{\|v\|}v$ son unitarios. por otra parte
$0 \leq \langle \bar{x}-\bar{y} ; \bar{x}-\bar{y}\rangle = \langle \bar{x};\bar{x}\rangle - \langle \bar{x};\bar{y}\rangle - \langle \bar{y};\bar{x}\rangle + \langle \bar{y};\bar{y}\rangle$
$= \|\bar{x}\|^2 - 2\langle \bar{x};\bar{y}\rangle + \|\bar{y}\|^2 = 2 - 2\langle \bar{x};\bar{y}\rangle$

$\Rightarrow 2\langle \bar{x};\bar{y}\rangle - 2 \leq 0 \Rightarrow \langle \bar{x};\bar{y}\rangle \leq 1 \Rightarrow \langle \frac{1}{\|u\|}u ; \frac{1}{\|v\|}v\rangle \leq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{\|u\|}\cdot\frac{1}{\|v\|}\langle u;v\rangle \leq 1 \Rightarrow \langle u;v\rangle \leq \|u\|\|v\|$

Reemplazando u por $-u$ en la ultima desigualdad se tiene

$\langle -u;v\rangle \leq \|-u\|\|v\| \Rightarrow -\langle u;v\rangle \leq \|u\|\|v\| \Rightarrow \langle u;v\rangle \geq -\|u\|\|v\|$

$\therefore$ Con estas dos $|\langle u;v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$ ■

Teorema: si $(V, \langle;\rangle)$ es un esp. producto interior, entonces la función $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ dada por $\|u\| = \sqrt{\langle u;u\rangle}$ define una norma en V

Dem: i) Como $\langle u;u\rangle \geq 0$ $\forall u\in V \Rightarrow \|u\| \geq 0$

ii) $\|u\|=0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle u;u\rangle}=0 \Leftrightarrow \langle u;u\rangle = 0 \Leftrightarrow u=\bar{0}$

iii) $\|\lambda u\| = \sqrt{\langle \lambda u;\lambda u\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle u;u\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle u;u\rangle} = |\lambda|\,\|u\|$

iv) $\|u+v\|^2 = \langle u+v;u+v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u;v\rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$
$= (\|u\|+\|v\|)^2 \Rightarrow \|u+v\|^2 \leq (\|u\|+\|v\|)^2 \Rightarrow \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ ■

~~Sean $u,v\in V$ por la desigualdad de~~

· Sea $(V, \langle;\rangle)$ un esp. producto interior y $u,v\in V-\{\bar{0}\}$. por la Desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$|\langle u;v\rangle| \leq \|u\|\|v\| \Rightarrow -\|u\|\|v\| \leq \langle u;v\rangle \leq \|u\|\|v\|$

$\Rightarrow -1 \leq \frac{\langle u;v\rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1$ por otra parte como $\cos: [0,\pi] \to [-1,1]$

es biyectiva y $\frac{\langle u;v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \in [0,1]$, entonces $\exists\, \theta \in [0,\pi]$ t.q
$\cos(\theta) = \frac{\langle u;v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$

Def.- Sea $(V; \langle;\rangle)$ un esp. producto interior y $u, v \in V - \{\bar{0}\}$
se define el ángulo entre u y v como el número real $\theta \in [0,\pi]$
t.q $\cos(\theta) = \frac{\langle u;v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$

Ejemplos:

1) Sea $(\mathbb{R}^2, \langle;\rangle)$ donde $\langle (x_1,x_2);(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$

Sean $u = (-3,4)$ y $v = (2,7)$ calcula $\measuredangle(u,v) = \theta = \arccos\left(\frac{\langle u;v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}\right)$

$\Rightarrow \measuredangle(u,v) = \arccos\left(\frac{22}{5\sqrt{53}}\right) \approx 0.92$ rad

2) Ahora con el producto interior $\langle (x_1,x_2);(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2$

$\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{50}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{102}}\right) = 0.68$ rad $\qquad (\|(x_1,x_2)\|^2 = x_1^2 + 2x_2^2)$

3) Sea $V = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$ y
$\langle,\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ t.q $\langle f,g\rangle = \int_0^1 (f\cdot g)(t)\,dt$

Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x$, $g(x) = x^2 - 1$ calcular $\measuredangle(f,g)$

$\langle f;f\rangle = \|f\|^2 = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}$, $\|g\|^2 = \int_0^1 (t^2-1)^2\, dt = \frac{8}{15} \Rightarrow \|f\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\|g\| = \sqrt{\frac{8}{15}}$

y $\langle f,g\rangle = \int_0^1 t(t^2-1)\,dt = -\frac{1}{4}$

$\therefore \measuredangle(f,g) = \arccos\left(\frac{\langle f,g\rangle}{\|f\|\,\|g\|}\right) = \arccos\left(\frac{-\frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{\frac{8}{15}}\right)}\right) = 2.205$ rad

Def.- Sean V, W y U espacios vectoriales sobre el campo F
una aplicación bilineal de $V\times W$ a U es una función

$\phi : V\times W \to U$ t.q

- $\phi(\lambda v + v, w) = \lambda\,\phi(v,w) + \phi(v,w)$
- $\phi(v, \lambda w_1 + w_2) = \lambda\,\phi(v,w_1) + \phi(v,w_2)$

Ejercicios:

1) Sea $(V, \langle;\rangle)$ un esp. producto interior. Demuestra que
$\langle;\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ es bilineal

i) $\langle \lambda v_1 + v_2 ; v \rangle = \langle \lambda v_1 ; v \rangle + \langle v_2 ; v \rangle = \lambda \langle v_1 ; v \rangle + \langle v_2 ; v \rangle$

ii) $\langle v , \lambda v_1 + v_2 \rangle = \langle v ; \lambda v_1 \rangle + \langle v ; v_2 \rangle = \lambda \langle v ; v_1 \rangle + \langle v ; v_2 \rangle$

2) Sea $ev: L(V,W) \times V \to W$ t.q. Demuestre que ev es bilineal
$(T, v) \to T(v)$

i) $ev(\lambda T_1 + T_2, v) = (\lambda T_1 + T_2)(v) = \lambda T_1(v) + T_2(v) = \lambda\, ev(T_1, v) + ev(T_2, v)$

ii) $ev(T, \lambda v_1 + v_2) = T(\lambda v_1 + v_2) = \lambda T(v_1) + T(v_2) =$
$= \lambda\, ev(T, v_1) + ev(T, v_2)$

3) Sea $comp: L(W,V) \times L(V,W) \to L(V,V)$
$(T_1, T_2) \to T_1 \circ T_2$

Pruebe que es bilineal

i) $comp(\lambda T_1 + R_1, T_2) = (\lambda T_1 + R_1) \circ T_2 = \lambda T_1 \circ T_2 + R_1 \circ T_2 = \lambda\, comp(T_1, T_2) + comp(R_1, T_2)$

ii) $comp(T_1, \lambda T_2 + S) = T_1 \circ (\lambda T_2 + S) = \lambda T_1 \circ T_2 + T_1 \circ S$
$= \lambda\, comp(T_1, T_2) + comp(T_1, S)$

Espacios métricos

Def.- Sea M un conjunto no vacío. Una métrica o distancia en M es una función $d: M \times M \to \mathbb{R}$ t.q.

- $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in M$
- $d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in M$
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x, y, z \in M$.

El par (M,d) se llama Espacio métrico.

Si $A \subset M$ no vacío entonces $d|_{A \times A}: A \times A \to \mathbb{R}$ t.q. $d|_{A\times A}(x,y) := d(x,y)$ es una métrica en A.
El par $(A, d|_{A \times A})$ se llama subespacio métrico de (M,d)

Ejemplo.-

1) $(\mathbb{R}, d)$ donde $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q. $d(x,y) = |y - x|$ es un espacio métrico

• ✓ • ✓ • ✓

2.- Si $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado $\Rightarrow$ $d: V\times V \to \mathbb{R}$ t.q $d(x,y) = \|y-x\|$ determina una métrica en V

3.- Sea $d: M_{m\times n}(\mathbb{R}) \times M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ t.q $d(A,B) = \max\{|a_{ij}-b_{ij}| \mid 1\le i\le m, 1\le j\le n\}$
Determina una métrica en $M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Dem.-

- como $|a_{ij}-b_{ij}| \geq 0 \ \forall ij \Rightarrow d(A,B) = \max\{|a_{ij}-b_{ij}| \ldots\} \geq 0$.

- $d(A,B) = 0 \iff |a_{ij}-b_{ij}| = 0 \ \forall ij \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} \Rightarrow A = B$

- $d(A,B) = \max\{|a_{ij}-b_{ij}| \mid 1\le i\le m, 1\le j\le n\}$
$= \max\{|b_{ij}-a_{ij}| \ldots\}$
$= d(B,A)$

- como $|a_{ij}-c_{ij}| \leq |a_{ij}-b_{ij}| + |b_{ij}-c_{ij}|$,

$\Rightarrow \max\{|a_{ij}-c_{ij}| \ldots\} \leq \max|a_{ij}-b_{ij}| + \max|b_{ij}-c_{ij}|$
$\Rightarrow d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$

Teorema (Desigualdad de Minkowski)
Sean $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ con $1\le i\le n \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$

Dem.- Sean $\bar{a} = (a_1,\ldots,a_n)$, $\bar{b} = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que $\langle \bar{a};\bar{b}\rangle \leq \|a\|\|b\|$

$\Rightarrow 2\langle \bar{a};\bar{b}\rangle \leq 2\|a\|\|b\| \Rightarrow 2\langle a;b\rangle \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i + \sum_{i=1}^{n}b_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n}a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2} + \sum_{i=1}^{n}b_i^2$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2$

$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$

Ejercicios.-

① Sean $a_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ $1\le i\le n$. Demuestre que $\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2$

ρ_i es métrica

4.- Sean (M_i, ρ_i) $1 \le i \le n$ esp. métricos y sea $M = \prod_{i=1}^{n} M_i$. Cada una de los sig funciones define una métrica

a) $d_2 : M \times M \to \mathbb{R}$ t.q. $d_2(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2(x_i, y_i)}$

b) $d_1 : M \times M \to \mathbb{R}$ t.q. $d_1(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(x_i, y_i)$

c) $d_\infty : M \times M \to \mathbb{R}$ t.q. $d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) = \max\{\rho_i(x_i, y_i) \mid 1 \le i \le n\}$

El conjunto M con cualquiera de estas métricas se llama Espacio métrico producto

a) Veamos que d_2 es una métrica.

- Como $\rho_i(x_i, y_i) \ge 0$ $\forall 1 \le i \le n \Rightarrow \rho_i^2(x_i, y_i) \ge 0 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2(x_i, y_i)} \ge 0$

$\Rightarrow d_2(\bar{x}, \bar{y}) \ge 0$

- $d_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \rho_i^2(x_i, y_i) = 0 \Leftrightarrow \rho_i^2(x_i, y_i) = 0 \;\; \forall i \overset{\text{def. métrica}}{\Leftrightarrow} x_i = y_i$

$\Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$

- Como $\rho_i(x_i, y_i) = \rho_i(y_i, x_i)$

$\Rightarrow d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2(x_i, y_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2(y_i, x_i)} = d(\bar{y}, \bar{x})$

- Veamos que $d_2(\bar{x}, \bar{z}) \le d_2(\bar{x}, \bar{y}) + d_2(\bar{y}, \bar{z})$

Como $\rho_i(x_i, z_i) \le \rho_i(x_i, y_i) + \rho_i(y_i, z_i)$ $\forall i$ $1 \le i \le n$ $x_i, y_i, z_i \in M_i$

$\Rightarrow \rho_i^2(x_i, z_i) \le [\rho_i(x_i, y_i) + \rho_i(y_i, z_i)]^2$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \rho_i^2(x_i, z_i) \le \sum_{i=1}^{n} [\rho_i(x_i, y_i) + \rho_i(y_i, z_i)]^2$

$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2(x_i, z_i)} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [\rho_i(x_i, y_i) + \rho_i(y_i, z_i)]^2} \overset{\text{por Minkowski}}{\le} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2(x_i, y_i)} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2(y_i, z_i)}$

$\Rightarrow d(\bar{x}, \bar{z}) \le d(\bar{x}, \bar{y}) + d(\bar{y}, \bar{z})$

b) Veamos que d_1 es una métrica

- Como $\rho_i(x_i, y_i) \ge 0$ $\forall i$ $1 \le i \le n$, $\Rightarrow d(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(x_i, y_i) \ge 0$

- $d_1(\bar{x},\bar{y})=0 \iff \sum_{i=1}^{n} \rho_i(x_i,y_i)=0 \iff \rho_i(x_i,y_i)=0 \quad \forall i \quad 1\leq i\leq n$

def métrica

$\Rightarrow x_i=y_i \Rightarrow \bar{x}=\bar{y}$

def. métricas

- como $\rho_i(x_i,y_i)=\rho_i(y_i,x_i) \quad 1\leq i\leq n$

$\Rightarrow d_1(\bar{x},\bar{y})=\sum_{i=1}^{n}\rho_i(x_i,y_i)=\sum_{i=1}^{n}\rho_i(y_i,x_i)=d_1(\bar{y},\bar{x})$

- como $\rho_i(x_i,z_i)\leq \rho_i(x_i,y_i)+\rho_i(y_i,z_i) \quad 1\leq i\leq n$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\rho_i(x_i,z_i)\leq \sum_{i=1}^{n}\rho_i(x_i,y_i)+\sum_{i=1}^{n}\rho_i(y_i,z_i) \Rightarrow d_1(\bar{x},\bar{z})\leq d_1(\bar{x},\bar{y})+d_1(\bar{y},\bar{z})$

ii) veamos que d_∞ es una métrica

- como $\rho_i(x_i,y_i)\geq 0 \ \forall\ 1\leq i\leq n \Rightarrow d_\infty=\max\{\rho_i(x_i,y_i) \mid 1\leq i\leq n\}\geq 0$

- $d_\infty(\bar{x},\bar{y})=0 \iff \max\{\rho_i(x_i,y_i) \mid 1\leq i\leq n\} \iff \rho_i(x_i,y_i)=0 \quad \forall i$

$\Rightarrow x_i=y_i \Rightarrow \bar{x}=\bar{y}$

- ~~$d_\infty(\bar{x},\bar{y})$~~ como $\rho_i(x_i,y_i)=\rho_i(y_i,x_i) \quad 1\leq i\leq n \Rightarrow$

$d_\infty(\bar{x},\bar{y})=\max\{\rho_i(x_i,y_i) \mid 1\leq i\leq n\}=\max\{\rho_i(y_i,x_i) \mid 1\leq i\leq n\}=d_\infty(\bar{y},\bar{x})$

- como $\rho_i(x_i,z_i)\leq \rho_i(x_i,y_i)+\rho_i(y_i,z_i) \quad \forall i \quad 1\leq i\leq n$

$\Rightarrow \max\{\rho_i(x_i,z_i)\}\leq \max\{\rho_i(x_i,y_i)\}+\max\{\rho_i(y_i,z_i)\}$

$\Rightarrow d_\infty(\bar{x},\bar{z})\leq d_\infty(\bar{x},\bar{y})+d_\infty(\bar{y},\bar{z})$

Ejercicio:

Sean (M_i,ρ_i) $1\leq i\leq n$ espacios métricos y $M=\prod_{i=1}^{n} M_i$, entonces:

$d_\infty(\bar{x},\bar{y})\leq d_2(\bar{x},\bar{y})\leq d_1(\bar{x},\bar{y})$ y $d_1(\bar{x},\bar{y})\leq n\, d_\infty(\bar{x},\bar{y})$

Dem:

- veamos que $d_\infty(\bar{x},\bar{y})\leq d_2(\bar{x},\bar{y})$.

como $\rho_i^2(x_i,y_i)\leq \rho_1^2(x_1,y_1)+\dots+\rho_i^2(x_i,y_i)+\dots+\rho_n^2(x_n,y_n)$

$\Rightarrow \sqrt{\rho_i^2(x_i,y_i)}\leq \sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1)+\dots+\rho_i^2(x_i,y_i)+\dots+\rho_n^2(x_n,y_n)}=d_2(\bar{x},\bar{y}) \quad \forall i \quad 1\leq i\leq n$

$\Rightarrow \rho_i(x_i, y_i) \leq d_2(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) = \max\{\rho_i(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \leq d_2(\bar{x}, \bar{y})$

$\therefore d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) \leq d_2(\bar{x}, \bar{y})$

- veamos que $d_2(\bar{x}, \bar{y}) \leq d_1(\bar{x}, \bar{y})$

por inducción n.

si $n=1 \Rightarrow d_2(x_1, y_1) = d_1(x_1, y_1)$

P.I

veamos que se cumple para $n=2$, como $\rho_1(x_1, y_1) \geq 0$ y $\rho_2(x_2, y_2) \geq 0$

$\Rightarrow 0 \leq \rho_1(x_1, y_1) \cdot \rho_2(x_2, y_2)$ o $0 \leq 2\rho_1(x_1, y_1)\rho_2(x_2, y_2)$

$\Rightarrow \rho_1^2(x_1, y_1) + \rho_2^2(x_2, y_2) \leq \rho_1^2(x_1, y_1) + 2\rho_1(x_1, y_1)\rho_2(x_2, y_2) + \rho_2^2(x_2, y_2)$ (a)

$\Rightarrow \sqrt{\rho_1^2(x_1, y_1) + \rho_2^2(x_2, y_2)} \leq \rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2)$

$\Rightarrow d_2(\bar{x}, \bar{y}) \leq d_1(\bar{x}, \bar{y})$

H.I supongamos que se cumple para los primeros $(n-1)$

i.e $\rho_1^2(x_1, y_1) + \dots + \rho_{n-1}^2(x_{n-1}, y_{n-1}) \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} \rho_i(x_i, y_i)\right)^2$

P.D se cumple para n

$\Rightarrow \rho_1^2(x_1, y_1) + \dots + \rho_{n-1}^2(x_{n-1}, y_{n-1}) + \rho_n^2(x_n, y_n) \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} \rho_i(x_i, y_i)\right)^2 + \rho_n^2(x_n, y_n)$

(a) $\leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} \rho_i(x_i, y_i) + \rho_n(x_n, y_n)\right)^2$

$\Rightarrow \sqrt{\rho_1^2(x_1, y_1) + \dots + \rho_n^2(x_n, y_n)} \leq \sum_{i=1}^{n} \rho_i(x_i, y_i) = d(\bar{x}, \bar{y})$

$\therefore d_2(\bar{x}, \bar{y}) \leq d_1(\bar{x}, \bar{y})$

- veamos que $d_1(\bar{x}, \bar{y}) \leq n\, d_\infty(\bar{x}, \bar{y})$

como $\rho_i(x_i, y_i) \leq \max\{\rho_j(x_j, y_j) \mid 1 \leq j \leq n\} = d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) \quad \forall i \; 1 \leq i \leq n$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \rho_i(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^{n} d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow d_1(\bar{x}, \bar{y}) = n\, d_\infty(\bar{x}, \bar{y})$

Ejercicio: Sea (M, d) un espacio métrico y $x_1, \dots, x_n \in M$ puntos tq $n \geq 2$. Demuestra que $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$

Dem.- por inducción sobre n

B.I se cumple para $n=2$ pues $d(x_1, x_2) = d(x_1, x_2)$

H.I supongamos que se cumple para "n", i.e.

P.I P.D $d(x_1, x_{n+1}) \leq d(x_1, x_2) + \dots + d(x_n, x_{n+1})$

Tenemos que $d(x_1, x_{n+1}) \underset{\text{Desigualdad del triangulo métrica}}{\leq} d(x_1, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \overset{HI}{\leq} d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})$

Ejercicio: Sea (M, d) espacio métrico. Demuestra que $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$ $\forall x, y, z \in M$

Dem.- Como $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \Rightarrow d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)$

por otro lado como $d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) \Rightarrow d(y,z) - d(x,z) \leq d(y,x)$

$\Rightarrow (d(x,z) - d(y,z)) \geq -d(x,y)$ y usando estas dos

$\therefore |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$

Def: Sea (M, d) espacio métrico y $A \subset M$ no vacío y $c \in M$ un punto. Se define la distancia del punto c a A como:

$d(c, A) = \inf\{d(c, a) \mid a \in A\}$

Ejercicio: Sea (M, d) un espacio métrico y $A \subseteq M$ no vacío. Demuestra que $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$

Dem: Por def tenemos que $d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$ $\forall a \in A$

$\Rightarrow d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,a)$ $\forall a \in A$ entonces $d(x,A) - d(x,y)$ es cota inferior de $\{d(y,a) \mid a \in A\}$. Entonces:

$d(x,A) - d(y,a) \leq \inf\{d(y,a) \mid a \in A\} \Rightarrow d(x,A) - d(x,a) \leq d(y,A)$

$\Rightarrow d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$

por otra parte $d(y,A) \leq d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a)$ $\forall a \in A$

$\Rightarrow d(y,A) - d(x,y) \leq d(x,a)$ $\forall a \in A$. Así $d(y,A) - d(x,y)$ es cota inferior de $\{d(x,a) \mid a\in A\}$ $\Rightarrow$ $d(y,A) - d(x,y) \leq \inf\{d(x,a) \mid a\in A\}$

$\Rightarrow d(y,A) - d(x,y) \leq d(x,A)$ $\Rightarrow$ $-d(x,y) \leq d(x,A) - d(y,A)$

$\therefore$ $-d(x,y) \leq d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$

$\therefore$ $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$

Espacio topológico

$\cap$

Espacio métrico $d: M\times M \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ — $B_\varepsilon(x) = \{z\in X \mid d(x,z) < \varepsilon\}$

$\cap$

Espacio normado $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ — $d(x,y) = \|x-y\|$

$\cap$

Espacio producto interno $\langle , \rangle: V\times V \to \mathbb{R}$ — $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

Topología de los Espacios métricos

En esta parte veremos la topología de un espacio métrico, esto es la determinada por sus abiertos. La cual usaremos para definir límite de sucesiones de funciones y sucesiones, continuidad, etc.

Def: Sea (M,d) un espacio métrico, $c\in M$ y $r\in\mathbb{R}^+$

1) La bola abierta con centro en "c" y radio "r" está dada por:

$B_r(c) = \{x\in M \mid d(x,c) < r\}$

2) La bola cerrada con centro en c y radio r está dada por:

$\bar{B}_r(c) = \{x\in M \mid d(x,c) \leq r\}$

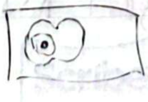
3) La esfera de radio r con centro en c está dada por:

$S(c,r) = \{x\in M \mid d(x,c) = r\}$

Def: Sea (M,d) espacio métrico y $U\subset M$. ~~Se dice que~~

Abierto

Se dice que U es abierto en (M,d) si $\forall x\in U$ $\exists B_r(x)$ en (M,d) t.q. $B_r(x)\subset U$



(M,d)

Ejercicio 1.- Considere $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$. Demuestre que $(a,b) \subset \mathbb{R}$ es abierto en $(\mathbb{R}, d)$, donde $d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $d(x,y) = |x-y|$

Dem.- Sea $x \in (a,b)$ p.d. $\exists B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R} \mid d(y,x) < r\}$

$= \{ y \in \mathbb{R} \mid |y-x| < r\}$

$= \{ y \in \mathbb{R} \mid -r < y-x < r\}$

$= \{ y \in \mathbb{R} \mid x-r < y < x+r\}$

$= (x-r, x+r)$ en $\mathbb{R}$ t.q. $B_r(x) \subset (a,b)$

Sea $r \leq \min\{x-a, b-x\}$, veamos que $B_r(x) \subset (a,b)$

Sea $z \in B_r(x) \Rightarrow |z-x| < r \Rightarrow -r < z-x < r \Rightarrow x-r < z < x+r$

Tenemos que $r < x-a \wedge r < b-x$ $\Rightarrow a < z < b \Rightarrow z \in (a,b)$

$\Rightarrow a < x-r \wedge r+x < b$

$\therefore B_r(x) \subset (a,b)$

Ejercicio 2.- Sea (M,d) esp. métrico. Demuestre que cualquier bola abierta en (M,d) es abierto en (M,d)

Dem.- Sea $c \in M$ y $r \in \mathbb{R}^+$ p.d. $B_r(c)$ es abierto en (M,d)

Sea $x \in B_r(c)$ veamos que $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B_\varepsilon(x) \subset B_r(c)$

Como $x \in B_r(c) \Rightarrow d(x,c) < r$. Sea $\varepsilon = r - d(x,c) > 0$

Veamos que $B_\varepsilon(x) \subset B_r(c)$

$\Rightarrow$ Sea $z \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow d(z,x) < \varepsilon \Rightarrow d(z,x) < r - d(x,c) \Rightarrow d(z,x) + d(x,c) < r$

$\Rightarrow d(z,c) < r \Rightarrow z \in B_r(c)$ $\therefore B_\varepsilon(x) \subset B_r(c)$

Ejercicio 3.- Demuestre que $U = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y > x+1\}$ es abierto en $(\mathbb{R}^2, d)$ donde $d: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

Dem.- Sea $c \in U$

Sea $r = \frac{1}{2} d(c, \ell)$, donde $\ell = x+1$, $\Rightarrow r = \frac{1}{2}\frac{|y_0 - x_0 - 1|}{\sqrt{2}}$

P.D. $B_r(c) \subset U$

Sea $(x,y) \in B_r(c) \Rightarrow d((x,y),(x_0,y_0)) < r \Rightarrow \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < r$

$\Rightarrow |x-x_0| < r \wedge |y-y_0| < r$

$\Rightarrow -r < x-x_0 < r \wedge -r < y-y_0 < r \Rightarrow -r+x_0 < x < r+x_0 \wedge -r+y_0 < y < r+y_0$

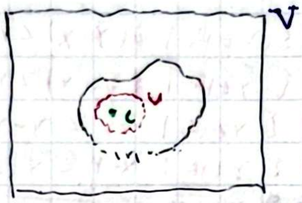
Por un lado $x < r+x_0 \Rightarrow -x_0 - r < -x$ y por otro $-r+y_0 < y \Rightarrow$ sumando

$y_0 - x_0 - 2r < y-x \Rightarrow y_0 - x_0 - 1 - 2r < y-x-1 \Rightarrow$ def. de "r"

$\Rightarrow 2\sqrt{2}r - 2r < y-x-1 \Rightarrow r(2\sqrt{2}-2) < y-x-1 \Rightarrow 0 < y-x-1 \Rightarrow y > x+1$

$\therefore (x,y) \in U$ $\therefore$ U es abierto

Def: Sea (M,d) un espacio métrico, $c \in M$, y $V \subset M$. Se dice que V es una vecindad de c, si existe $U \subset M$ abierto t.q $c \in U \wedge U \subset V$



Teorema: Sea (M,d) un espacio métrico, entonces:

1) $\emptyset$ y M son abiertos en (M,d)

2) Si $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ es una familia de abiertos en (M,d) $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ es abierto en (M,d)

3) Si $\{U_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ son abiertos en $(M,d) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ es abierto en (M,d)

Dem (1): Veamos que M es abierto en (M,d)
Sea $x \in M$. Así dado $r \in \mathbb{R}^+$ se tiene que $B_r(x) = \{y \in M \mid d(y,x) < r\}$
Pero $B_r(x) \subset M$ $\therefore$ M es abierto

Supongamos que $\emptyset$ no es abierto en (M,d), Así $\exists x \in \emptyset$ t.q $\forall r \in \mathbb{R}^+$ $B_r(x) \not\subset \emptyset$, lo cual es imposible $\therefore$ $\emptyset$ es abierto

Dem (2): Sea $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una familia de abiertos.

Sea $x \in \bigcup U_\alpha \Rightarrow \exists \beta \in I$ t.q $x \in U_\beta$ como U_β es abierto en (M,d) y $x \in U_\beta \Rightarrow \exists B_\varepsilon(x)$ t.q $B_\varepsilon(x) \subset U_\beta \subset \bigcup_{i \in I} U_\alpha$

Dem (3): Sea $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i \Rightarrow x \in U_i$ $\forall i \in I$, como U_i es abierto y $x \in U_i \Rightarrow \exists B_\varepsilon(x)$ t.q $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$ $\forall i$ $1 \leq i \leq n$,

tomo $\delta = \min\{\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ se tiene que $B_\delta(x) \subset B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$ $1 \leq i \leq n$
$\Rightarrow B_\delta(x) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$

Subconjunto

Def.- Sea M un conjunto. Una topología en M es un $\tau \subseteq P(M)$ t.q.:

1) $\emptyset, M \in \tau$
2) si $U_\alpha \in \tau$ $\forall \alpha \in I \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$
3) si $U_i \in \tau$ $1 \le i \le n \Rightarrow \bigcap_{i \in I}^{n} U_i \in \tau$

Ejercicio 1.- Sea $M = \{a, b, c, 1, 2, 3\}$ determina una topología en M

$\tau = \{\emptyset, M, \{a,b,c\}, \{1,2\}, \{1,2,a\}, \{a\}\}$

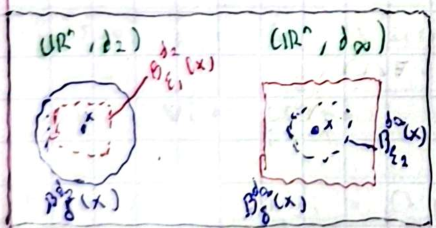
Cada elemento de τ es elemento de la potencia de M, $\emptyset, M \in \tau$ y las uniones e intersecciones de cada par de elementos de τ está en τ.

Def.- Sea M un conjunto no vacío y $d: M \times M \to \mathbb{R}$ una métrica en M. La topología en M determinada por la métrica d, está dada por:

$$\tau(M,d) = \{U \subseteq M \mid U \text{ es abierto en } (M,d)\}$$

Def.- Sea M un conjunto no vacío y $d, \rho : M \times M \to \mathbb{R}$ métricas. Se dice que d y ρ son equivalentes si y solo si determinan la misma topología i.e. $\tau(M,d) = \tau(M,\rho)$

Teorema.- Sea M un conjunto no vacío, y $d, \rho : M \times M \to \mathbb{R}$ métricas, entonces d y ρ son equivalentes si y solo si $\forall x \in M$ y $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$ $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ t.q. $B^d_{\varepsilon_1}(x) \subseteq B^\rho_\delta(x)$ y $B^\rho_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B^d_\delta(x)$



Dem.-

$\Rightarrow$) Supongamos que $d, \rho : M \times M \to \mathbb{R}$ son equivalentes, esto es $\tau(M,d) = \tau(M,\rho)$

Sea $x \in M$ y $\delta \in \mathbb{R}^+$ P.D. $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ t.q. $B^d_{\varepsilon_1}(x) \subseteq B^\rho_\delta(x)$ y $B^\rho_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B^d_\delta(x)$

(Teorema pasado) (una bola en un espacio métrico es abierta)

Como $B^\rho_\delta(x)$ es abierto en $\tau(M,\rho)$ y $\tau(M,d) = \tau(M,\rho) \Rightarrow B^\rho_\delta(x)$ es abierto en $(M,d) \overset{def.}{\Rightarrow} \exists \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ t.q. $B^d_{\varepsilon_1}(x) \subseteq B^\rho_\delta(x)$

Por otra parte como $B^d_\delta(x)$ es abierto en (M,d) y $\tau(M,d) = \tau(M,\rho)$ $\Rightarrow B^d_\delta(x)$ es abierto en $(M,\rho) \Rightarrow \exists \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ t.q. $B^\rho_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B^d_\delta(x)$

$\Leftarrow$) Supongamos que $\forall x \in M$ y $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$ $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ t.q. $B \subseteq B$ y $B \subseteq B$

P.D. $\tau(M,d) = \tau(M,\rho)$

Veamos que $\tau(M,d) \subseteq \tau(M,\rho)$. Sea $U \subseteq M$ abierto en (M,d).

Veamos que V es abierto en (M,ρ).

def. abierto

Sea $x\in V \Rightarrow \exists B_\delta^d(x)$ en (M,d) t.q. $B_\delta^d(x)\subset V$, y por hipótesis $\exists \varepsilon_2\in\mathbb{R}^+$ t.q. $B_{\varepsilon_2}^\rho(x)\subset B_\delta^d(x)\subset V \Rightarrow B_{\varepsilon_2}^\rho(x)\subset V \overset{def.}{\Rightarrow} V$ es abierto en (M,ρ)

Sea $V\in M$ abierto en (M,ρ). Veamos que V es abierto en (M,d)

Sea $x\in V \Rightarrow \exists B_\delta^\rho(x)\subset V$, y por hipótesis $\exists \varepsilon_1\in\mathbb{R}^+$ t.q. $B_{\varepsilon_1}^d(x)\subset B_\delta^\rho(x)\subset V \Rightarrow B_{\varepsilon_1}^d(x)\subset V \Rightarrow V$ es abierto en (M,d)

Ejercicio: Sean (M_i,ρ_i) $1\le i\le n$ espacios métricos y $M=\prod_{i=1}^{n} M_i$. Demuestra que las métricas $d_1, d_2, d_\infty: M\times M\to\mathbb{R}$ son equivalentes

Tip: $d_\infty(x,y)\le d_2(x,y)\le d_1(x,y)\le n\, d_\infty(x,y)$

Def.- Sea (M,d) un espacio métrico y $A\subset M$, se dice que A es cerrado en $(M,d) \iff A^c=M-A$ es abierto

Ejercicio 1.- Sea (M,d) un espacio métrico. Demuestra que toda bola cerrada en M es un conjunto cerrado.

Dm.- Sea $\bar{B}_\delta(c)$ una bola en M. Veamos que es cerrada en (M,d).

Sea $x\in M-\bar{B}_\delta(c) \Rightarrow x\notin \bar{B}_\delta(c) \Rightarrow d(x,c)>\delta$. Sea $\varepsilon=d(x,c)-\delta>0$

Veamos que $B_\varepsilon(x)\subset M-\bar{B}_\delta(c)$.

Sea $z\in B_\varepsilon(x) \Rightarrow d(x,c)\le d(x,z)+d(z,c) < \varepsilon + d(z,c)$

$= d(x,c)-\delta+d(z,c) \Rightarrow d(x,c) < d(x,c)-\delta+d(z,c)$

$\Rightarrow \delta < d(z,c) \Rightarrow z\notin \bar{B}_\delta(c) \Rightarrow z\in M-\bar{B}_\delta(c)$

$\therefore \bar{B}_\delta(c)$ es cerrado

Ejercicio 2.- Demuestra que $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy\ge 0\}$ es cerrado en $(\mathbb{R}^2,d)$

Dm: Veamos que $\mathbb{R}^2-A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy<0\}$

$a<0 \quad b>0$

Caso 1: Sea $(a,b)\in\mathbb{R}^2-A$, con ~~[illegible]~~

Sea $r\le \min\{-a,b\}$. Veamos que $B_r(a,b)\subset\mathbb{R}^2-A$

En efecto: si $(x,y)\in B_r(a,b) \Rightarrow \|(x,y)-(a,b)\|<r \Rightarrow |x-a|,|y-b|\le \|(x,y)-(a,b)\|$

$\Rightarrow |x-a|<r \wedge |y-b|<r \Rightarrow -r<x-a<r \wedge -r<y-b<r$

$(A\cap B)^c$

$\Rightarrow x-a<r \wedge -r<y-b \Rightarrow x<r+a \wedge b-r<y$, pero por def. de r
$r<-a \wedge r<b \Rightarrow r+a<0 \wedge 0<b-r \Rightarrow x<0 \wedge 0<y \Rightarrow (x,y)\in\mathbb{R}^2-A$

Caso 2 $a>0$ y $b<0$

Sea $r<\min\{a,-b\} \Rightarrow r<a \wedge r<-b \Rightarrow a-r>0 \quad r+b<0$. Veamos que $B_r(a,b)\subset\mathbb{R}^2-A$.
Si $(x,y)\in B_r(a,b) \Rightarrow \|(x,y)-(a,b)\|<r \Rightarrow |x-a|,|y-b|\leq\|(x,y)-(a,b)\|<r$
$\Rightarrow |x-a|<r \wedge |y-b|<r \Rightarrow -r+a<x \wedge y<r+b \overset{\text{Def}}{\Rightarrow} 0<x,\ y<0 \Rightarrow (x,y)\in\mathbb{R}^2-A$

Teorema: Sea (M,d) esp. vectorial métrico.

1) $\emptyset, M$ son cerrados en (M,d)
2) Si $\{V_\alpha \mid \alpha\in I\}$ es una familia de cerrados en $(M,d) \Rightarrow \bigcap_{\alpha\in I} V_\alpha$ es cerrado
3) Si $\{V_i \mid 1\leq i\leq n\}$ son cerrados en $(M,d) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ es cerrado.

Dem:

1) Como $\emptyset$ es abierto en $M \Rightarrow M-\emptyset=M$ es cerrado y como M es abierto en $M \Rightarrow M-M=\emptyset$ es cerrado

2) Sup. que V_α es cerrado $\forall\alpha\in I$. P.D. $M-\bigcap_{\alpha\in I}V_\alpha$ es abierto

Como V_α es cerrado $\Rightarrow M-V_\alpha$ es abierto $\forall\alpha\in I$.
Ahora $M-\bigcap_{\alpha\in I}V_\alpha=\bigcup_{\alpha\in I} M-V_\alpha \Rightarrow$ unión de abiertos es abierto

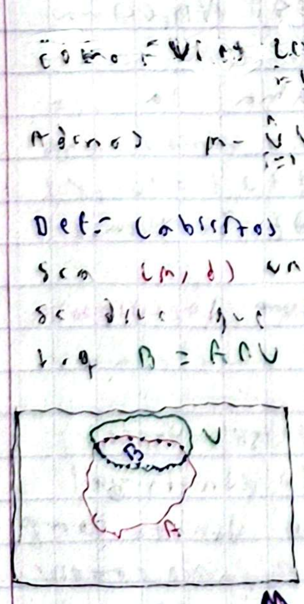
$\therefore M-\bigcap_{\alpha\in I}V_\alpha$ es abierto $\Rightarrow \bigcap_{\alpha\in I}V_\alpha$ es cerrado

3) Sup. que V_i es cerrado $\forall i$ $1\leq i\leq n$. P.D. $M-\bigcup_{i=1}^{n}V_i$ es abierto

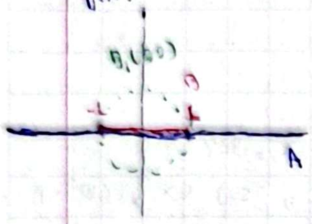
Como V_i es cerrado, $1\leq i\leq n$ entonces $M-V_i$ es abierto.

Además $M-\bigcup_{i=1}^{n}V_i=\bigcap_{i=1}^{n}(M-V_i)$ es abierto.

Def: (abiertos y cerrados relativos) ni abierto ni cerrado en M
Sea (M,d) un espacio métrico, $A\subset M$ y $B\subset A$.
Se dice que B es abierto en A si $\exists U\subset M$ abierto en (M,d) t.q. $B=A\cap U$



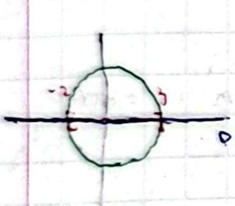
Ejercicio 1: Sea $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2\}$, $B = \{(x,0) \in A : |x| < 1\}$.
Demuestra que B es abierto en A.
Dm:



A no es abierto en $\mathbb{R}^2$, y B no es abierto en $\mathbb{R}^2$.
Tomando $V = B_1(0,0) \subset \mathbb{R}^2$ el cual es abierto en $\mathbb{R}^2$
se tiene que $B = A \cap V$

Def.- Sea (M,d) un esp. métrico, $A \subset M$ y $D \subset A$. Se dice que D es cerrado en A si $\exists W \subset M$ cerrado en (M,d) t.q. $D = A \cap W$

Ejercicio: Sea $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2\}$, $B = \{(x,0) \in A \mid x \in [-2,3]\}$. Demuestra que B es cerrado en A



tomo $B_{\frac{5}{2}}(\frac{1}{2},0)$ es cerrado y $B = A \cap B_{\frac{5}{2}}[\frac{1}{2},0)$

Def.- Sea (M,d) esp. métrico, $A \subset M$ y $c \in M$.

1) Se dice que c es un punto interior de A si $\exists B_r(c)$ t.q. $B_r(c) \subset A$.
El conjunto de todos los puntos interiores de A, se llama el interior de A y se denota como $\mathring{A}$ ó $\operatorname{Int}(A)$

2) Se dice que c es un punto frontera de A si $\forall B_r(c)$ se tiene que $B_r(c) \cap A \neq \emptyset$ y $B_r(c) \cap (M - A) \neq \emptyset$.
El conjunto de todos los puntos frontera de A se llama la frontera de A y se denota como $Fr(A)$ ó ∂A

3) Se dice que c es un punto adherente de A si $\forall B_r(c)$ se tiene que $B_r(c) \cap A \neq \emptyset$.
El conjunto de todos los puntos adherentes se llama la cerradura de A y se denota como $\bar{A}$

4) Se dice que c es un punto de acumulación de A si $\forall B_r(c)$ se tiene que $\{B_r(c) - \{c\}\} \cap A \neq \emptyset$. El conjunto de todos los puntos de acumulación de A se llama el derivado de A y se denota como A'

$-13 < x < 13$ $\quad -6 \leq x \leq 6$ $\quad x \in [-6,6]$

$2 < x + \ldots$ $\quad 6 \leq x$

$-2 \geq x - \ldots$ $\quad x \leq -6$

5 = Se dice que c es un punto aislado de A si $c \in A$ y $c \notin A'$

Ejercicio 3: Considere $(\mathbb{R}, d)$ y $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq |x-4| < 7\} \cup \{\frac{5}{2}\}$

Demuestre que: $\quad A = [-3,2] \cup [6,11) \cup \{\frac{5}{2}\}$

a) $8 \in Int(A) = (-3,2) \cup (6,11)$

Veamos que $B_1(8) \subset A$. En efecto $B_1(8) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x,8) < 1\}$

$\therefore$ ... $\quad B_1(8) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-8| < 1\} = (7,9) \subset A$ ∎

b) $-3 \in A' = [-3,2] \cup [6,11]$

Veamos que $(B_r(-3) - \{-3\}) \cap A \neq \emptyset$ con $r \in \mathbb{R}^+$

Caso 1: $0 < r < 5$

Sea $x_0 = -3 + \frac{r}{2}$, veamos que $x_0 \in A$. En efecto como $0 < \frac{r}{2} < 5$

$\Rightarrow -3 < \frac{r}{2} - 3 < 2 \Rightarrow -3 < x_0 < 2 \Rightarrow x_0 \in A$

Veamos que $x_0 \in B_r(-3)$. En efecto $|x_0 + 3| = |-3 + \frac{r}{2} + 3| = |\frac{r}{2}| < r \quad \therefore x_0 \in B_r(-3)$

Caso 2.- $r \geq 5$

Tomando $x_0 = 0$, se tiene que $0 \in A$ y que $0 \neq -3$, veamos que $x_0 \in B_r(-3)$

en efecto $|x_0 + 3| = |0+3| = |3| < r \quad \therefore x_0 \in B_r(-3)$

c) $6 \in Fr(A) = \{-3, 2, 6, 11, \frac{5}{2}\}$

Veamos que $B_r(6) \cap A \neq \emptyset \wedge B_r(6) \cap (\mathbb{R} - A) \neq \emptyset$ con $r \in \mathbb{R}^+$

Caso 1.- $0 < r < \frac{7}{2}$

Sean $x_0 = 6 + \frac{r}{2} \wedge x_1 = 6 - \frac{r}{2}$ veamos que $x_0 \in A \wedge x_1 \in \mathbb{R} - A$, en efecto

como $0 < r < \frac{7}{2} \Rightarrow 0 < \frac{r}{2} < \frac{7}{4} \Rightarrow 6 < 6 + \frac{r}{2} < \frac{31}{4} < 11 \Rightarrow x_0 \in A$

como $0 < r < \frac{7}{2} \Rightarrow -\frac{7}{2} < -r < 0 \Rightarrow -\frac{7}{4} < -\frac{r}{2} < 0 \Rightarrow \frac{17}{4} < 6 - \frac{r}{2} < 6 \Rightarrow x_1 \in \mathbb{R} - A$

$\Rightarrow$

Ahora veamos que $x_0, x_1 \in B_r(6)$

$|x_0 - 6| = |6 + \frac{r}{2} - 6| = |\frac{r}{2}| < r \Rightarrow x_0 \in B_r(6)$

$|x_1 - 6| = |6 - \frac{r}{2} - 6| = |-\frac{r}{2}| = \frac{r}{2} \Rightarrow x_1 \in B_r(6)$

Caso 2: $r \geq \frac{7}{2}$. Tomo $x_0 = 7$, $x_1 = 5 \Rightarrow x_0 \in A \wedge x_1 \in \mathbb{R} - A$

Veamos que $x_0, x_1 \in B_r(6)$

$|x_0 - 6| = |7-6| = 1 < \frac{7}{2} \leq r \Rightarrow x_0 \in B_r(6)$

$|x_1 - 6| = |5-6| = 1 < \frac{7}{2} \leq r \Rightarrow x_1 \in B_r(6)$

d) $\frac{5}{2}$ es pto. aislado:

Veamos que $(B_{\frac{1}{4}}(\frac{5}{2}) - \{\frac{5}{2}\}) \cap A = \emptyset$. Sea $x \in B_{\frac{1}{4}}(\frac{5}{2}) \Rightarrow |x - \frac{5}{2}| < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{9}{4} < x < \frac{11}{4}$

$\Rightarrow x \notin A$

$1/1$ $y \geq x+1$ $y < x+4$

$A =$

Ejercicio 2 - Sea $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq y-x<4\}$ en $(\mathbb{R}^2,d)$. Demuestra que:

1) $(1,2)\in Fr(A)$

Dem: Tenemos el punto $(1,2)$ y su distancia a la recta es

$$d(P,L_2)=\frac{|(1)-(2)+4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Sea $r\in\mathbb{R}^+$ p.d. $B_r(1,2)\cap A\neq\emptyset \wedge B_r(1,2)\cap(\mathbb{R}^2-A)\neq\emptyset$

Tomando $x_0=(1,2)$ se tiene que $x\in A\cap B_r(1,2)$

Tomando $x_1=(1+\frac{r}{2},2)$ se tiene que $x_1\in\mathbb{R}^2-A$

y $\|x_1-(1,2)\|=\|(1+\frac{r}{2},2)-(1,2)\|=\|(\frac{r}{2},0)\|=\frac{r}{2}<r$

Así $B_r(1,2)\cap A\neq\emptyset \wedge B_r(1,2)\cap(\mathbb{R}^2-A)\neq\emptyset$

2) $(-3,1)\in A'$

Dem: veamos que $(B_r(-3,1)-\{(-3,1)\})\cap A\neq\emptyset$ con $r\in\mathbb{R}^+$

Caso 1 si $r<\frac{3}{\sqrt{2}}$

Sea $x_0=(-3+\frac{r}{2},1)$, tenemos que $\|(-3+\frac{r}{2},1)-(-3,1)\|=\|(\frac{r}{2},0)\|=\frac{r}{2}<r$
así $x_0\in B_r(-3,1)$

y además $1<(-3+\frac{r}{2})+4 \wedge 1\geq(-3+\frac{r}{2})+1$

$\Rightarrow x_0\in A$ así $x_0\in(B_r(-3,1)-\{(-3,1)\})\cap A$

Caso 2 $r\geq\frac{3}{\sqrt{2}}$

Sea $x_1=(-2.5,1)$, $\|(-\frac{5}{2},1)-(-3,1)\|=\|(\frac{1}{2},0)\|=\frac{1}{2}<r$
así $x_1\in B_r(-3,1)$

Además $1<-2.5+4 \wedge 1\geq-2.5+1 \Rightarrow x_1\in A$

3) $(-1,1)\in Int(A)$

Dem: Tenemos que $d((-1,1),L_1)=\frac{|(1)-(-1)+1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{2}{\sqrt{2}}$

$d((-1,1),L_2)=\frac{|(1)-(-1)-1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Sea $r<\frac{2}{\sqrt{2}}$ p.d. $B_r(-1,1)\subset A$

Sea $x \in B_r(-1,1) \Rightarrow \|x-(-1,1)\| < r \Rightarrow \|(x,y)-(-1,1)\| < r \Rightarrow \|(x+1, y-1)\| < r$

$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cancel{(x+1)^2+(y-1)^2 < \frac{2}{4}}$

$\Rightarrow |x+1| < \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge |y-1| < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < x+1 < \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge -\frac{\sqrt{2}}{2} < y-1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}-1 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}-1 \wedge -\frac{\sqrt{2}}{2}+1 < y < \frac{\sqrt{2}}{2}+1$

$\Rightarrow 1-\frac{\sqrt{2}}{2} < -x < \frac{\sqrt{2}}{2}+1 \Rightarrow 2 < y-x < \sqrt{2}+2 < 4 \Rightarrow 2 < y-x < 4$

$\therefore x \in A \quad \therefore B_r(-1,1) \subset A$

4) $(-8,-7) \in \bar{A}$

Dem.-

p.d. $\forall r>0 \quad B_r(-8,-7) \cap A \neq \emptyset$

Sea $r>0$ y como $(-8,-7) \in B_r(-8,-7) \wedge (-8,-7) \in A \Rightarrow (-8,-7) \in B_r(-8,-7) \cap A$

$int(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < y-x < 4\}$

$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x+4 \quad o \quad y = x+1$

$\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y-x \leq 4\}$

Teorema: Sea (M,d) esp. métrico y $A \subset M$, entonces:

1) $Int(A) = A - \partial A$
2) $\partial A = \bar{A} - int(A)$
3) $\bar{A} = A \cup \partial A$
4) $\bar{A} = A \cup A'$

Dem (1).-

$\subseteq$) Sea $x \in int(A) \Rightarrow \exists B_r(x)$ t.q. $B_r(x) \subset A \Rightarrow x \in A$ y $x \notin \partial A$ pues para que $x \in \partial A \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}^+$ t.q. $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ ó $B_r(x) \cap (M-A) \neq \emptyset$

$\therefore int(A) \subseteq A - \partial A$

$\supseteq$) Sea $x \in A - \partial A \Rightarrow x \in A \wedge x \notin \partial A \Rightarrow \exists r>0$ t.q. $B_r(x) \cap A = \emptyset$ o $B_r(x) \cap (M-A) = \emptyset \Rightarrow$ como $x \in A \Rightarrow B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ y $B_r(x) \subset A$

$\Rightarrow$ ~~$x \in \partial A$~~ $x \in int(A)$

Ejercicio 1: Sea (M,d) esp. métrico $A \subset B$ y $c \in M$. Demuestra que $c \in \bar{A} \Leftrightarrow d(c,A) = 0$

Teorema- Sea (M,d) esp. métrico y $A \subset M$, entonces A es cerrado $\iff \partial A \subset A$

Dem-

$\Rightarrow)$ Supongamos que A es cerrado y que "$\partial A \not\subset A$".

~~[illegible]~~

Sea $x \in \partial A$ t.q $x \notin A$. Como A es cerrado $\Rightarrow$ $M-A$ es abierto y $x \in M-A$ $\Rightarrow$ $\exists B_r(x)$ t.q $B_r(x) \cap A = \emptyset$! pues $x \in \partial A$

$\Leftarrow)$ Supongamos que $\partial A \subset A$ p.d A es cerrado i.e $M-A$ es abierto

Sea $x \in M-A$ $\Rightarrow$ $x \notin A$ $\Rightarrow$ $x \notin \partial A$ $\Rightarrow$ $\exists B_r(x)$ t.q $B_r(x) \cap A = \emptyset$ o $B_r(x) \cap (M-A) = \emptyset$ pero esta última no es posible $\Rightarrow$

$B_r(x) \cap A = \emptyset$ $\Rightarrow$ $B_r(x) \subset M-A$

Teorema- Sea (M,d) esp. métrico y $A \subset M$, entonces A es cerrado $\iff A' \subset A$

Dem-

$\Rightarrow)$ Suponga que A es cerrado y que $A' \not\subset A$

Así, $x_0 \in M-A$ y como $M-A$ es abierto ya que A es cerrado, se tiene que $\exists B_r(x_0)$ t.q $B_r(x_0) \subset M-A$ $\Rightarrow$ $(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A = \emptyset$!

$\Leftarrow)$ Sup. que $A' \subset A$ p.d A es cerrado, i.e. $M-A$ es abierto

Sea $x \in M-A$ $\Rightarrow$ $x \notin A$ $\Rightarrow$ $x \notin A'$ $\Rightarrow$ $\exists B_r(x)$ t.q $(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$
$\Rightarrow$ $B_r(x) \subset M-A$ $\therefore$ A es abierto

Def- Sea (M,d) esp. métrico y $D \subset M$ se dice que D es denso en M si dado cualquier abierto no vacío U de M se tiene que $U \cap D \neq \emptyset$

Teorema- Sea (M,d) esp. métrico y $D \subset M$. Entonces D es denso en M $\iff \overline{D} = M$

$\Rightarrow)$

Dem- Suponga que D es denso p.d $M \subset \overline{D}$

Sea $x \in M$ y U un abierto en M t.q $x \in U$

Como D es denso, y U es abierto no vacío $\Rightarrow D \cap U \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{D}$
$\therefore M \subset \bar{D}$ y $M = \bar{D}$

$\Leftarrow$) Sup. que $\bar{D} = M$ p.d. y sea $U \subset M$ abierto no vacío p.d. $U \cap D \neq \emptyset$

Como U es abierto no vacío $\Rightarrow \exists x \in U$ s.t. $x \in U \subseteq M = \bar{D}$
$\Rightarrow x \in \bar{D} \Rightarrow \exists B_r(x)$ t.q. $B_r(x) \subset U$ y $B_r(x) \cap D \neq \emptyset$
$\Rightarrow U \cap D \neq \emptyset$

Def: Un espacio métrico (M,d) es separable si tiene un subconjunto denso numerable

Ejercicio 1: Demostrar que $(\mathbb{R}^n, d)$ es separable.

Dem: veamos que $\mathbb{Q}^n = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \mathbb{Q},\ 1 \le i \le n\}$ el cual es numerable p.d. $\mathbb{Q}^n$ es denso

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto no vacío p.d. $U \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$

Sea $c \in U \Rightarrow \exists B_r(c)$ t.q. $B_r(c) \subset U$, sea $q_i \in \mathbb{Q}$ t.q. $q_i \in (c_i - \frac{r}{\sqrt{n}}, c_i + \frac{r}{\sqrt{n}})$

$\Rightarrow |q_i - c_i| < \frac{r}{\sqrt{n}} \quad \forall i,\ 1 \le i \le n$

sacando raíz

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (q_i - c_i)^2 < \sum_{i=1}^{n} \frac{r^2}{n} \Rightarrow \|\bar{q} - \bar{c}\| < r$

$\therefore \mathbb{Q}^n$ es denso

Sucesiones

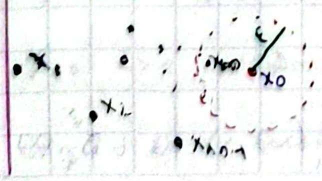
Def: Sea (M,d) un espacio métrico. Una sucesión en (M,d) es una función $\bar{x}: \mathbb{N} \to M$ t.q. a cada $n \in \mathbb{N}$ le ~~asig~~ asigna un único punto $\bar{x}(n) := x_n$, llamado el n-ésimo término de la sucesión.

Esta sucesión la denotaremos por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Sucesión convergente

Def: Sea (M,d) espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en M.

Se dice que la sucesión converge o tiene límite en $M \iff$
$(\exists x_0 \in M)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})$ t.q. si $n \ge n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon$



Nota: Notaremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge en $M \iff$
$(\forall x \in M)(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n_k \in \mathbb{N})$ t.q. $n_k \ge k \wedge d(x_{n_k}, x) \ge \varepsilon_0$

Teorema.- Sea (M,d) esp. métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en M. Si la sucesión converge en M $\Rightarrow$ converge a un único punto.

Dem: Sea $\varepsilon>0$, suponga que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x_0, y_0 \in M$
p.d. $x_0 = y_0$

Por hipótesis $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ t.q. si $n \geq n_1 \Rightarrow d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$
si $n \geq n_2 \Rightarrow d(x_n, y_0) < \frac{\varepsilon}{2}$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ se tiene que si $n \geq n_0 \Rightarrow$ ~~$0 \leq d(x_0, y_0)$~~

$0 \leq d(x_0, y_0) \leq d(x_n, x_0) + d(x_n, y_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow d(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow x_0 = y_0$ ■

Notación: Si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en (M,d) converge a $x_0 \in M$ lo denotamos $x_n \to x_0$ ó $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

Ejercicio 1.- Sea (M,d) esp. métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en M y $x_0 \in M$. Demuestra que $x_n \to x_0 \iff d(x_n, x_0) \to 0$

Dem: Sea $\varepsilon > 0$, entonces como $x_n \to x_0 \iff \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. si $n \geq n_0$ $\Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon \iff \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. si $n \geq n_0 \Rightarrow |d(x_n, x_0) - 0| < \varepsilon$
$\iff d(x_n, x_0) \to 0$

Teorema.- Sea M un conjunto no vacío, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $x_0 \in M$. Sean $d, \rho: M \times M \to \mathbb{R}$ métricas equivalentes en M. Entonces $x_n \to x_0$ en $(M,d) \iff x_n \to x_0$ en (M,ρ)

Dem:

$\Rightarrow$) Sup. que $x_n \to x_0$ en (M,d) p.d. $x_n \to x_0$ en (M,ρ)

Sea $\varepsilon > 0$ p.d. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. si $n \geq n_0 \Rightarrow \rho(x_n, x_0) < \varepsilon$

(Teorema visto, si $x \in M$ y $r \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ t.q. $B^d_{\varepsilon_1}(x) \subset B^\rho_r(x)$ y $B^\rho_{\varepsilon_2}(x) \subset B^d_r(x)$)

Como $x_0 \in M$, $\varepsilon > 0$ y d, ρ son equivalentes $\Rightarrow \exists \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ t.q.

$B^d_{\varepsilon_1}(x_0) \subset B^\rho_\varepsilon(x_0)$. Ahora como $x_n \to x_0$ en (M,d) y $\varepsilon_1 > 0$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. si $n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon_1 \Rightarrow x_n \in B^d_{\varepsilon_1}(x_0) \Rightarrow x_n \in B^\rho_\varepsilon(x_0)$

$\Rightarrow \rho(x_n, x) < \varepsilon$ $\therefore$ $x_n \to x_0$ en (M, ρ)

$\Leftarrow$) similar solo cambiando algunas cosas

Teorema: Sea (M, d) esp. métrico y $A \subseteq M$ y $c \in M$
Entonces $c \in A'$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $A - \{c\}$ t.q $x_n \to c$.

Dem:
$\Rightarrow$) Sup. que $c \in A'$ P.D $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $A - \{c\}$ t.q $x_n \to c$

Sea $\varepsilon > 0$ ...

Sea $n \in \mathbb{N}$ como $c \in A'$ $\Rightarrow$ $(B_{\frac{1}{n}}(c) - \{c\}) \cap A \neq \emptyset$. Sea $x_n \in (B_{\frac{1}{n}}(c) - \{c\}) \cap A$
$\Rightarrow x_n \neq c$ y $d(x_n, c) < \frac{1}{n}$

Así se obtiene una sucesión $(x_n) \in A - \{c\}$ t.q $x_n \to c$
pues $0 \leq d(x_n, c) \leq \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} 0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, c) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, c) \leq 0$
$\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, c) = 0$ $\therefore$ $x_n \to c$

$\Leftarrow$) Supo. que $\exists$ una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $A - \{c\}$ t.q $x_n \to c$ P.D $c \in A'$

Sea $\varepsilon > 0$, veamos que $(B_\varepsilon(c) - \{c\}) \cap A \neq \emptyset$

Como $\varepsilon > 0$ y $x_n \to c$ $\Rightarrow$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q si $n \geq n_0$ $\Rightarrow$ $d(x_n, c) < \varepsilon$
$\Rightarrow x_n \in B_\varepsilon(c)$ $\Rightarrow$ $\therefore$ $(B_\varepsilon(c) - \{c\}) \cap A \neq \emptyset$ $\therefore$ $c \in A'$

Teorema: Sea (M, d) esp. métrico, $A \subseteq M$ y $c \in M$. Entonces $c \in Fr(A)$
$\Leftrightarrow$ $\exists$ sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $M - A$ t.q
$x_n \to c$ y $y_n \to c$

Dem:
$\Rightarrow$) Suponga que $c \in Fr(A)$. Así para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $B_{\frac{1}{n}}(c) \cap A \neq \emptyset$
$\wedge$ $B_{\frac{1}{n}}(c) \cap (M - A) \neq \emptyset$. Luego para cada $n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n, y_n$ t.q
$x_n \in B_{\frac{1}{n}}(c) \cap A$ $\wedge$ $y_n \in B_{\frac{1}{n}}(c) \cap (M - A)$ $\Rightarrow$ $d(x_n, c) < \frac{1}{n}$ y $d(y_n, c) < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow 0 < \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, c) < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ $\wedge$ $0 < \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, c) < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, c) = 0$ $\wedge$ $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, c) = 0$ $\therefore$ $x_n \to c$ $\wedge$ $y_n \to c$

$\Leftarrow$) Sup. que $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $M - A$ t.q $x_n \to c$ $\wedge$ $y_n \to c$

Sea $\varepsilon > 0$, veamos que $B_\varepsilon(c) \cap A \neq \emptyset$ y que $B_\varepsilon(c) \cap (M - A) \neq \emptyset$

Como $\varepsilon > 0$ y $x_n \to c$, $y_n \to c$ $\Rightarrow$ $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ t.q si $n \geq n_1$ $\Rightarrow$ $d(x_n, c) < \varepsilon$

y si $n \geq n_2 \Rightarrow d(x_{n_0}, c) < \varepsilon$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, se tiene que si $n \geq n_0$
$\Rightarrow d(x_n, c) < \varepsilon \wedge d(x_n, c) < \varepsilon$

pero $x_{n_0} \in B_\varepsilon(c) \cap A \neq \emptyset \wedge x_{n_0} \in B_\varepsilon(c) \cap (M - A)$

Teorema: Sean (M_i, d_i) $1 \leq i \leq k$ esp. métricos y sea $M = \prod_{i=1}^{k} M_i$ el esp. métrico producto.
Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en M donde:

$\bar{x}_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(k)})$ y sea $\bar{x}_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(k)}) \in M$
Entonces $\bar{x}_n \to \bar{x}_0$ en $(M, d_2) \Leftrightarrow x_n^{(i)} \to x_0^{(i)}$ en (M_i, d_i) $1 \leq i \leq k$

Dem:
$\Rightarrow$) Suponga que $\bar{x}_n \to \bar{x}_0$ en (M, d_2) PD $x_n^{(i)} \to x_0^{(i)}$

Sea $\varepsilon > 0$, como $\bar{x}_n \to \bar{x}_0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. si $n \geq n_0 \Rightarrow d_2(\bar{x}_n, \bar{x}_0) < \varepsilon$
por otra parte como $d_i(x_n^{(i)}, x_0^{(i)}) \leq d_2(\bar{x}_n, \bar{x}_0)$

si $n \geq n_0 \Rightarrow d_i(x_n^{(i)}, x_0^{(i)}) \leq d_2(\bar{x}_n, \bar{x}_0) < \varepsilon$

$\therefore x_n^{(i)} \to x_0^{(i)}$ $\forall 1 \leq i \leq k$

$\Leftarrow$) Sup. que $x_n^{(i)} \to x_0^{(i)}$ en (M_i, d_i) $1 \leq i \leq k$ PD $\bar{x}_n \to \bar{x}_0$ en (M, d_2)

Sea $\varepsilon > 0$, por hipótesis $\exists n_{0i} \in \mathbb{N}$ t.q. si $n \geq n_{0i} \Rightarrow d_i(x_n^{(i)}, x_0^{(i)}) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$

Tomando $n_0 = \max\{n_{0i} : 1 \leq i \leq k\}$ se tiene que si $n \geq n_0$

$\Rightarrow d_i(x_n^{(i)}, x_0^{(i)}) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} \Rightarrow d_i^2(x_n^{(i)}, x_0^{(i)}) < \frac{\varepsilon^2}{k}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} d_i^2(x_n^{(i)}, x_0^{(i)}) < \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon^2}{k} = \varepsilon^2$

$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{k} d_i^2(x_n^{(i)}, x_0^{(i)})} < \varepsilon \Rightarrow d_2(\bar{x}_n, \bar{x}_0) < \varepsilon$

$\therefore \bar{x}_n \to \bar{x}_0$

Def: Sea (M, d) un esp. métrico y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en (M, d). Se dice que esta sucesión es de Cauchy $\Leftrightarrow$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})[\text{si } n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon]$

Def.- Se dice que (M,d) es completo si toda sucesión de Cauchy en (M,d) converge a un punto de M.

Ejercicio 1.- Sea $M = (0,1]$ y $d: M \times M \to \mathbb{R}$ t.q. $d(x,y) = |y-x|$. Determine si M es completo.

Sol.- Veamos que (M,d) no es completo.
En efecto sea $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, la cual es una sucesión en (M,d). Veamos que es de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ t.q. $n, m \geq n_0 \Rightarrow d(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}| \leq |\frac{1}{m}| + |\frac{1}{n}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

$\therefore (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, sin embargo $\frac{1}{n} \to 0$ y $0 \notin M$ $\therefore$

(M,d) no es completo

Ejercicio 2.- Sea $(\mathbb{R}^3, d)$ y $(\bar{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $\mathbb{R}^3$ donde $\bar{x}_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}, e^{\frac{1}{n}}, \frac{2^n}{3^n})$. Determine si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$, $\lim_{n\to\infty} (\frac{2}{3})^n = 0$

$\Rightarrow x_n \to (0,1,0)$

Teorema.- Sean (M_i, d_i) $1 \leq i \leq k$ esp. métricos y sea $M = \prod_{i=1}^{k} M_i$ el esp. métrico producto. Sean $(\bar{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en M donde $\bar{x}_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)})$; Entonces $(\bar{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(M, d_2) \Leftrightarrow (x_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (M_i, d_i) $1 \leq i \leq k$

Dem.-
$\Rightarrow]$ Suponga que $(\bar{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (M, d_2)
Sea $\varepsilon > 0$. P.D $\exists n_{0i} \in \mathbb{N}$ t.q. si $n, m \geq n_{0i} \Rightarrow d_i(x_n^{(i)}, x_m^{(i)}) < \varepsilon$

Por hip. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. si $n, m \geq n_0 \Rightarrow d_2(\bar{x}_n, \bar{x}_m) < \varepsilon$
Por otra parte como $d_i(x_n^{(i)}, x_m^{(i)}) \leq d_2(\bar{x}_n, \bar{x}_m)$
Tomando $n_{0i} = n_0$, se tiene que
si $n, m \geq n_{0i} \Rightarrow d_i(x_n^{(i)}, x_m^{(i)}) \leq d_2(\bar{x}_n, \bar{x}_m) < \varepsilon$. $\therefore (x_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy

$\Leftarrow]$ Suponga que $(x_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (M_i, d_i) $1 \leq i \leq k$
Sea $\varepsilon > 0$. P.D $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. si $n, m \geq n_0 \Rightarrow d_2(\bar{x}_n, \bar{x}_m) < \varepsilon$

por hip. $\exists n_{0_i} \in \mathbb{N}$ t.q. si $n, m \geq n_{0_i} \Rightarrow d_i(x_n^{(i)}, x_m^{(i)}) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{K}}$

Tomando $n_0 = \max\{n_{0_i} : 1 \leq i \leq K\}$, entonces

si $n, m \geq n_0 \Rightarrow d_i(x_n^{(i)}, x_m^{(i)}) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{K}} \Rightarrow d_i^2(x_n^{(i)}, x_m^{(i)}) < \frac{\varepsilon^2}{K}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{K} d_i^2(x_n^{(i)}, x_m^{(i)}) < \sum_{i=1}^{K} \frac{\varepsilon^2}{K}$.

$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{K} d_i^2(x_n^{(i)}, x_m^{(i)})} < \varepsilon \Rightarrow d_2(\bar{x}_n, \bar{x}_m) < \varepsilon$

Corolario: Sean $(M_i; d_i)$ esp. métricos y $M = \prod_{i=1}^{K} M_i$ el esp. métrico producto, entonces (M, d_2) es completo $\Leftrightarrow (M_i, d_i)$ $1 \leq i \leq K$ es completo

Compacidad

Def.- Sea (M, d) esp. métrico y $A \subset M$. Una cubierta abierta de A en M es una colección $\{W_\alpha \mid \alpha \in I\}$ de abiertos en M t.q. $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha$

Ejercicio 1.- Sea $A = (0,1) \subset (\mathbb{R}, d)$. Demuestra que $\{(0, 1 - \frac{1}{n+1}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta en A

Dem: Sea $x \in (0,1) \Rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow 0 < 1 - x \Rightarrow$ por la propiedad arquimediana $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{n_x} < 1 - x \Rightarrow \frac{1}{n_x + 1} < 1 - x \Rightarrow x < 1 - \frac{1}{n+1}$ $\Rightarrow x \in (0, 1 - \frac{1}{n+1})$ $\therefore x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (0, 1 - \frac{1}{n+1})$

Def.- Sea (M, d) esp. métrico y $A \subset M$, se dice que A es compacto en M si para toda cubierta abierta $\{W_\alpha \mid \alpha \in I\}$ de A en M $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_r \in I$ t.q. $A \subset \bigcup_{i=1}^{r} W_i$

Ejercicio 1.- Sea (M, d) esp. métrico y $x_1, \dots, x_s \in M$ puntos. Demuestra que $A = \{x_1, \dots, x_s\}$ es compacto en M

Dem: Sea $\{W_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de A en M. Así, para cada $1 \leq i \leq s$ $\exists \alpha_i \in I$ t.q. $x_i \in W_{\alpha_i} \Rightarrow$

$A \subset \bigcup_{i=1}^{r} W_{\alpha_i}$ $\therefore$ A es compacto

Ejercicio 2.- Sea $A=(0,1)\subset(\mathbb{R},d)$. Demostrar que A no es compacto en $\mathbb{R}$

Dem: Sea $\{\underbrace{(0,1-\tfrac{1}{n+1})}_{W_n} \mid n\in\mathbb{N}\}$ la cual es una cubierta abierta de A en $\mathbb{R}$. Veamos que no existe una colección finita de estos abiertos cuya unión contenga a A.

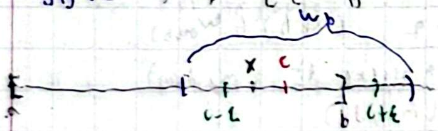
~~Supongamos~~ Note que si $m<n \Rightarrow W_m\subset W_n$. En efecto si $m<n \Rightarrow \frac{1}{n}<\frac{1}{m}$ $\Rightarrow -\frac{1}{m}<-\frac{1}{n} \Rightarrow 1-\frac{1}{m}<1-\frac{1}{n} \Rightarrow W_m\subset W_n$

Sup. que existe un número finito de abiertos de $\{W_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, cuya unión contiene a A. Esto es:

$\exists n_1,\dots,n_q\in\mathbb{N}$ t.q. $A\subset\bigcup_{i=1}^{q} W_{n_i}$. Sea $m=\max\{n_1,\dots,n_q\} \Rightarrow W_{n_i}\subset W_m$ $1\le i\le q$
así $A\subset W_m=$ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow (0,1)\subset(0,1-\frac{1}{m+1})$ lo cual es una contradicción pues significaría que $1<1-\frac{1}{m+1}$!!!

Teorema.- Todo intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es compacto en $(\mathbb{R},d)$

Dem: Sean $a,b\in\mathbb{R}$ t.q. $a<b$. Veamos que $[a,b]$ es compacto en $\mathbb{R}$
Sea $\{W_\alpha \mid \alpha\in I\}$ una cubierta abierta de $[a,b]$ en $(\mathbb{R},d)$
Sea $E=\{x\in[a,x] \mid \exists\alpha_1,\dots,\alpha_r\in I$ con $[a,x]\subset\bigcup_{i=1}^{r} W_{\alpha_i}\}$
E es no vacío pues $a\in E$ y está acotado superiormente por b
$\Rightarrow \exists c=\sup(E)$ y $a\le c\le b \Rightarrow c\in[a,b]$.
Como $\{W_\alpha \mid \alpha\in I\}$ es cubierta abierta de $[a,b]$ y $c\in[a,b] \Rightarrow$
$\exists\beta\in I$ t.q. $c\in W_\beta$



Dado que W_β es abierto y $c\in W_\beta \Rightarrow \exists\varepsilon>0$ t.q. $B_\varepsilon(c)\subset W_\beta \Rightarrow (c-\varepsilon,c+\varepsilon)\subset W_\beta$.
Como $c=\sup(E)$ y $c-\varepsilon<c \Rightarrow \exists x\in E$ t.q. $c-\varepsilon<x<c$. Así $\exists\alpha_1,\dots,\alpha_r\in I$ t.q. $[a,x]\subset\bigcup_{i=1}^{r} W_{\alpha_i}$
(Probaremos que $c\in E$ y que $c=b$ con lo cual se tendría que $[a,b]$ es compacto)

Como $[a,c]\subset\left(\bigcup_{i=1}^{r} W_{\alpha_i}\right)\cup W_\beta \Rightarrow c\in E$. Veamos solo que $c=b$

Supongamos que $c\neq b$
Si $c<b$ tomando la misma $\varepsilon>0$ t.q. $c+\frac{\varepsilon}{2}<b$ con $\boxed{\varepsilon=\cancel{\min}\ b-c}$
se tendría que $[a,c+\frac{\varepsilon}{2}]\subset\left(\bigcup_{i=1}^{r} W_{\alpha_i}\right)\cup W_\beta$.
Así $c+\frac{\varepsilon}{2}\in E$ lo cual es imposible pues $c=\sup\{E\}$
Si $c>b$ de manera similar.
$\therefore$ $c=b$ $\therefore$ ~~[illegible]~~ $[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{r} W_{\alpha_i}$ $\therefore$ $[a,b]$ es compacto

Ejercicio: Sean (M_i, ρ_i) $1 \le i \le n$ esp. métricos y $M = \prod_{i=1}^{n} M_i$ el esp. métrico producto. Sea $\bar{c} \in M$ y $\varepsilon > 0$.
Demuestra que

$$B_\varepsilon^{d_\infty}(c) = B_\varepsilon^{\rho_1}(c_1) \times B_\varepsilon^{\rho_2}(c_2) \times \cdots \times B_\varepsilon^{\rho_n}(c_n) = \prod_{i=1}^{n} B_\varepsilon^{\rho_i}(c_i)$$

Dem:

$\subseteq$) Sea $\bar{x} \in B_\varepsilon^{d_\infty}(\bar{c}) = \{\bar{z} \in M \mid d_\infty(\bar{z}, c) < \varepsilon\} = \{\bar{z} \in M \mid \max\{\rho_i(z_i, c_i)\} \; 1 \le i \le n < \varepsilon\}$

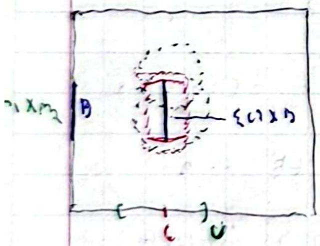
$\Rightarrow \rho_i(x_i, c_i) < \varepsilon \;\; \forall 1 \le i \le n \Rightarrow \bar{x} \in B_\varepsilon^{\rho_1}(c_1) \times \cdots \times B_\varepsilon^{\rho_n}(c_n)$

$\supseteq$) Sea $\bar{x} \in \prod_{i=1}^{n} B_\varepsilon^{\rho_n}(c_n) \Rightarrow \rho_i(x_i, c_i) < \varepsilon \;\; \forall_i \;\; 1 \le i \le n$

$\Rightarrow \max\{\rho_i(x_i, c_i) \mid 1 \le i \le n\} < \varepsilon \Rightarrow d_\infty(x, c) < \varepsilon \Rightarrow x \in B_\varepsilon^{d_\infty}(c)$

Teorema: Sean (M_1, ρ_1), (M_2, ρ_2) espacios métricos y $M = M_1 \times M_2$ el esp. métrico producto.
Sea $c \in M_1$ un punto y $B \subset (M_2, \rho_2)$ compacto.
Si $W = \{W_\alpha \mid \alpha \in I\}$ es un cubrimiento abierto de $\{c\} \times B$ en (M, d_∞)
$\Rightarrow \exists\, U \subset (M_1, \rho_1)$ vecindad abierta del punto c y $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in I$
t.q. $(U \times B) \subset \bigcup_{i=1}^{r} W_{\alpha_i}$. En particular $\{c\} \times B$ es compacto en M.

Dem: Suponga que $B \subset (M_2, \rho_2)$ es compacto y que $W = \{W_\alpha \mid \alpha \in I\}$ es cubrimiento abierto de $\{c\} \times B$ en (M, d_∞)



Así, para cada $b \in B$, $\exists\, \alpha(b) \in I$ t.q. $(c, b) \in W_{\alpha(b)}$.
Por otra parte como $W_{\alpha(b)}$ es abierto en (M, d_∞)
$\Rightarrow \exists\, B_{r(b)}^{\rho_1}(c) \subset (M_1, \rho_1)$ y $B_{r(b)}^{\rho_2}(c) \subset (M_2, \rho_2)$
t.q. $B_{r(b)}^{d_\infty}(c, b) = B_{r(b)}^{\rho_1}(c) \times B_{r(b)}^{\rho_2}(b) \subset W_{\alpha(b)}$

Ahora como $B \subset \bigcup_{b \in B} B_{r(b)}^{\rho_2}(b)$ y B es compacto $\Rightarrow \exists\, b_1, \ldots, b_r \in B$
t.q. $B \subset \bigcup_{i=1}^{r} B_{r(b_i)}^{\rho_2}(b_i)$

Tomando $U = \bigcap_{i=1}^{r} B_{r(b_i)}^{\rho_1}(c)$ se tiene una vecindad abierta de c en (M_1, ρ_1) t.q. $U \times B_{r(b_i)}^{\rho_2}(b_i) \subset B_{r(b_i)}^{\rho_1}(c) \times B_{r(b_i)}^{\rho_2}(b_i)$ $1 \le i \le r$

Así, $(U \times B) \subset \left(\bigcup_{i=1}^{r} U \times B_{r(b_i)}^{\rho_2}(b_i)\right) \subset \bigcup_{i=1}^{r} B_{r(b_i)}^{\rho_1}(c) \times B_{r(b_i)}^{\rho_2}(b_i) \subset \bigcup_{i=1}^{r} W_{\alpha(b_i)}$

Teorema.- Sean (M_i, ρ_i) $1 \leq i \leq 2$ esp. métrico y $M = M_1 \times M_2$ el esp. métrico producto. Si $A \subset (M_1, \rho_1)$ es compacto y $B \subset (M_2, \rho_2)$ es compacto $\Rightarrow$ $(A \times B)$ es compacto en (M, d_M)

Dem: Sea $W = \{ W_\alpha \mid \alpha \in I \}$ una cubierta abierta de $A \times B$, así, para cada $a \in A$ se tiene que W es cubierta abierta de $\{a\} \times B$
$\Rightarrow$ Por el teorema anterior $\exists V_a \subset (M_1, \rho_1)$ vecindad abierta de a y $\alpha_1(a), \dots, \alpha_{n_a}(a) \in I$ t.q. $(V_a \times B) \subset \bigcup_{i=1}^{n_a} W_{\alpha_i(a)}$

Por otra parte como $A \subset (M_1, \rho_1)$ es compacto y $A \subset \bigcup_{a \in A} V_a$
$\Rightarrow \exists a_1, \dots, a_s \in A$ t.q. $A \subset \bigcup_{j=1}^{s} V_{a_j}$

Tengo que $V_{a_j} \times B \subset \bigcup_{i=1}^{n_{a_j}} W_{\alpha_i(a_j)}$ $\forall j, 1 \leq j \leq s$

Además $A \times B \subset \left(\bigcup_{j=1}^{s} V_{a_j} \right) \times B \subset \left(\bigcup_{j=1}^{s} \left[\bigcup_{i=1}^{n_{a_j}} W_{\alpha_i(a_j)} \right] \right)$

pues $\left(\bigcup_{j=1}^{s} V_{a_j} \right) \times B = \left(\bigcup_{j=1}^{s} (V_{a_j} \times B) \right) \subset \bigcup_{j=1}^{s} \left[\bigcup_{i=1}^{n_{a_j}} W_{\alpha_i(a_j)} \right]$

$\therefore$ $A \times B$ es compacto

Corolario: Sean (M_i, ρ_i) $1 \leq i \leq n$ esp. métricos y $M = \prod_{i=1}^{n} M_i$
Si $A_i \subset (M_i, \rho_i)$, $1 \leq i \leq n$ es compacto $\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} A_i$ es compacto en (M, d_M).

Dem.- Por inducción

B.I. Para $n=1$ se cumple pues A_1 es compacto

H.I. Supongamos que el teorema se cumple para $n-1$

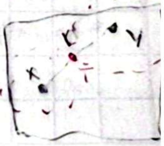
P.I. P.D. se cumple para n

Sea $A_i \subset (M_i, \rho_i)$ $1 \leq i \leq n$ compacto. Veamos que $\prod_{i=1}^{n} A_i$ es compacto

Como $\prod_{i=1}^{n-1} A_i$ es compacto en $\left(\prod_{i=1}^{n-1} M_i, d_M \right)$ (H.I.) y A_n es compacto en (M_n, ρ_n) $\Rightarrow$ por el teorema anterior $\Rightarrow \prod_{i=1}^{n-1} A_i \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$ es compacto en (M, d_M).

Ejercicio: Sea (M, d) esp. métrico. Demuestra que si $x, y \in M$ y $x \neq y$
$\Rightarrow \exists$ vecindades abiertas V_x, V_y de x, y tales que $V_x \cap V_y = \emptyset$

Dem: Como $x \neq y \Rightarrow d(x,y) > 0$. Sea $r = \frac{1}{2} d(x,y)$
$\Rightarrow \underbrace{B_r(x)}_{V_x} \cap \underbrace{B_r(y)}_{V_y} = \emptyset$

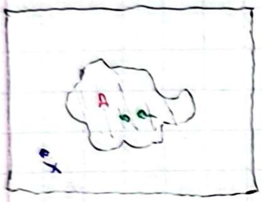


~~Teorema:-~~

Obs:- Sean $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ con $a_i < b_i$, $1 \leq i \leq n$, como $[a_i, b_i]$ es compacto en $(\mathbb{R}, d)$ $\Rightarrow$ $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ es compacto en $(\mathbb{R}^n, d_2)$ (Puede ser dada también)

Teorema: Sea (M, d) esp. métrico. Si $A \subset (M, d)$ es compacto $\Rightarrow$ A es cerrado en M

Dem.- Veamos que $M - A$ es abierto con lo cual A es cerrado.



Sea $x \in M - A$, para toda $a \in A$ $\exists$ $B_{r_a}(a)$, $B_{r_a}(x)$ t.q $B_{r_a}(a) \cap B_{r_a}(x) = \emptyset$ (ejercicio anterior)

Ahora como A es compacto y $A \subset \bigcup_{a \in A} B_{r_a}(a)$

$\Rightarrow$ $\exists a_1, \dots, a_s$ t.q $A \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_{r_{a_i}}(a_i)$

Tomando $\epsilon = \min\{r_{a_i} \mid 1 \leq i \leq s\}$ se tiene que $B_\epsilon(x) \cap B_{r_{a_i}}(a_i) = \emptyset$

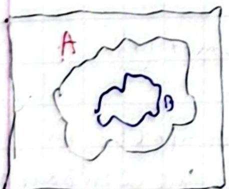
$\Rightarrow$ $B_\epsilon(x) \subset M - A$ $\therefore$ $M - A$ es abierto $\therefore$ A es cerrado

~~Teorema: Sea (M, d) esp. métrico. Si $A \subset (M, d)$ es compacto y B es cerrado en A $\Rightarrow$ B es compacto en (M, d)~~

~~Dem.- Supongamos que A es compacto y $B \subset A$ es cerrado~~

Teorema: Sea (M, d) esp. métrico y $A \subset (M, d)$ compacto. Si $B \subset A$ y B es cerrado en A $\Rightarrow$ B es compacto en (M, d)

Dem: Sea $W = \{W_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de B en (M, d)



como B es cerrado $\Rightarrow$ $M - B$ es abierto $\Rightarrow$ se tiene que

$A \subset \left(\bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha\right) \cup (M - B)$ y como A es compacto

$\Rightarrow$ $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_r \in I$ t.q $A \subset \left(\bigcup_{i=1}^{r} W_{\alpha_i}\right) \cup (M - B)$

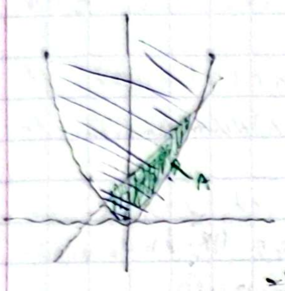
pero como $B \subset A$ $\Rightarrow$ $B \subset \left(\bigcup_{i=1}^{r} W_{\alpha_i}\right) \cup (M - B)$ pero $B \not\subset (M - B)$

$\Rightarrow$ $B \subset \bigcup_{i=1}^{r} W_{\alpha_i}$ $\therefore$ B es compacto

Def.- Sea (M,d) esp. métrico y $A \subset M$. Se dice que A está acotado si $\exists\ \overline{B}_r(c)$ en (M,d) t.q. $A \subset B_r(c)$
$c \in M$

Ejercicio.- Demostrar que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2$ y $y \leq x+1\}$ es acotado en $(\mathbb{R}^2, d)$

$$x^2 = x+1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$



Entonces $A \subset B_4(0)$,

Sea $(x,y) \in A \Rightarrow y \geq x^2 \wedge y \leq x+1$ $\boxed{\text{p.d } d((x,y),0) < 4 \\ = \sqrt{x^2+y^2} < 4}$

$\Rightarrow y \geq x^2 \wedge y^2 \leq (x+1)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 < (x+1)^2 + y^2$ pero $y \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$

$\Rightarrow x^2 + y^2 < (x+1)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right)$ pero $x^2 \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^2$

$= 2\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right] = 1 + \sqrt{5} + 2 = 3 + \sqrt{5} \approx 5.26\ldots$

$\therefore x^2 + y^2 < 5.26\ldots \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} < 4 \therefore (x,y) \in B_4(0)$

Ejercicio.- Sea (M,d) esp. métrico y $A \subset M$. Demostrar que A está acotado si y solo si $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\} < \infty$

Teorema de Heine-Borel

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto $\Leftrightarrow$ A es cerrado en $\mathbb{R}^n$ y está acotado

Dem.-

$\Rightarrow]$ Como A es compacto $\Rightarrow$ A es cerrado en $(\mathbb{R}^n, d_2)$.
Veamos que está acotado, como $\mathbb{R}^n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}_n(0)$ y como $A \subset \mathbb{R}^n$ y A es compacto $\exists n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ t.q. $A \subset \bigcup_{i=1}^{r} \overline{B}_{n_i}(0)$ sea $\xi = \max\{n_i \mid 1 \leq$
entonces $A \subset \overline{B}_\xi(0)$ $\therefore$ A es acotado

$\Leftarrow]$ Sup. que A es cerrado y acotado en $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$.
Como A está acotado $\exists \overline{B}_r^{d_\infty}(c) = \prod_{i=1}^{n} [c_i - r, c_i + r]$, (como tomo la bola en d_∞, será el producto cartesiano de n bolas en $\mathbb{R}$, pero las bolas en $(\mathbb{R}, d_\infty)$ son intervalos cerrados, los cuales son compactos, y ~~el producto~~ ~~de compactos en espacios métricos~~ y el producto cartesiano de compactos en espacios métricos es compacto en el espacio métrico producto con d_∞.
$\therefore$ $\overline{B}_r^{d_\infty}(c)$ es compacto y $A \subset \overline{B}_r^{d_\infty}(c)$ es cerrado $\therefore$

por un teorema anterior A es compacto

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado, si A es infinito $\Rightarrow$ A tiene al menos un punto de acumulación.

Dem: por contrapuesta

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado. Suponga que A no tiene puntos de acumulación.
P.D. A es finito

Como A está acotado $\Rightarrow \exists \ \bar{B}^{d_\infty}_r(c) = \prod_{i=1}^{n} [c_i - r, c_i + r]$ en $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ t.q. $A \subset \bar{B}_r(c)$ compacto. Como A no tiene puntos de acumulación ningún punto $\bar{B}_r(c)$ es punto de acumulación de A.

$\Rightarrow \forall x \in \bar{B}_r(c) \ \exists B_{\varepsilon_x}(x) \subset (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ t.q. $(B_{\varepsilon_x}(x) - \{x\}) \cap A = \emptyset$

Ahora como $\bar{B}_r(c)$ es compacto y $\bar{B}_r(c) \subset \bigcup_{x \in \bar{B}_r(c)} B_{\varepsilon_x}(x)$

$\Rightarrow \exists \ x_1, \dots, x_s \in \bar{B}_r(c)$ t.q. $\bar{B}_r(c) \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)$ y como

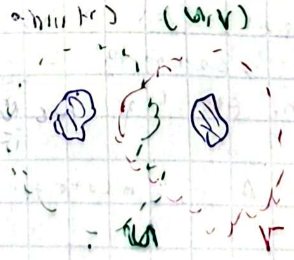
$(B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) - \{x_i\}) \cap A = \emptyset$ A tiene a lo más s puntos

pues $A \subset \bar{B}_r(c) \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)$ $\therefore$ A es finito.

Convexidad

Def: Sea (M,d) un esp. métrico y $A \subset M$. Una separación de A en (M,d) es un par de abiertos (U,V) en (M,d) t.q.

1) $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$
2) $A = (U \cap A) \cup (V \cap A)$



Se dice que la separación es trivial si $A \cap U = \emptyset$ ó $A \cap V = \emptyset$

Nótese: que si (U,V) es una separación de $A \Rightarrow$ $A \cap U$ y $A \cap V$ son abiertos y cerrados en A.

Def: Sea (M,d) esp. métrico y $A \subset M$ se dice que A es conexo en (M,d) si la única separación que admite es la trivial.

Ejercicio: Sea (M,d) esp. métrico y $c \in M$. Demuestra que $A = \{c\}$ es conexo.

Dem: Sea (U,V) una separación de A. Así

1) $(A\cap U)\cap(A\cap V)=\emptyset$
2) $A=(A\cap U)\cup(A\cap V)$

Si $c \in A\cap U \Rightarrow A\cap V=\emptyset$, si $c\in A\cap V \Rightarrow A\cap U=\emptyset$ $\therefore$ la separación es trivial $\therefore$ es conexo

Teorema: Sea (M,d) esp. métrico y $A\subseteq M$. Entonces A es conexo en $(M,d) \iff$ los únicos subconjuntos de A que son abiertos y cerrados en A son $\emptyset$ y A

Dem:

$\Rightarrow$] Sup. que A es conexo en (M,d). Sea $W\subseteq A$ t.q. W es abierto y cerrado en A. P.D $W=\emptyset$ ó $W=A$

Como $A=W\cup(A-W)$ y $W, A-W$ son abiertos en $A \Rightarrow \exists U,V\subset M$ abiertos t.q. $W=A\cap U$ y $A-W=A\cap V \Rightarrow A=(A\cap U)\cup(A\cap V)$
y como A es conexo se tiene que $A\cap U=\emptyset$ ó $A\cap V=\emptyset$
Si $A\cap U=\emptyset \Rightarrow \underline{W=\emptyset}$
Si $A\cap V=\emptyset \Rightarrow A-W=\emptyset \Rightarrow \underline{W=A}$ $\therefore$ $W=\emptyset$ ó $W=A$

$\Leftarrow$] Sup. que los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de A, son $\emptyset$ y A
P.D A es conexo

Sea (U,V) una separación de $A \Rightarrow$ por def. ~~[illegible]~~

- $(A\cap U)\cap(A\cap V)=\emptyset$
- $A=(A\cap U)\cup(A\cap V)$

Tenemos que $A\cap U$ y $A\cap V$ son abiertos y cerrados en A.
Si $A\cap U$ es abierto en $A \Rightarrow A\cap U=A$ ó $A\cap U=\emptyset$
Si $A\cap V$ es abierto en $A \Rightarrow A\cap V=A$ ó $A\cap V=\emptyset$
$\therefore$ es conexo

Def: Sea (M,d) esp. métrico, y $A \subset M$. Se dice que A es disconexo si admite una separación no trivial, esto es:

$\exists (U,V)$ abiertos no vacíos en M tq

1) $A \cap U \neq \emptyset$ y $A \cap V \neq \emptyset$
2) $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$
3) $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$

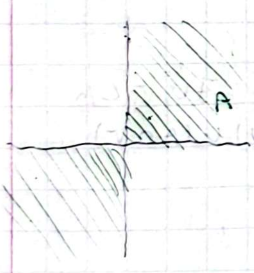
Ejercicio 1: Demuestre que $A = \mathbb{Q}$ es disconexo en $(\mathbb{R}; d)$

Dem: Sean $U = (-\infty, \sqrt{2})$, $V = (\sqrt{2}, \infty)$ los cuales son abiertos en $\mathbb{R}$, no vacíos, entonces:

1) $\mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2}) \neq \emptyset \wedge \mathbb{Q} \cap V \neq \emptyset$
2) $(\mathbb{Q} \cap U) \cap (\mathbb{Q} \cap V) = \emptyset$
3) $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap U) \cup (\mathbb{Q} \cap V)$

$\therefore$ es disconexo

Ejercicio 2: Demuestre que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$ es disconexo en $(\mathbb{R}^2, d)$



Sea $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$
$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ y < 0\}$

U, V son abiertos y no vacíos en $\mathbb{R}$

1) $A \cap U \neq \emptyset \wedge A \cap V \neq \emptyset$
2) $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$
3) $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$

$\therefore$ A es disconexo

Teorema: Sea (M,d) esp. métrico y $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una familia de conexos en (M,d). Si $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ es conexo en (M,d).

Dem: Sup. que A_α es conexo en (M,d) $\forall \alpha \in I$ $\wedge$ $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$

Sea (U,V) una separación de A en M $\Rightarrow$

1) $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$
2) $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$ P.D. $A \cap U \neq \emptyset$ o $A \cap V = \emptyset$

Sea $c \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ y suponga s.p.g que $c \in A \cap U$

Ahora como: $A_\alpha = A \cap A_\alpha = [(A\cap U) \cup (A \cap V)] \cap A_\alpha = (A_\alpha \cap U) \cup (A_\alpha \cap V)$

Como A_α es conexo $\wedge$ $A_\alpha \cap U \neq \emptyset$ ya que $c \in A_\alpha \cap U \Rightarrow A_\alpha \cap V = \emptyset$.

~~Entonces~~ (pues es una separación para A_α, entonces $A_\alpha \cap U \neq \emptyset$ ó $A_\alpha \cap V = \emptyset$)

Así $A \cap V = \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cap V = \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \cap V) = \emptyset$

y con U es igual $\therefore$ A es conexo

Corolario.- Sea (M,d) esp. métrico y $A \subseteq M$, entonces A es conexo en (M,d) $\Leftrightarrow$ para $\forall x,y \in A$ $\exists C_{xy}$ conexo en M t.q $x,y \in C_{xy} \subset A$

Dem.-

$\Rightarrow$] Sup. que A es conexo, y sean $x,y \in A$. Tomando $C_{xy} = A$ se cumple lo pedido

$\Leftarrow$] Sup. que $\forall x,y \in A$ $\exists C_{xy}$ conexo en M t.q $x,y \in C_{xy} \subset A$.

P.D. A es conexo.

Fijamos un punto $x_0 \in A$, dado $x \in A$ $\exists C_{xx_0}$ conexo en M t.q $x, x_0 \in C_{xx_0} \subset A$

Así $A = \bigcup_{x \in A} C_{xx_0}$ $\wedge$ $\bigcap_{x \in A} C_{xx_0} \neq \emptyset$ pues x_0 está en todos, así por el teorema anterior A es conexo.

Teorema.- Sea $I \subset \mathbb{R}$ no vacío. Entonces I es un intervalo en $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\forall a,b \in I$ $\wedge$ $\forall x \in \mathbb{R}$ si $a < x < b \Rightarrow x \in I$

Teorema.- $A \subset (\mathbb{R}, d)$ es conexo $\Leftrightarrow$ $A \subset \mathbb{R}$ es un intervalo

Dem.-

$\Rightarrow$] Por contradicción, suponga que A es conexo y que no es un intervalo $\overset{\text{hip}}{\Rightarrow}$ $\exists a,b \in A$ $\wedge$ $c \in \mathbb{R}$ t.q $a < c < b$ $\wedge$ $c \notin A$. Sea $U = (-\infty, c)$ $\wedge$ $V = (c, \infty)$ los cuales son abiertos no vacíos en $\mathbb{R}$ y

1) $(A \cap U) \wedge (A \cap V) \neq \emptyset$
2) $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$
3) $A = (A \cap U) \cap (A \cap V)$.

$\therefore$ A es ~~[illegible]~~ disconexo ! pues por hip A es conexo

⇐] Por contradicción, sup. que A es un intervalo y que A es disconexo $\overset{\text{def}}{\Rightarrow}$ $\exists\, U, V \subset \mathbb{R}$ abiertos no vacíos t.q.

1) $A \cap U \neq \emptyset$ $A \cap V \neq \emptyset$
2) $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$
3) $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$

Sean $a \in A \cap U$ y $b \in A \cap V$ y sup. s.p.g. que $a < b$, ~~...~~ pues $a \neq b$ porque $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$.

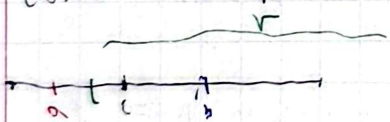
Como A es un intervalo y $a, b \in A$ $\Rightarrow$ por def. $[a,b] \subset A$

Sea $c = \sup([a,b] \cap U)$ $\Rightarrow$ $a \leq c \leq b$.
Probaremos que $c \notin A$, lo cual sería una contradicción

Si $c \in A \cap U$ $\Rightarrow$ $c \in U$ (abierto) $\Rightarrow$ $\exists\, \varepsilon > 0$ t.q. $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U$ ($B_\varepsilon(c)$). Como $c < b$ podemos tomar $\varepsilon > 0$ t.q. $[c, c+\varepsilon] \subset [a,b] \cap U$

lo cual es imposible porque $c = \sup([a,b] \cap U)$, así $c \notin A \cap U$

Por otra parte si $c \in A \cap V$ $\Rightarrow$ $c \in V$ $\Rightarrow$ $\exists\, \varepsilon > 0$ t.q. $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset V$
Como $a < c$ podemos tomar $\varepsilon > 0$ t.q. $(c-\varepsilon, c] \subset A \cap V$



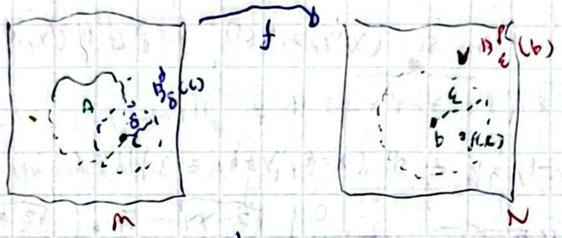
Así, por def. de $c = \sup([a,b] \cap U)$ $\exists\, x_0 \in [a,b] \cap U$ t.q. $c - \varepsilon < x_0 < c$ $\Rightarrow$ $x_0 \in V$
$\Rightarrow$ $x_0 \in A \cap V$, lo cual es imposible ya que $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$

$\Rightarrow$ $c \notin A \cap V$ $\therefore$ $c \notin A$!

Limites

Def.- Sea $f: A \subset (M,d) \to (N,\rho)$ una función y sea $c \in A'$.
Se dice que f tiene límite en c, si y solo si

$\exists b \in N$ t.q. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, $\forall x \in A$ t.q. si $0 < d(x,c) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), b) < \varepsilon$



$\exists b \in N$ t.q. $\forall B^{\rho}_{\varepsilon}(b) \subset N$ $\exists B^{d}_{\delta}(c) \subset M$ t.q. $\forall x \in B$ $f[A \cap (B^d_\delta(c) - \{c\})] \subset B^\rho_\varepsilon(c)$

Teorema.- Sea $f: A \subset (M,d) \to (N,\rho)$ una función y $c \in A'$.
Si f tiene límite en c, entonces el límite es único.

Dem.- Supongamos que f tiene límite en c a $b_1, b_2 \in N$.
Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis $\exists \delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ t.q. si ~~x∈A~~ y
~~0<d(x,c)~~ si $x \in A$ y $0 < d(x,c) < \delta_1 \Rightarrow \rho(f(x), b_1) < \frac{\varepsilon}{2}$
si $x \in A$ y $0 < d(x,c) < \delta_2 \Rightarrow \rho(f(x), b_2) < \frac{\varepsilon}{2}$
Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene que si $x \in A$ y $0 < d(x,c) < \delta$
$\Rightarrow \underbrace{0 \le \rho(b_1, b_2)}_{\text{métrica}} < \rho(f(x), b_1) + \rho(f(x), b_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon$

$\therefore\ 0 \le \rho(b_1, b_2) \le \varepsilon \quad \forall \varepsilon \Rightarrow \rho(b_1, b_2) = 0 \underset{\text{métrica}}{\Rightarrow} b_1 = b_2$.

Notación.- Si $\exists$ el límite de $f(x)$ en c, y este es b, se denotará

$$\lim_{x \to c} f(x) = b$$

Ejercicio 1.- Demuestra que $\lim_{(x,y) \to (-2,3)} (x^2 y - 5x) = 22$

Dem.- $f(x,y) = x^2 y - 5x \Rightarrow f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Sea $\varepsilon > 0$. P.D. $\exists \delta > 0$ t.q. si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $0 < \underbrace{\|(x,y) - (2,3)\|}_{\|(x+2, y-3)\|} \Rightarrow |f(x,y) - 22| < \varepsilon$

Como $|f(x,y) - 22| = |x^2 y - 5x - 22|$

Ejercicio 2.- Demostrar que $\lim_{(x,y,z)\to(4,-1,3)} \sqrt{z-xy} = \sqrt{7}$

$f(x,y,z) = \sqrt{z-xy} \Rightarrow z-xy \geq 0 \Rightarrow f: \underbrace{\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z-xy\geq 0\}}_{D} \to \mathbb{R}$

Sea $\varepsilon>0$ p.d. $\exists\delta>0$ t.q. si $(x,y,z)\in D$ y $0<\|(x,y,z)-(4,-1,3)\|<\delta$ $\Rightarrow |f(x,y,z)-\sqrt{7}|<\varepsilon$

Tenemos $\|(x,y,z)-(4,-1,3)\| = \|(x-4,y+1,z-3)\|<\delta$

Como $|f(x,y,z)-\sqrt{7}| = |\sqrt{z-xy}-\sqrt{7}| = \left|\sqrt{z-xy}-\sqrt{7}\cdot\left(\frac{\sqrt{z-xy}+\sqrt{7}}{\sqrt{z-xy}+\sqrt{7}}\right)\right|$

$= \left|\frac{z-xy-7}{\sqrt{z-xy}+\sqrt{7}}\right|$ Dado que $0\leq\sqrt{z-xy} \Rightarrow \sqrt{7}\leq\sqrt{z+xy}+\sqrt{7} \Rightarrow$

$\frac{1}{\sqrt{z+xy}+\sqrt{7}} < \frac{1}{\sqrt{7}}$.

$\Rightarrow |f(x,y,z)-\sqrt{7}| \leq \frac{|z-xy-7|}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}|z-xy-7|$. (Ahora necesito que aparezca $(x-4),(y+1)$ y $(z-3)$)

$z-xy-7 = (z-3)-xy-4 = (z-3)-xy+4y-4y-4 = (z-3)-y(x-4)-4(y+1)$

Así $|f(x,y,z)-\sqrt{7}| \leq \frac{1}{\sqrt{7}}|(z-3)-y(x-4)-4(y+1)|$

$\leq\frac{1}{\sqrt{7}}(|z-3|+|y||x-4|+4|y+1|)$

Sea $\delta_0=\frac{1}{2} \Rightarrow 0<\|(x,y,z)-(4,-1,3)\|<\frac{1}{2} \Rightarrow |y+1|<1 \Rightarrow -\frac{1}{2}<y+1<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{3}{2}<y<-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}<-y<\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{|y|<\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow |f(x,y,z)-\sqrt{7}| \leq \frac{1}{\sqrt{7}}(|z-3|+\frac{3}{2}|x-4|+4|y+1|)$.
(Cuando $\|(x,y,z)-(4,-1,3)\|<\frac{1}{2}$)

Por otra parte: $|f(x,y,z)-\sqrt{7}| \leq \frac{1}{\sqrt{7}}[\|(x-4,y+1,z-3)\|+\frac{3}{2}\|(x-4,y+1,z-3)\|$
$+4\|(x-4,y+1,z-3)\|]$ (pues $\delta_0<\delta_2$) ya que $|x|<\|(x,y)\|$)

$\Rightarrow |f(x,y,z)-\sqrt{7}| \leq \frac{13}{2\sqrt{7}}\|(x-4,y+1,z-3)\| < \frac{13}{2\sqrt{7}}\delta = \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{2\sqrt{7}}{13}$

Tomando $\delta=\min\{\frac{1}{2},\frac{2\sqrt{7}}{13}\varepsilon\}$ se tiene que $(x,y,z)\in D$
y $0<\|(x,y,z)-(4,-1,3)\|<\delta \Rightarrow |f(x,y,z)-\sqrt{7}| \leq \frac{1}{\sqrt{7}}(|z-3|+|y||x-4|$
$+4|y+1|) \leq \frac{1}{\sqrt{7}}[|z-3|+\frac{3}{2}|x-4|+4|y+1|] \leq \frac{13}{2\sqrt{7}}\|(x-4,y+1,z-3)\|$

$< \frac{13}{2\sqrt{7}}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{13}\varepsilon = \varepsilon$

Ejercicio 3.- Demuestra que $\lim_{(x,y,z)\to(-2,1,5)} (2xy-z, xyz) = (-9,-10)$

$f(x,y,z) = (2xy-z, xyz) \Rightarrow f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Sea $\varepsilon > 0$ P.D. $\exists \delta > 0$ t.q. si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ y $0 < \|(x,y,z) - (-2,1,5)\|_3 < \delta$ $\|(x+2, y-1, z-5)\|$
$\Rightarrow \|f(x,y,z) - (-9,-10)\|_2 < \varepsilon$

Tomemos $\|f(x,y,z) - (-9,-10)\|_2 = \|(\underbrace{2xy-z+9}_{\circ}, \underbrace{xyz+10}_{\circ\circ})\|$
(Queremos que aparezcan $x+2$, $y-1$, $z-5$)

$\circ)$ $2xy - z + 9 = 2xy + 4 - z + 5 = 2xy + 4 - (z-5) = 2xy + 4y - 4y + 4 - (z-5)$

$= 2y(x+2) - 4(y-1) - (z-5)$

$\circ\circ)$ $xyz + 10 = xyz + 2yz - 2yz + 10 = yz(x+2) + 10 - 2yz = yz(x+2) - 2yz + 2z - 2z + 10$

$= yz(x+2) - 2z(y-1) - 2(z-5)$

$\Rightarrow \|f(x,y,z) - (-9,-10)\|_2 = \|(2y(x+2) - 4(y-1) - (z-5),\ yz(x+2) - 2z(y-1) - 2(z-5))\|_2$

$\Rightarrow \leq |2y(x+2) - 4(y-1) - (z-5)| + |yz(x+2) - 2z(y-1) - 2(z-5)|$
$\leq 2|y||x+2| + 4|y-1| + |z-5| + |y||z||x+2| + 2|z||y-1| + 2|z-5|$

Sea $\delta_0 = 1$ y $\|(x+2, y-1, z-5)\| < 1 \Rightarrow$

$|y-1| < 1$ $\wedge$ $|z-5| < 1$ $\Rightarrow -1 < y-1 < 1$ y $-1 < z-5 < 1$
$\Rightarrow 0 < y < 2$ y $4 < z < 6 \Rightarrow |y| < 2,\ |z| < 6$

$\Rightarrow$ Así $\|f(x,y,z) - (-9,-10)\| \leq 4|x+2| + 4|y-1| + |z-5| + 12|x+2| + 12|y-1| + 2|z-5|$

$= 16|x+2| + 16|y-1| + 3|z-5|$

cuando $\|(x+2, y-1, z-5)\| < 1$

por otra parte,

$\|f(x,y,z) - (-9,-10)\| \leq 16\|(x+2, y-1, z-5)\| + 16\|(x+2, y-1, z-5)\| + 3\|(x+2, y-1, z-5)\|$

$= 35\|(x+2, y-1, z-5)\| = 35\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{35}$

Sea $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{35}\}$

Teorema.- Sea $f: A \subset (M,d) \to (N,\delta)$ una función y $c \in A'$. Entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x) = b \iff$ para toda sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ en $A-\{c\}$ t.q. $x_n \to c$ se tiene que $f(x_n) \to b$

Dem.-

$\Rightarrow)$ Sup. que $\lim\limits_{x\to c} f(x)=b$ y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $A-\{c\}$ t.q. $x_n\to c$. P.D. $f(x_n)\to b$

Sea $\varepsilon>0$. Veamos que $\exists n_0\in\mathbb{N}$ t.q. si $n\geq n_0 \Rightarrow \delta(f(x_n),b)<\varepsilon$

Como $\varepsilon>0$ y $\lim\limits_{x\to c} f(x)=b \Rightarrow \exists\delta>0$ t.q. si $x\in A$ y $d(x,c)<\delta \Rightarrow \delta(f(x),b)<\varepsilon$

Por otra parte como $\delta>0$ y $x_n\to c \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}$ t.q. si $n\geq n_0 \Rightarrow d(x_n,c)<\delta \Rightarrow$ si $n\geq n_0 \Rightarrow 0<d(x_n,c)<\delta \Rightarrow \delta(f(x_n),b)<\varepsilon$

por contradicción

$\Leftarrow)$ Sup. que para toda $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $A-\{c\}$ t.q. $x_n\to c$ se tiene que $f(x_n)\to b$ y que $\lim\limits_{x\to c} f(x)\neq b$

Como $\lim\limits_{x\to c} f(x)\neq b$ $\exists\varepsilon_0>0$ t.q. $\forall\delta>0\ \exists x_\delta\in A$ t.q. $0<d(x,c)<\delta \wedge \delta(f(x),b)\geq\varepsilon$

Como es $\forall\delta>0$ tomamos $\delta=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, tenemos que $\exists x_n\in A$ t.q. $0<d(x_n,c)<\frac{1}{n} \wedge \delta(f(x_n),b)\geq\varepsilon_0$

Luego $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $A-\{c\}$ t.q. $x_n\to c$ y $\delta(f(x_n),b)\geq\varepsilon_0 \Rightarrow f(x_n)\not\to b$! pues por hipótesis $\forall$ sucesión $x_n\to c$, $f(x_n)\to b$.

Corolario.- Sean $d_1,d_2: M\times M\to\mathbb{R}$ métricas equivalentes en M y $\delta_1,\delta_2: N\times N\to\mathbb{R}$ métricas equivalentes en N. Sea $A\subset M$ y $c\in A'$ entonces el límite de $f: A\subset(M,d_1)\to(N,\delta_1)$ cuando x se aproxima a "c" es un punto $b\in N \iff$ el límite de $f: A\subset(M,d_2)\to(N,\delta_2)$ cuando x se aproxima a "c" es b

Dem.-

$\Rightarrow)$ Supongamos que el límite de $f: A\subset(M,d_1)\to(N,\delta_1)$ cuando "x" se aproxima a "c" es $b\in N$.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $A-\{c\}$ t.q. $x_n\to c$ en (M,d_2)
P.D. $f(x_n)\to b$ en (M,δ_2)

Como d_1,d_2 son equivalentes y $x_n\to c$ en $(M,d_2) \Rightarrow x_n\to c$ en (M,d_1)
$\Rightarrow$ como $f: A\subset(M,d_1)\to(N,\delta_1)$ converge a b, ~~...~~ y x_n es

una sucesión en A, por el teorema anterior $\Rightarrow f(x_n) \to b$ en (N, ρ_1) y como ρ_1, ρ_2 son equivalentes $\Rightarrow f(x_n) \to b$ en (N, ρ_2).

$\Leftarrow$ De forma similar.

Corolario: Sean $f, g: A \subset (M, d) \to \mathbb{R}$ funciones y $c \in A'$, suponga que $\lim_{x \to c} f(x) = l_1$, $\lim_{x \to c} g(x) = l_2 \Rightarrow$

a) $\lim_{x \to c} (f \pm g)(x) = l_1 \pm l_2$,

b) $\lim_{x \to c} (f \cdot g)(x) = l_1 \cdot l_2$

c) Si $l_2 \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l_1}{l_2}$

Dem:

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $A - \{c\}$ t.q. $x_n \to c$. P.D. $(f \pm g)(x_n) \to l_1 \pm l_2$, $(f \cdot g)(x_n) \to l_1 \cdot l_2$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) \to \frac{l_1}{l_2}$.

Por hipótesis $f(x_n) \to l_1$, $g(x_n) \to l_2$ en $\mathbb{R} \Rightarrow (f \pm g)(x_n) \to l_1 \pm l_2$, $(f \cdot g)(x_n) \to l_1 \cdot l_2$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) \to \frac{l_1}{l_2}$ pues son sucesiones en $\mathbb{R}$.

Def: Sea $f: A \subset (M, d) \to \mathbb{R}$ una función, se dice que f está acotada si $\exists\, m \in \mathbb{R}^+$ t.q. $|f(x)| \leq m$ $\forall x \in A$.

Ejercicio: Determine si f está o no acotada.

1) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ $\quad f: \mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\} \to \mathbb{R}$

Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}$ se tiene que $x^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \Rightarrow |f(x,y)| \leq 1$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}$ $\therefore f$ está acotada.

2) $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ $\quad f: \underbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}}_{B} \to \mathbb{R}$

Af: f no es acotada.

Sup. que f es acotada $\Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{R}^+$ t.q. $|f(x,y)| \leq m \Rightarrow \left|\frac{1}{xy}\right| \leq m$ $\forall (x,y) \in B$

Sea $\left(1, \frac{1}{2m}\right) \Rightarrow \left|f\left(1, \frac{1}{2m}\right)\right| \leq m \Rightarrow \left|\frac{1}{1 \cdot \frac{1}{2m}}\right| \leq m \Rightarrow 2m \leq m$! $\therefore$ No está acotada.

Teorema: Sean $f, g: A \subset (M, d) \to \mathbb{R}$ funciones y $c \in A'$. Si f está acotada y $\lim_{x \to c} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to c} (f \cdot g)(x) = 0$

Dem: Sea $\varepsilon > 0$. P.D. $\exists \delta > 0$ t.q. si $x \in A \wedge 0 < d(x, c) < \delta \Rightarrow |(f \cdot g)(x)| < \varepsilon$

Por hipótesis como f es acotada $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+$ t.q. $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in A$

Ahora, como $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ y $\lim_{x \to c} g(x) = 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ t.q. si $x \in A \wedge 0 < d(x, c) < \delta$
$\Rightarrow |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow M|g(x)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)||g(x)| < M|g(x)| < \varepsilon$.

Luego si $x \in A$ y $0 < d(x, c) < \delta \Rightarrow |(f \cdot g)(x)| = |f(x)||g(x)| < M|g(x)|$

$< M \cdot \frac{\varepsilon}{M} < \varepsilon$ ∎ $\therefore \lim_{x \to c} (f \cdot g)(x) = 0$.

Ejercicio: Calcula $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

Tenemos que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot y \right)$ pero como $\frac{x^2}{x^2 + y^2}$ está acotada y $\lim_{(x,y) \to (0,0)} y = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$.

Teorema: Sea (M, d), (N_i, d_i) $1 \leq i \leq n$ esp. métricos y $N = \prod_{i=1}^{n} N_i$ el esp. métrico producto. Sea $A \subset M$ y $c \in A'$. Sean $f_i: (M, d) \to (N_i, d_i)$ $1 \leq i \leq n$ funciones y $f: (M, d) \to (N, d_2)$ dada por $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$. Entonces $\lim_{x \to c} f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to c} f_i(x)$ $\exists$ $\forall 1 \leq i \leq n$

Dem:

$\Rightarrow$) Sea $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in N$ y suponga que $\lim_{x \to c} f(x) = \bar{b}$

Sea $\varepsilon > 0$. Veamos que $\exists \delta_i > 0$ t.q. si $x \in A \wedge 0 < d(x, c) < \delta_i \Rightarrow d_i(f_i(x), b_i) < \varepsilon$
Por hipótesis $\exists \delta > 0$ t.q. si $x \in A$ y $0 < d(x, c) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), \bar{b}) < \varepsilon$

$\Rightarrow$ dado que $d_i(f_i(x), b_i) \leq d_2(f(x), \bar{b}) \quad \forall 1 \leq i \leq n$ pues estamos en esp. métrico producto.
Tomando $\delta_i = \delta$ se tiene que si $x \in A$ y $0 < d(x, c) < \delta_i \Rightarrow$
$d_i(f_i(x), b_i) \leq d_2(f(x), \bar{b}) < \varepsilon$ ∎

$\Leftarrow$) Supongo que $\lim_{x \to c} f_i(x) = b_i$ $1 \leq i \leq n$.

Sea $\varepsilon > 0$, P.D. $\exists \delta > 0$ t.q. si $x \in A \wedge 0 < d(x, c) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), \bar{b}) < \varepsilon$

Por hipótesis $\delta_i > 0$ tq si $x \in A$ $\wedge$ $0 < d(x,c) < \delta_i \Rightarrow d_i(f_i(x), b_i) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

Tomando $\delta = \min\{\delta_i \mid 1 \le i \le n\}$ se tiene que

si $x \in A$ y $0 < d(x,c) < \delta \Rightarrow d_i(f_i(x), b_i) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i(f_i(x), b_i) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow d_i^2(f_i(x), b_i) < \frac{\varepsilon^2}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i^2(f_i(x), b_i) < \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(f_i(x), b_i)} < \varepsilon$

$\Rightarrow d_2(f(x), b) < \varepsilon$ ∎

Ejercicio 1: Determina si los siguientes límites existen

1) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \left(\frac{x^3-y^3}{x-y}, \sqrt{5x-y} \right)$

$f(x,y) = \left(\frac{x^3-y^3}{x-y}, \sqrt{5x-y} \right) \Rightarrow f: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-y \neq 0 \wedge 5x-y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Entonces el límite existe $\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(1,1)} \left(\frac{x^3-y^3}{x-y}\right) \wedge \lim_{(x,y)\to(1,1)} \sqrt{5x-y}$ existen

$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \left(\frac{x^3-y^3}{x-y} \right) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2+xy+y^2) = 3$

$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \sqrt{5x-y} = 2$. $\therefore \lim \cdots = (3, 2)$

2) $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \left(\frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}, \frac{1}{x+y}, xy \right)$ $f: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} \neq 0 \wedge x+y \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

- $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{1}{x+y}$ no existe $\therefore \lim_{(x,y)\to(1,-1)} (\cdots, \cdots, \cdots)$ no existe.

Continuidad

Def.- Sea $f: A \subset (M,d) \to (N,\rho)$ una función y $c \in A$. Se dice que f es continua en $c \iff$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)[\text{si } d(x,c) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(c)) < \varepsilon$

$(\forall B_\varepsilon^\rho(f(c)) \subset N)(\exists B_\delta^d(c) \subset M)\left[f[A \cap B_\delta^d(c)] \subset B_\varepsilon^\rho(f(c))\right]$

f no es continua en $c \iff$

$(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall \delta > 0)[\exists x_\delta \in A][\ d(x_\delta, c) < \delta$ y $\rho(f(x), f(c)) \geq \varepsilon_0$

Teorema = Sea $f: A \subset (M,d) \to (N,\rho)$ y $c \in A$. Entonces f es continua en $c \iff \forall$ vecindad abierta $W \subset (N,\rho)$ de $f(c)$ $\exists U \subset (M,d)$ vecindad abierta de c t.q $f[U \cap A] \subset W$

$\Rightarrow$] Suponga que f es continua en c. Sea W vecindad abierta de $f(c)$. P.D $\exists U \subset (M,d)$ vecindad abierta de c t.q $f[U \cap A] \subset W$

Como W es abierto y $f(c) \in W \Rightarrow \exists B_\varepsilon^\rho(f(c))$ en (N,ρ) t.q $B_\varepsilon^\rho(f(c)) \subset W$

Dado $\varepsilon > 0$ y f es continua en $c \Rightarrow \exists B_\delta^d(c)$ en (M,d) t.q $f[B_\delta^d(c) \cap A] \subset B_\varepsilon^\rho(f(c)) \subset W$. Tomando $U = B_\delta^d(c)$ se tiene

$\Leftarrow$] Suponga que $\forall$ vecindad abierta $W \subset (N,\rho)$ de $f(c)$ $\exists U \subset (M,d)$ vecindad abierta de c t.q $f[A \cap U] \subset W$

P.D f es continua en c

Sea $\varepsilon > 0$. P.D $\exists \delta > 0$ t.q $f[B_\delta^d(c) \cap A] \subset B_\varepsilon^\rho(f(c))]$

Como $B_\varepsilon^\rho(f(c))^{C(N,\rho)}$ es vecindad abierta de $f(c) \Rightarrow$ por hip $\Rightarrow$
$\exists U \subset (M,d)$ vecindad abierta de "c" t.q $f[A \cap U] \subset B_\varepsilon^\rho(f(c))$

Por otra parte como U es abierto y $c \in U \Rightarrow \exists B_\delta^d(c)$ t.q
$B_\delta^d(c) \subset U \Rightarrow f[A \cap B_\delta^d(c)] \subset f[A \cap U] \subset B_\varepsilon^\rho(f(c))$

Q.E.D.

Ejercicio: Sea $f: A \subset (M,d) \to (N,\rho)$ y $c \in A$. Demuestra que si c es un punto aislado de $A \Rightarrow f$ es continua en c

Dem: Sea $\varepsilon > 0$. P.D $\exists \delta$ t.q ~~$f[A \cap B_\delta(c)] \subset B$~~
si $x \in A$ y $d(x,c) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(c)) <$

Como c es punto aislado de A $\Rightarrow$ $c \notin A'$ $\Rightarrow$ $\exists B_\delta(c)$ en (M,d) t.q. $(B_\delta(c)-\{c\}) \cap A = \emptyset$. Luego si $x \in A$ y $d(x,c) < \delta \Rightarrow x = c$
$\Rightarrow \rho(f(x), f(c)) < \varepsilon$

Teorema.- Sea $f: A \subset (M,d) \to (N,\rho)$ una función y $c \in A \cap A'$. Entonces f es continua en c $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Dem.-
$\Rightarrow$] Supongo que f es continua en c. Sea $\varepsilon > 0$ p.d. $\exists \delta > 0$ t.q. si $x \in A$ y $0 < d(x,c) < \delta$ $\Rightarrow \rho(f(x), f(c)) < \varepsilon$

Como $\varepsilon > 0$ y f es continua en c, $\Rightarrow \exists \delta > 0$ t.q. $x \in A$ y $d(x,c) < \delta \Rightarrow$ $\rho(f(x), f(c)) < \varepsilon$, en particular si $x \in A$ y $0 < d(x,c) < \delta \Rightarrow$ $\rho(f(x), f(c)) < \varepsilon$ (pues $d(x,y) \geq 0$ por métrica)

$\Leftarrow$] Sup. que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. De forma similar ∎

Teorema.- Sea $f: A \subset (M,d) \to (N,\rho)$ una función y $c \in A \cap A'$. Entonces f es continua en c $\Leftrightarrow$ para cada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $A-\{c\}$ t.q. $x_n \to c$, se tiene que $f(x_n) \to f(c)$

Dem.-
Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $A-\{c\}$; entonces f es continua en c $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ $\Leftrightarrow$ dada cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $A-\{c\}$ t.q. $x_n \to c$ se tiene que $f(x_n) \to f(c)$ (por teoremas anteriores)

Corolario.- Sean $d_1, d_2: M\times M \to \mathbb{R}$ y $\rho_1, \rho_2: N \times N \to \mathbb{R}$ métricas equivalentes en M y N respectivamente. Sea $A \subset M$ y $c \in A \cap A'$. Entonces $f: A \subset (M,d_1) \to (N,\rho_1)$ es continua en c $\Leftrightarrow$ $f: A \subset (M,d_2) \to (N,\rho_2)$ es continua en c.

Dem.- $f: A \subset (M,d_1) \to (N,\rho_1)$ es continua en c $\Leftrightarrow$ el límite de $f: A \subset (M,d_1) \to (N,\rho_1)$ en "c" es $f(c)$ $\Leftrightarrow$ el límite de $f: A \subset (M,d_2) \to (N,\rho_2)$ es $f(c)$ $\Leftrightarrow$ $f: A \subset (M,d_2) \to (N,\rho_2)$ es continua en c.

Corolario.- Sean (M,d), (N_i,ρ_i) $1 \leq i \leq n$ esp. métricos y $N = \prod_{i=1}^{n} N_i$ el esp. métrico producto. Sea $A \subseteq M$ y $c \in A \cap A'$ y $f_i: A \subset (M,d) \to (N_i,\rho_i)$ $1 \leq i \leq n$ funciones y $f: A \subset (M,d) \to (N,d_2)$ t.q. $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$.
Entonces f es continua en "c" $\Leftrightarrow$ $f_i: A \subset (M,d) \to (N_i,\rho_i)$ es continua en "c"

Dem: $f: A\subset(M,d) \to (N,\rho)$ es continua $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

$\lim_{x\to c} f_i(x) = f_i(c)$ $\Leftrightarrow$ $f_i: A\subset(M,d) \to (N_i,\rho_i)$ es continua $\forall i \in \mathbb{N}$

Teorema: Sean $f: A\subset(M,d)\to(N,\rho)$ y $g: B\subset(N,\rho)\to(W,\gamma)$ funciones t.q. $f(A)\subset B$. Si f es continua en $c\in A$ y g es continua en $f(c)$ $\Rightarrow$ $g\circ f: (A\subset(M,d)\to(W,\gamma))$ es continua en c

Dem: Sea $\varepsilon>0$ p.d. $\exists B_\delta^d(c)\subset(M,d)$ t.q. $(g\circ f)[A\cap B_\delta^d(c)] \subset B_\varepsilon^\gamma(g(f(c)))$

Como $\varepsilon>0$ y g es continua en $f(c) \Rightarrow \exists B_z^\rho(f(c))\subset(N,\rho)$ t.q.

$g[B\cap B_z^\rho(f(c))]\subset B_\varepsilon^\gamma(g(f(c)))$.

Dado que $z>0$ y f es continua en "c" $\Rightarrow \exists B_\delta^d(c)\subset(M,d)$ t.q.

$f[A\cap B_\delta^d(c)]\subset B_z^\rho(f(c))$

Así $g\circ f[A\cap B_\delta^d(c)] = g[f(A\cap B_\delta^d(c))]$

$\subset g(B\cap B_z^\rho(f(c)))\subset B_\varepsilon^\gamma(g(f(c)))$ $\therefore$ $g\circ f$ es continua

Teorema: Sean $f,g: A\subset(M,d)\to\mathbb{R}$ funciones y $c\in A\cap A'$. Si f y g son continuas en "c" entonces:

1) $f+g$ es continua en c
2) $f\cdot g$ es continua en c
3) Si $g(c)\neq 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)_D: \{x\in A \mid g(x)\neq 0\}\to\mathbb{R}$ es continua en "c"

Dem: Como f y g son continuas en "c" $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$, $\lim_{x\to c} g(x)=g(c)$

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to c} f(x)+g(x) = f(c)+g(c) = (f+g)(c)$

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to c} (f\cdot g)(x) = \lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = f(c)\cdot g(c) = (f\cdot g)(c)$

Si $g(c)\neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} = \left(\frac{f}{g}\right)(c)$ ■

Teorema.- Sean (N_i, ρ_i) $1 \le i \le n$ esp. métricos y $N = \prod_{i=1}^{n} N_i$ el esp. métrico producto. Se definen las proyecciones como las funciones $\pi_i : (N, d_2) \to (N_i, \rho_i)$, t.q. $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$. Demuestra que π_i es continua.

Dem.- Sea $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n) \in N$ y sea $\varepsilon > 0$ P.D. $\exists \delta > 0$ t.q. si $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in N$ y $d_2(\bar{x}, \bar{c}) < \delta \Rightarrow \rho_i(\pi_i(\bar{x}), \pi_i(\bar{c})) < \varepsilon$

Como $\rho_i(\pi_i(\bar{x}), \pi_i(\bar{c})) = \rho_i(x_i, c_i) \le d_2(\bar{x}, \bar{c})$, tomando $\delta = \varepsilon$ se tiene que si $\bar{x} \in N$ y $d(\bar{x}, \bar{c}) < \delta \Rightarrow \rho_i(\pi_i(\bar{x}), \pi_i(\bar{c})) \le d_2(\bar{x}, \bar{c}) < \varepsilon$

Ejercicio 1.- Demuestra que $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(x^2 - yz)$ es continua en $\mathbb{R}^3$

Dem.- Sean $\pi_1, \pi_2, \pi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\pi_1(x,y,z) = x$ $\pi_2(x,y,z) = y$ y $\pi_3(x,y,z) = z$ las cuales son continuas $\Rightarrow (\pi_1^2 - \pi_2 \cdot \pi_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es continua y sea $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q. $\ell(t) = \operatorname{sen}(t)$, la cual es continua $\Rightarrow [\ell \circ (\pi_1^2 - \pi_2 \cdot \pi_3)](x,y,z) = \ell[(\pi_1^2 - \pi_2 \cdot \pi_3)(x,y,z)] = \ell(x^2 - y \cdot z) = \operatorname{sen}(x^2 - yz)$ es continua (producto, suma y composición de continuas)

Teorema.- Sean $f : A \subset (M, d) \to (N, \rho)$ y $g : B \subset (N, \rho) \to (W, \gamma)$ t.q. $f(A) \subset B$ y $c \in A'$. Si $\lim_{x \to c} f(x) = b$, $b \in B$ y g es continua en b $\Rightarrow$ $\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(b) \Rightarrow \lim_{x \to c} g(f(x)) = g(\lim_{x \to c} f(x))$

Dem.- Sea $\varepsilon > 0$ P.D. $\exists \delta > 0$ t.q. si $x \in A$ y $d(x, c) < \delta \Rightarrow \gamma(g(f(x)), g(b)) < \varepsilon$

Como g es continua en b y $\varepsilon > 0$ entonces $\exists \theta > 0$ t.q. si $y \in B$ y $\rho(y, b) < \theta \Rightarrow \gamma(g(y), g(b)) < \varepsilon$

Por otra parte como $\lim_{x \to c} f(x) = b$ y $\theta > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ t.q. si $x \in A$ y $d(x, c) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), b) < \theta$

pues si $y \in B \Rightarrow \rho(y, b) < \theta \Rightarrow \gamma(g(y), g(b)) < \varepsilon$

Luego si $x \in A$ y $d(x, c) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), b) < \theta \Rightarrow \gamma(g(f(x)), g(b)) < \varepsilon$

Ejercicio 1.- Calcula $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{xy}$

Sol.- Sea $f(x,y) = xy \Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$ t.q. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

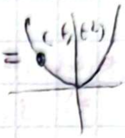
y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \ne 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ tenemos que $g(t)$ es continua en "0" $\cancel{\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} g(f(x,y)) = g\left(\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)\right)}$ y $\lim_{t \to 0} g(t) = g(0) = 1$

$\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} (g \circ f)(x,y) = 1 \Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{xy} = 1$ ∎

Def.- Sea (M,d) esp. métrico y $A \subset M$ una <u>trayectoria en A</u> es una función continua $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \to M$ t.q. $\alpha(t) \in A$ $\forall t \in I$ donde I es un intervalo

Ejemplo

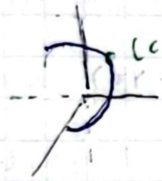
1) $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t, t^2)$ $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ t $\to$ $\alpha(t) =$ (t, t^2)



2) $\alpha: [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$

t $\xrightarrow{\alpha}$ $(\cos(t), \sin(t), t)$

0 2π



Teorema.- Sea $f: A \subset (M,d) \to (N,\delta)$ una función y $c \in A'$.

Si $\lim_{x \to c} f(x) = b$, $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to M$ es una trayectoria en A, $\alpha(t_0) = c$ t.q. $t_0 \in I$ y $\alpha(t) \neq c$ para $t \neq t_0$ $\Rightarrow$ $\lim_{t \to t_0} (f \circ \alpha)(t) = b$

Dem.- Sea $\varepsilon > 0$ P.D $\exists \delta > 0$ t.q. si $t \in I$ y $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \delta(f(\alpha(t)), b) < \varepsilon$

Como $\varepsilon > 0$ y $\lim_{x \to c} f(x) = b \Rightarrow \exists \xi > 0$ t.q. si $x \in A$ y $0 < d(x, c) < \xi$ $\Rightarrow \delta(f(x), b) < \varepsilon$

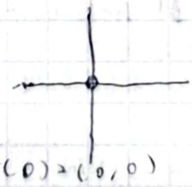
Por otra parte como α es continua en t_0 y $\xi > 0$ $\Rightarrow \exists \delta > 0$ t.q. si $t \in I$ y $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow d(\alpha(t), c) < \xi$ y como $\alpha(t) \neq c$ $\forall t \neq t_0 \Rightarrow 0 < \delta(f(\alpha(t)), b) < \varepsilon$

llamémosle x

Ejercicio 1.- Determina los siguientes límites si existen

- $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$

Tenemos $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow f: \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}$

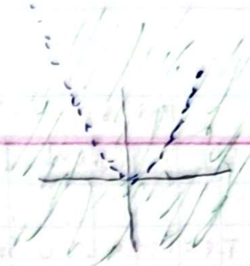


Sea $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ t.q. $\alpha(t) = (t, t) \Rightarrow \alpha(0) = (0,0)$

$\Rightarrow (f \circ \alpha)(t) = f(t,t) = \frac{t}{2t^2} = \frac{1}{2t}$

Pero $\lim_{t \to 0} \frac{1}{2t}$ no existe $\therefore$ $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$ no existe

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2-y}$ $\qquad f(x,y)=\dfrac{x}{x^2-y}$ $\qquad f:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq x^2\}\to\mathbb{R}$



Sea $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ t.q. $\alpha(t)=(0,t) \Rightarrow \alpha(0)=(0,0)$

$\Rightarrow (f\circ\alpha)(t)=f(0,t)=\dfrac{0}{-t}=0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to0}(f\circ\alpha)(t)=0$

Ahora sea $\alpha_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ t.q. $\alpha_2(t)=(t,0) \Rightarrow \alpha_2(0)=(0,0)$

$\Rightarrow (f\circ\alpha_2)(t)=f(t,0)=\dfrac{t}{t^2}=\dfrac{1}{t}$

$\Rightarrow \lim\limits_{t\to0}(f\circ\alpha_2)(t)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t}$ no existe $\therefore$ lim no existe

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^4} \Rightarrow f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^4}$ $\quad f:\mathbb{R}^2-\{0\}\to\mathbb{R}$

$\alpha_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ t.q. $\alpha_1(t)=(t,0) \Rightarrow \lim\limits_{t\to0}(f\circ\alpha_1)(t)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{0}{t^2}=0$

$\alpha_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ t.q. $\alpha_2(t)=(0,t) \Rightarrow \lim\limits_{t\to0}(f\circ\alpha_2)(t)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{0}{t^4}=0$

$\alpha_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ t.q. $\alpha_3(t)=(t^2,t) \Rightarrow \lim\limits_{t\to0}(f\circ\alpha_3)(t)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t^5}{2t^4}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{2}t=0$

$\alpha_4:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ t.q. $\alpha_4(t)=(t,t^3) \Rightarrow \lim\limits_{t\to0}(f\circ\alpha_4)(t)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t^5}{t^2+t^{12}}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t^3}{1+t^{10}}=0$

$f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^4}$ $\quad f:\mathbb{R}^2-\{0\}\to\mathbb{R}$, tenemos que x^2 ~~[illegible]~~

Sea $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{0\} \Rightarrow x\neq0$ ó $y\neq0$

Si $x=0 \Rightarrow f(0,y)=0$

Si $x\neq0 \Rightarrow x^2\leq x^2+y^4 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2+y^4}\leq\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x^2+y^4}\right|\leq\left|\dfrac{1}{x^2}\right|$

$\Rightarrow 0\leq\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^4}\right|\leq\dfrac{x^2}{x^2}|y|=|y|$

$\Rightarrow \underbrace{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0}_{=0} \leq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x) \leq \underbrace{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|y|}_{=0}$ $\therefore$ lim $=0$.

Def.: Sea $f:A\subset(M,d)\to(N,\rho)$ una función. Se dice que f es Lipschitz si $\exists\lambda>0$ t.q. $\rho(f(x),f(y))\leq\lambda d(x,y)$ $\forall x,y\in A$.

Teorema: Si $f:A\subset(M,d)\to(N,\rho)$ es Lipschitz $\Rightarrow f$ es continua.

Dem.: Sea $c\in A$, PD $\exists\delta$ t.q. si $x\in A$ y $d(x,c)<\delta \Rightarrow \rho(f(x),f(c))<\varepsilon$

Como f es Lipschitz $\exists\lambda>0$ t.q. $\rho(f(x),f(c))\leq\lambda d(x,c)\leq\lambda\delta$

y sea $\delta=\dfrac{\varepsilon}{\lambda}$ se tiene que ~~[illegible]~~ si $x\in A$ y $d(x,c)<\delta$

por ser Lipschitz.

$\Rightarrow d(f(x), f(c)) \leq \lambda\, d(x,y) < \lambda \delta = \lambda \frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon$ $\therefore$ f es continua

Teorema.- Si $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ está acotado y $\phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ es bilineal $\Rightarrow$ ϕ es Lipschitz en A

Dem.- Sea $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \Rightarrow \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $\bar{y} = \sum_{j=1}^{m} y_j e_j$

Bilineal

$\Rightarrow \phi(\bar{x},\bar{y}) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \bar{y}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \phi(e_i, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \phi\left(e_i, \sum_{j=1}^{m} y_j e_j\right)$

Bilineal

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j\, \phi(e_i, e_j)$

Sea $M = \max\{ \|\phi(e_i,e_j)\| : 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m \} > 0 \Rightarrow$

$\|\phi(\bar{x},\bar{y})\| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |x_i|\,|y_j|\, \|\phi(e_i,e_j)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \|\bar{x}\|\,\|\bar{y}\|\, M = n\|\bar{x}\|\, m\|\bar{y}\|\cdot M$

Además como $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ es acotado $\Rightarrow \exists\ \bar{B}_r(\bar{0},\bar{0}) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ t.q. $A \subset \bar{B}_r(\bar{0},\bar{0})$

Sea $(\bar{x},\bar{y}), (\bar{a},\bar{b}) \in A \subset \bar{B}_r(\bar{0},\bar{0})$. Veamos que $\exists\ \lambda \geq 0$ t.q. $\|\phi(\bar{x},\bar{y}) - \phi(\bar{a},\bar{b})\| \leq \lambda \|(\bar{x},\bar{y}) - (\bar{a},\bar{b})\|$

Como: $\|\phi(\bar{x},\bar{y}) - \phi(\bar{a},\bar{b})\| = \|\phi(\bar{x},\bar{y}) - \phi(\bar{a},\bar{y}) + \phi(\bar{a},\bar{y}) - \phi(\bar{a},\bar{b})\|$

Bilineal $= \|\phi(\bar{x}-\bar{a}, \bar{y}) + \phi(\bar{a}, \bar{y}-\bar{b})\| \leq \|\phi(x-a, y)\| + \|\phi(a, y-b)\|$

$\leq n\cdot m \cdot M \|x-a\|\,\|y\| + n\cdot m\cdot M \|a\|\,\|y-b\|$ (a)

Como $(\bar{x},\bar{y}), (\bar{a},\bar{b}) \in \bar{B}_r(0,0) \Rightarrow \|(x,y)\| < r$, $\|(a,b)\| < r$ $\Rightarrow$ $\|y\| < \|(x,y)\| < r$, $\|a\| < \|(a,b)\| < r$

$\Rightarrow$ (a) $\leq n\cdot m\cdot M\cdot r\|x-a\| + n\cdot m\cdot M\cdot r \|y-b\| \leq n\cdot m\cdot M\cdot r\|(x,y)-(a,b)\| + n\cdot m\cdot M\cdot r\|(x,y)-(a,b)\| = 2\cdot n\cdot m\cdot M\cdot r\|(x,y)-(a,b)\|$ con $\lambda = 2n\cdot m\cdot M\cdot r$ $\therefore$ ϕ es Lipschitz ∎

Las funciones:

1) $\phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.q. $\phi(x,y) = \langle x ; y \rangle$
2) $\phi: L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ t.q. $\phi(T,x) = T(x)$
3) $\phi: M_{n\times m}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ t.q. $\phi(A,x) = A\cdot x$
4) $\mathrm{comp}: L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p) \times L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ t.q. $\mathrm{comp}(T_1,T_2) = T_1 \circ T_2$

Son bilineales y por lo tanto continuas
para probarlo, basta tomar un punto en el dominio de ϕ
y una bola cerrada que lo contenga, como dicha bola
es acotada $\Rightarrow$ ϕ en la bola es Lipschitz por lo anterior

y por lo tanto continua

Teorema: Sea $f: A \subset (M,d) \to (N,\rho)$ una función, las sig. afirmaciones son equivalentes:

1) f es continua en A

2) Si $V \subset (N,\rho)$ es abierto $\Rightarrow$ $f^{-1}(V)$ es abierto en A.

3) Si $W \subset (N,\rho)$ es cerrado $\Rightarrow$ $f^{-1}(W)$ es cerrado en A.

Dem.

1 ⇒ 2] Sup. que f es continua en A. Sea $V \subset (N,\rho)$ abierto P.D. $f^{-1}(V)$ es abierto en A.

Sea $a \in f^{-1}(V) = \{x \in A \mid f(x) \in V\}$ $\Rightarrow$ $f(a) \in V$ $\Rightarrow$ $\exists B_\varepsilon^\rho(f(a))$ en (N,ρ) t.q. $B_\varepsilon^\rho(f(a)) \subset V$ como f es continua en A y $\varepsilon > 0$ $\Rightarrow$ $\exists B_\delta^d(a)$ en (M,d) t.q. $f[B_\delta^d(a) \cap A] \subset B_\varepsilon^\rho(f(a)) \subset V$

Así $(B_\delta^d(a) \cap A) \subset f^{-1}(V)$ $\therefore$ $f^{-1}(V)$ es abierto en A.

2 ⇒ 3] Suponga que si $V \subset (N,\rho)$ es abierto $\Rightarrow$ $f^{-1}(V)$ es abierto en A. Sea $W \subset (N,\rho)$ cerrado P.D. $f^{-1}(W)$ es cerrado en A.

Como W es cerrado $\Rightarrow$ W^c es abierto en N $\Rightarrow$ $f^{-1}(W^c)$ es abierto en ~~[illegible]~~ A
$\Rightarrow$ $(f^{-1}(W))^c$ es abierto en A $\Rightarrow$ $f^{-1}(W)$ es cerrado en A.

3 ⇒ 1] Sup. que si $W \subset (N,\rho)$ es cerrado $\Rightarrow$ $f^{-1}(W)$ es cerrado en A.
Sea $a \in A$ y $\varepsilon > 0$ P.D. $\exists \delta > 0$ t.q. $f[A \cap B_\delta^d(a)] \subset B_\varepsilon^\rho(f(a))$

Como $B_\varepsilon^\rho(f(a))$ es abierto en N $\Rightarrow$ $N - B_\varepsilon^\rho(f(a))$ es cerrado en N
$\Rightarrow$ $f^{-1}(N - B_\varepsilon^\rho(f(a)))$ es cerrado en A $\Rightarrow$ $(f^{-1}(B_\varepsilon^\rho(f(a))))^c$ es cerrado en A $\Rightarrow$ $f^{-1}(B_\varepsilon^\rho(f(a)))$ es abierto en A! Así
$\exists B_\delta^d(a) \in (A,d)$ t.q. $(B_\delta^d(a) \cap A) \subset f^{-1}(B_\varepsilon^\rho(f(a)))$ $\Rightarrow$ $f[B_\delta^d(a) \cap A] \subset B_\varepsilon^\rho(f(a))$
$\therefore$ f es continua.

Ejercicio 1. Demuestra que:

1) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < e^{x^2}\}$ es abierto en $\mathbb{R}^2$

Sea $f(x,y) = e^{x^2} - y$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ¿f es continua?

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ pues tomo $\pi_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi_1(x,y) = x^2$ continua
$\pi_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi_2(x,y) = y$ continua
y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = e^t$ continua

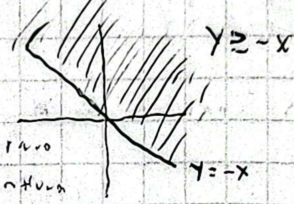
$\Rightarrow$ $((g \circ \pi_1) - \pi_2)(x,y) = e^{x^2} - y$ es continua

Como f es continua y $V = (0,\infty)$ es abierto en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$
$f^{-1}(V) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \in (0,\infty)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^{x^2} \cdot y > 0\}$
es abierto en $\mathbb{R}^2$.

2) Sea $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t.q $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ y $W = (-\infty, 1) \subset \mathbb{R}$

a) Demuestra que $f^{-1}(W)$ es abierto en A.

$f: \overbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 0\}}^{A} \to \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow y \geq -x$



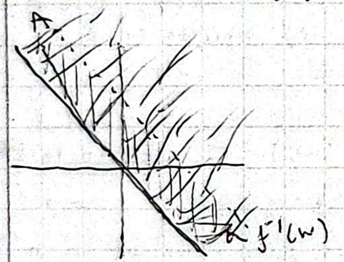
Como $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi_1(x,y) = x$ continua
$\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi_2(x,y) = y$ continua

y $g: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ t.q $g(t) = \sqrt{t}$ continua

$\Rightarrow [g \circ (\pi_1 + \pi_2)](x,y) = \sqrt{x+y} = f(x,y)$ es continua
$\Rightarrow f^{-1}(W)$ es abierto en A.

¿abierto en $\mathbb{R}^2$?

Como f es continua y $W = (-\infty,1) \subset \mathbb{R}$ es abierto $\Rightarrow$ $f^{-1}(W) = \{(x,y) \in A \mid f(x,y) \in (-\infty,1)\} = \{(x,y) \in A \mid \sqrt{x+y} < 1\} = f^{-1}(W)$



$\sqrt{x+y} < 1 \Rightarrow x+y < 1 \Rightarrow y < 1-x$

pero si tomo un punto en $y = -x$ esto no es punto interior $\therefore$ $f^{-1}(W)$ no es abierto en $\mathbb{R}^2$

Def.- Sea (M,d) esp. métrico y $A \subset M$, se ~~~~ define la inclusión de A en M como la función $i: A \hookrightarrow M$ t.q $i(a) = a$)

Nota que i es continua, en efecto: si $U \subset M$ es abierto $\Rightarrow$ $i^{-1}(U) = U \cap A$ el cual es abierto en A

Def.- Sea $f: A \subset (M,d) \to (N,\rho)$ una función y $D \subset A$. Se define la restricción de f en D como la función

$f|_D : D \subset (M,d) \to (N,\rho)$ t.q $f|_D(x) := (f \circ i)(x)$ donde $i: D \hookrightarrow A$ es la inclusión.

Nota que si $f: A \subset (M,d) \to (N,\rho)$ es continua y $D \subset A$ $\Rightarrow$ $f|_D : D \subset (M,d) \to (N,\rho)$ es continua pues $f|_D = (f \circ i)(x)$ es composición de continuas

Def: Sea $f: A \subset (M,d) \to (N,\rho)$ una función. Se dice que f es uniformemente continua $\Leftrightarrow$ $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in A)[\text{si } d(x,y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon]$

f no es uniformemente continua $\Leftrightarrow$:

$[\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x_\delta, y_\delta \in A)[d(x_\delta, y_\delta) < \delta \wedge \rho(f(x_\delta), f(y_\delta)) \geq \varepsilon_0]$

Teorema: Sea $f: A \subset (M,d) \to (N,\rho)$ una función. Entonces f no es U.C. $\Leftrightarrow$ existe $\varepsilon_0 > 0$ ~~t.q~~ ~~$\forall\delta>0$~~ y existen sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A t.q $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \wedge \rho(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$

Dem:

$\Rightarrow)$ Suponga que f no es U.C. Así $(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x_\delta, y_\delta \in A)[d(x_\delta, y_\delta) < \delta \wedge \rho(f(x_\delta), f(y_\delta)) \geq \varepsilon_0]$

Tomando $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists x_n, y_n \in A$ t.q $d(x_n, y_n) < \delta \wedge \rho(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$

$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \wedge \rho(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$

$\Leftarrow)$ Sup. que $\exists \varepsilon_0 > 0$ y sucesiones $\{x_n\}, \{y_n\}$ en A t.q $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \wedge \rho(f(x_n), f(y_n))$

~~Sea $\delta>0$, $n \geq n_0$ ... $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0 \Rightarrow \exists n_0(\delta)$ t.q si $n \geq n_0(\delta)$~~
~~$\Rightarrow d(x_n, y_n) < \delta$~~

Sea $\delta > 0$, como $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \Rightarrow \exists n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ t.q si $n \geq n_0(\delta) \Rightarrow$ $d(x_n, y_n) < \delta$.

Tomando $x_\delta = x_{n_0(\delta)} \wedge y_\delta = y_{n_0(\delta)}$ se tiene que $x_\delta, y_\delta \in A$ t.q $d(x_\delta, y_\delta) < \delta$ y $\rho(f(x_\delta), f(y_\delta)) \geq \varepsilon_0$

Ejercicio: Demuestre que $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ no es U.C.

Tenemos $f: \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid xy \neq 0\} \to \mathbb{R}$

Sea $\bar{x}_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ $\bar{y}_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \in \mathrm{Dom}(f)$

$d(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \right\| = \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \right\| = \sqrt{2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2}$

$= \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right| \sqrt{2}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = 0$

por otra parte $\delta(f(\bar{x}_n), f(\bar{y}_n)) = \left| \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}} - \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}} \right|$

$= |n-(n+1)| = |-1| = 1$.

Tomando $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, se tiene la afirmación f no es u.c.

Homeomorfismos

Def.- Sean (M,d), (N,ρ) esp. métricos y $A \subset M$, $B \subset N$. Se dice A y B son Homeomorfos, si $\exists$ una función $f: A \to B$ tq f es continua, f es biyectiva y f^{-1} es continua.

En este caso, se dice que f es un Homeomorfismo

Ejercicio.- Demostrar que $\mathbb{R}^n$ y $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ son homeomorfos

Dado $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\|\bar{x}\|^2 < \|\bar{x}\|^2 + r \Rightarrow \sqrt{\|\bar{x}\|^2} < \sqrt{\|\bar{x}\|^2 + r}$

$\Rightarrow \|\bar{x}\| < \sqrt{\|x\|^2 + r} \Rightarrow \left\| \frac{\bar{x}}{\sqrt{\|\bar{x}\| + 1}} \right\| < r$

Sea $f: \mathbb{R}^n \to B_r(0)$ tq $f(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\|\bar{x}\|^2 + r}} = \left(\frac{x_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 + r}}, \frac{x_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 + r}}, \dots, \frac{x_n}{\quad} \right)$

Las proyecciones son continuas $\Rightarrow f(\bar{x})$ es continua.

Veamos que f es biyectiva.

- Sup que $f(\bar{x}) = f(\bar{y}) \Rightarrow \frac{\bar{x}}{\sqrt{\|\bar{x}\|^2 + r}} \overset{\circledast}{=} \frac{\bar{y}}{\sqrt{\|\bar{y}\|^2 + r}}$

$\Rightarrow \frac{\|\bar{x}\|}{\sqrt{\|\bar{x}\|^2 + r}} = \frac{\|\bar{y}\|}{\sqrt{\|\bar{y}\|^2 + r}} \Rightarrow \frac{\|\bar{x}\|^2}{\|\bar{x}\|^2 + r} = \frac{\|\bar{y}\|^2}{\|\bar{y}\|^2 + r}$

$\Rightarrow \|\bar{x}\|^2(\|\bar{y}\|^2 + r) = \|\bar{y}\|^2(\|\bar{x}\|^2 + r) \Rightarrow \|\bar{x}\|^2 + r = \|\bar{y}\|^2 + r$

$\Rightarrow \|\bar{x}\| = \|\bar{y}\|$ (1)

Sustituyendo (1) en $\circledast$ se tiene que

$\frac{\bar{x}}{\sqrt{\|\bar{x}\|^2 + r}} = \frac{\bar{y}}{\sqrt{\|\bar{x}\|^2 + r}} \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$ $\therefore$ es inyectiva

- Veamos que $f: \mathbb{R}^n \to B_r(0)$ es sobreyectiva

Sea $z \in B_r(\bar{0})$ p.d. $\exists\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tq $f(\bar{x}) = z$

Sea $f(\bar{x}) = z \Rightarrow \frac{\bar{x}}{\sqrt{\|\bar{x}\|^2 + r}} \overset{\circledast}{=} z \Rightarrow \frac{\|\bar{x}\|}{\sqrt{\|\bar{x}\|^2 + r}} = \|z\| \Rightarrow \frac{\|\bar{x}\|^2}{\|\bar{x}\|^2 + r} = \|z\|^2$

$\Rightarrow \|\bar{x}\|^2 = \|z\|^2(\|x\|^2+r) \Rightarrow \|\bar{x}\|^2 = \|z\|^2\|\bar{x}\|^2 + \|z\|^2 r \Rightarrow$

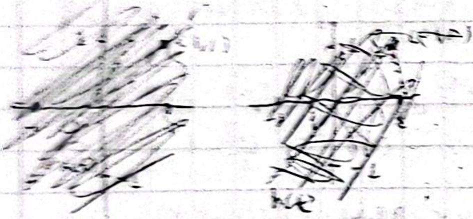
$\|\bar{x}\|^2(1-\|z\|^2) = \|z\|^2 r \Rightarrow \|\bar{x}\|^2 = \frac{\|z\|^2 r}{1-\|z\|^2}$ (1)

Sustituyendo (1) en (2) $\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{\frac{\|z\|^2 r}{1-\|z\|^2}+r}} = z \Rightarrow \frac{x}{\frac{r}{\sqrt{1-\|z\|^2}}} = z$

$\Rightarrow \bar{x}\frac{1}{r}\sqrt{1-\|z\|^2} = \bar{z} \Rightarrow \bar{x} = \frac{r\bar{z}}{\sqrt{1-\|z\|^2}} \in \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow f^{-1}: B_1(0) \to \mathbb{R}^n \quad f^{-1}(\bar{z}) = \frac{r\bar{z}}{\sqrt{1-\|z\|^2}}$

Ejercicio 2: Demostrar que $(-1,1)\subset\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ son homeomorfos.



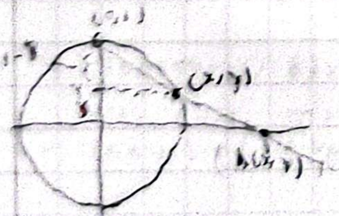
Sea $h(t)=\begin{cases}\frac{t}{t-1} & 0\le t<1\\ \frac{-t}{t+1} & -1< t\le 0\end{cases}$

$\Rightarrow h(t)=\frac{t}{|t|-1}$, sea $h:(-1,1)\to\mathbb{R}$

- $h(t)$ es continua en $(-1,1)$
- $h(x)=h(y) \Rightarrow \frac{x}{|x|-1}=\frac{y}{|y|-1} \Rightarrow (|y|-1)x = (|x|-1)y \Rightarrow |y|x - x = |x|y - y$
  $\Rightarrow x = y$ ∴ es inyectiva
- Sea $z\in\mathbb{R}$ p.d. $\exists\, t\in(-1,1)$ tq $h(t)=z \Rightarrow \frac{t}{|t|-1}=z$
  $\Rightarrow \frac{|t|}{-|t|+1}=|z| \Rightarrow |t| = -|z||t|+|z| \Rightarrow |t|(1+|z|)=|z| \Rightarrow |t|=\frac{|z|}{1+|z|}$
  $\Rightarrow \frac{t}{\frac{|z|}{1+|z|}-1}=z \Rightarrow t=\frac{z}{1+|z|}$ ∴ suprayectiva

∴ son homeomorfos.

Ejercicio 3: Sea $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$, Demostrar que $S^1-\{(0,1)\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$



$h: S^1-\{(0,1)\}\to\mathbb{R}$

$\frac{1}{1-y} = \frac{h(x,y)}{x} \Rightarrow h(x,y)=\left(\frac{x}{1-y}\right)$

- Es continua
- Es inyectiva
- Sea $z\in\mathbb{R}$ p.d. $\exists\,(x,y)\in S^1-\{(0,1)\}$ tq $h(x,y)=z$

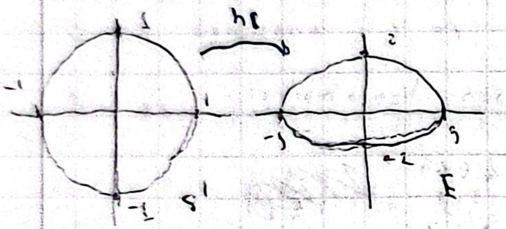
$h(x,y)=z \Rightarrow \frac{x}{1-y}=z \Rightarrow \frac{x^2}{(1-y)^2}=z^2 \Rightarrow \frac{1-y^2}{(1-y)^2}=z^2 \Rightarrow \frac{(1+y)(1-y)}{(1-y)^2}=\frac{1+y}{1-y}=z^2$

$1+y = z^2 - z^2 y \Rightarrow y + z^2 y = z^2 - 1 \Rightarrow y = \dfrac{z^2-1}{z^2+1}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{1-\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)} = z \Rightarrow x = z\left(1-\dfrac{z^2-1}{z^2+1}\right) = \dfrac{2z}{z^2+1}$

$\Rightarrow h^{-1}: \mathbb{R} \to S^1 - \{(0,1)\}$ t.q $h^{-1}(t) = \left(\dfrac{2t}{t^2+1}, \dfrac{t^2-1}{t^2+1}\right)$

Ejercicio 4.- Demuestra que $S^1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\} \subset \mathbb{R}^2$ y $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\} \subset \mathbb{R}$ son homeomorfos



$h: S^1 \to E$ t.q $h(x,y) = (3x, 2y)$

- continua
- inyectiva
- $h^{-1}(x,y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{2}\right)$

∴ son homeomorfos.

Teorema: Sea $f: A\subset(M,d) \to (N,d)$ una función y $B\subset A$. Si f es continua en A y B es compacto en $(M,d) \Rightarrow f(B)$ es compacto en N.

Dem: Sea $\{W_\alpha \mid \alpha\in I\}$ una cubierta abierta de $f(B)$ en N. Como f es continua y W_α es abierto en $N \Rightarrow f^{-1}(W_\alpha)$ es abierto en A $\forall \alpha\in I$. Así $\forall\alpha\in I$ $\exists U_\alpha$ abierto en (M,d) t.q $f^{-1}(W_\alpha) = A\cap U_\alpha$. Por otra parte como $B\subset\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ y B es compacto $\Rightarrow \exists\, \alpha_1,\dots,\alpha_r\in I$ t.q $B\subset \bigcup_{i=1}^r U_{\alpha_i} \Rightarrow f(B)\subset\bigcup_{i=1}^r f(U_{\alpha_i}) \Rightarrow f(B)\subset \bigcup_{i=1}^r f(f^{-1}(W_{\alpha_i}))$

$\Rightarrow f(B)\subset\bigcup_{i=1}^r W_{\alpha_i} \Rightarrow f(B)$ es compacto.

Teorema de Weierstrass.- Sea $f: A\subset(M,d)\to\mathbb{R}$ una función. Si f es continua y A es compacto $\Rightarrow f$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo absolutos en A. Esto es, $\exists\, x_0,x_1\in A$ t.q $f(x_0)\le f(x)\le f(x_1)$ $\forall x\in A$.

Dem: Como A es compacto y f es continua $\Rightarrow f(A)$ es compacto en $\mathbb{R}$, esto es $f(A)$ es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$. Así como $f(A)$ está acotado $\exists$ inf y sup. Sea $M=\sup(f(A))$ y $m=\inf(f(A))$.

Como $M=\sup(f(A)) \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}$ $\exists\, a_n\in f(A)$ t.q $M-\frac{1}{n} < a_n \le M$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = M \Rightarrow M$ es un punto adherente $\Rightarrow M\in\overline{f(A)}$ pero

como $f(A)$ es cerrado $\Rightarrow f(A)=\overline{f(A)} \Rightarrow M\in f(A)$.

Así $\exists\, x_1\in A$ t.q $M=f(x_1)$

Análogamente $\exists\, x_2\in A$ t.q $m=f(x_2) \Rightarrow m\le f(A)\le M \Rightarrow f(x_2)\le f(A)\le f(x_1)$ ■

Escaneado con CamScanner

Teorema: Sea $f: A \subset (M,d) \to (N,\rho)$ una función. Si f es continua y A compacto $\Rightarrow$ f es uniformemente continua.

Dem: Sea $\varepsilon > 0$. P.D. $\exists \delta > 0$ t.q. $\forall x,y \in A$ si $d(x,y) \le \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Como f es continua en A, para cada $a \in A$ $\Rightarrow \exists \delta_a > 0$ t.q. si $z \in A$ y $d(z,a) < \delta_a \Rightarrow \rho(f(z), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ahora como $A \subset \bigcup_{a \in A} B_{\frac{\delta_a}{2}}(a)$ y A es compacto $\Rightarrow \exists a_1, \dots, a_r \in A$ t.q. $A \subset \bigcup_{i=1}^{r} B_{\frac{\delta_{a_i}}{2}}(a_i)$.

Sea $\delta = \min\{\frac{\delta_{a_i}}{2} \mid 1 \le i \le r\}$, sean $x,y \in A$ t.q. $d(x,y) \le \delta$. Veamos que $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Como $x \in A \subset \bigcup_{i=1}^{r} B_{\frac{\delta_{a_i}}{2}}(a_i) \Rightarrow \exists\, 1 \le j \le r$ t.q. $x \in B_{\frac{\delta_{a_j}}{2}}(a_j)$

Probemos que $y \in B_{\delta_{a_j}}(a_j)$, en efecto $d(y,a_j) \le d(y,x) + d(x,a_j) \le \delta + \frac{\delta_{a_j}}{2}$
$\le \frac{\delta_{a_j}}{2} + \frac{\delta_{a_j}}{2} = \delta_{a_j}$ $\therefore d(x,y) \le \delta_{a_j}$

Así $x, y \in B_{\delta_{a_j}}(a_j)$ y como f es continua $\Rightarrow \rho(f(x), f(y)) \le \rho(f(x), f(a_j)) + \rho(f(a_j), f(y))$
$\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\therefore$ f es uniformemente continua

Teorema: Sea $f: A \subset (M,d) \to (N,\rho)$ una función. Si f es continua y A es conexo $\Rightarrow$ $f(A)$ es conexo en (N,ρ).

Dem: Sean $W_1, W_2 \subset (N,\rho)$ abiertos t.q.

a) $(W_1 \cap f(A)) \cap (W_2 \cap f(A)) = \emptyset$ b) $f(A) = (W_1 \cap f(A)) \cup (W_2 \cap f(A))$

P.D. $W_1 \cap f(A) = \emptyset$ ó $W_2 \cap f(A) = \emptyset$

Como f es continua y $W_1, W_2 \subset (N,\rho)$ son abiertos $\Rightarrow$ $f^{-1}(W_1)$, $f^{-1}(W_2)$ son abiertos en A. Así $f^{-1}(W_1) = A \cap V_1$, $f^{-1}(W_2) = A \cap V_2$ donde $V_1, V_2 \subset (M,d)$ son abiertos.

Entonces, por (a)

a) $(A \cap V_1) \cap (A \cap V_2) = \emptyset$, $A = f^{-1}(W_1) \cup f^{-1}(W_2) = (A \cap V_1) \cup (A \cap V_2)$

Como A es conexo $\Rightarrow$ $A \cap V_1 = \emptyset$ ó $A \cap V_2 = \emptyset$. Así $W_1 \cap f(A) = \emptyset$ ó $W_2 \cap f(A) = \emptyset$

$\therefore$ $f(A)$ es conexo

Teorema del valor intermedio: Sea $f: A\subset (M,d) \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $x, y \in A$ (convexo) y $f(x) < r < f(y) \Rightarrow \exists x_0 \in A$ t.q. $f(x_0) = r$

Dem: Supo que f es continua, $A \subset (M,d)$ es convexo y $r \notin f(A)$

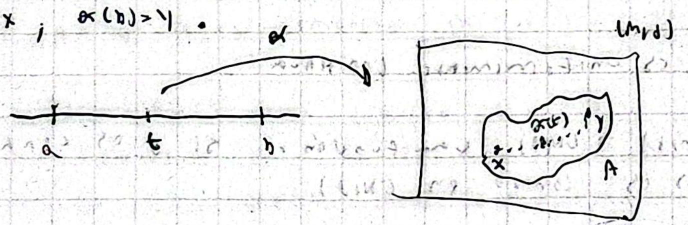
Como $r \notin f(A)$ se tiene que:

i) $(f(A) \cap (-\infty, r)) \neq \emptyset$ y $(f(A) \cap (r, \infty)) \neq \emptyset$
ii) $(f(A) \cap (-\infty, r)) \cap (f(A) \cap (r, \infty)) = \emptyset$
iii) $f(A) = [f(A) \cap (-\infty, r)] \cup [f(A) \cap (r, \infty)]$

$\therefore$ $f(A)$ es disconexo ! pues como A es convexo y f continua $\Rightarrow$ $f(A)$ es continua.

$\therefore$ $\exists x_0 \in A$ t.q. $f(x_0) = r$.

Def: Sea $A \subset (M,d)$, se dice que A es conexo por trayectorias (C.P.T) si dados $x, y \in A$, $\exists \alpha: [a,b] \to M$ continua t.q. $\alpha(t) \in A$ $\forall t \in [a,b]$ y $\alpha(a) = x$, $\alpha(b) = y$.



Def: Sean $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, se definen el segmento cerrado y el segmento abierto de $\bar{x}$ a $\bar{y}$ como:

$[\bar{x}, \bar{y}] = \{ z \in \mathbb{R}^n \mid z = t\bar{y} + (1-t)\bar{x},\ t \in [0,1] \}$
$(\bar{x}, \bar{y}) = \{ z \in \mathbb{R}^n \mid z = t\bar{y} + (1-t)\bar{x},\ t \in (0,1) \}$

Ejercicios:

(1) Demuestra que $(\mathbb{R}^n, d)$ es C.P.T.
Dem:
Sean $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, defina $\alpha: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ t.q. $\alpha(t) = (1-t)\bar{x} + t\bar{y}$, la cual es ~~[illegible]~~ continua, $\alpha(t) \in \mathbb{R}^n$ $\forall t \in [0,1]$; $\alpha(0) = \bar{x}$ y $\alpha(1) = \bar{y}$.

2. Sea $r > 0$, y $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que $\bar{B}_r(\bar{c}) \subset \mathbb{R}^n$ es C.P.T.
Dem:
Sean $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{B}_r(\bar{c})$ y $\alpha: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ t.q. $\alpha(t) = (1-t)\bar{x} + t\bar{y}$
la cual es continua, $\alpha(0) = \bar{x}$, $\alpha(1) = \bar{y}$ P.D. $\alpha(t) \in \bar{B}_r(\bar{c})$ $\forall t \in [0,1]$

En efecto: $\|\alpha(t) - \bar{c}\| = \|(1-t)\bar{x} + t\bar{y} - \bar{c}\| = \|\bar{x} - t\bar{x} + t\bar{y} - \bar{c}\|$

$= \| \bar{x} - t\bar{x} + t\bar{y} - \bar{c} - t\bar{c} + t\bar{c} \| = \| (1-t)(\bar{x}-\bar{c}) + t(\bar{y}-\bar{c}) \| \leq (1-t)\|\bar{x}-\bar{c}\| + t\|\bar{y}-\bar{c}\|$

$\leq (1-t)r + tr = r. \quad \therefore \alpha(t) \in \bar{B}_r(\bar{c}) \quad \forall t \in (0,1)$

3.- Demostrar que $\mathbb{R}^n - \{\bar{0}\}$ es c.p.t.

4.- Demostrar que $S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \}$ es c.p.t.

Dem.- Sea $h: \mathbb{R}^n - \{\bar{0}\} \to S^{n-1}$, t.q $h(x) = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$ la cual es cont. y suprayectiva

Así, dada $u, v \in S^{n-1}$ $\exists \bar{x}_0, \bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ t.q $h(x_0) = u$, $h(y_0) = v$

Como $\mathbb{R}^n - \{\bar{0}\}$ es c.p.t y $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n - \{\bar{0}\} \Rightarrow \exists \alpha: [a,b] \to \mathbb{R}^n - \{\bar{0}\}$ continua t.q $\alpha(a) = x_0$ y $\alpha(b) = y_0$. Así $(h \circ \alpha): [a,b] \to S^n$ es una trayectoria t.q $(h \circ \alpha)(a) = u$ y $(h \circ \alpha)(b) = v$.

Teorema.- Sea $A \subset (\mathbb{R}^n)$. Si A es c.p.t $\Rightarrow$ A es conexo.

Dem.- Sea $\bar{x}, \bar{y} \in A$ p.d. $\exists C_{xy}$ cm conexo t.q $x, y \in C_{xy} \in A$

Como A es c.p.t $\exists \alpha: [a,b] \to A$ continua t.q $\alpha(a) = \bar{x}$, $\alpha(b) = \bar{y}$

Tomando $C_{xy} = \alpha([a,b])$ se tiene que C_{xy} es conexo y $\bar{x}, \bar{y} \in A$.

Def.- Sean $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ vectores. Se define el <u>producto cruz</u> ó <u>producto vectorial</u> de $\bar{a}$ y $\bar{b}$ como el vector $\bar{a} \times \bar{b} \in \mathbb{R}^3$ t.q

- $\langle \bar{c}, \bar{a} \times \bar{b} \rangle = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \forall c \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \langle e_1, \bar{a} \times \bar{b} \rangle = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2 b_3 - a_3 b_2$

$\langle e_2, \bar{a} \times \bar{b} \rangle = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_3 b_1 - a_1 b_3$

$\langle e_3, \bar{a} \times \bar{b} \rangle = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

$\therefore \bar{a} \times \bar{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$ (producto cruz bilineal)

Def.- Sean $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ vectores. Se define el producto cruz de $v_1, \dots, v_{n-1}$ como el vector $v_1 \times v_2 \times \dots \times v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ t.q.:

$$\langle v, v_1 \times \dots \times v_{n-1} \rangle = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ v_1^{(1)} & v_2^{(1)} & \cdots & v_n^{(1)} \\ v_1^{(2)} & v_2^{(2)} & \cdots & v_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1^{(n-1)} & v_2^{(n-1)} & \cdots & v_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad \text{donde } v_i = (v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \dots, v_n^{(i)})$$

Funciones Diferenciables.

Def.- Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in \text{int}(D)$, se dice que f es derivable en x_0 si $\exists$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \iff \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)}{h} = 0$$

$$\iff \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)(h)}{h} = 0 \iff \lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)(h)|}{|h|} = 0$$

Note que la función $Df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q. $Df(x_0)(h) = h \cdot f'(x_0)$ es lineal.

Así f es diferenciable en $x_0 \iff \exists Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q.

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - Df(x_0)(h)|}{|h|} = 0$$

Def.- Sea $\alpha : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función y $t_0 \in \text{int}(D)$, se define el vector velocidad de α en t_0 como:

$$\alpha'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0}$$ siempre que el límite exista

Ejercicio.- Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ t.q. $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$, compruebe que existe el vector velocidad en $t_0 = \frac{\pi}{2}$

Sol.- $$\alpha'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{\alpha(t) - \alpha(\frac{\pi}{2})}{t - \frac{\pi}{2}} = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(t), \sin(t) - 1)}{t - \frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(t)}{t - \frac{\pi}{2}}, \frac{\sin(t) - 1}{t - \frac{\pi}{2}} \right) = \left(-\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right), \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = (-1, 0)$$

~~Teorema.-~~

Ejercicio.- Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función. Demuestra que T es lineal $\iff \exists$ un vector $v \in \mathbb{R}^n$ t.q. $T(\lambda) = \lambda \cdot v$

Dem.-

$\Rightarrow$) Sup. que $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es lineal. Así se tiene que $T(\lambda) = T(\lambda \cdot 1)$

$= \lambda T(1)$ tomando $v = T(1) \Rightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n$ t.q. $T(\lambda) = \lambda v$.

$\Leftarrow]$ Sup. que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\exists v$ t.q. $T(\lambda) = \lambda \cdot v$

- $T(\lambda_1 + \lambda_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v = T(\lambda_1) + T(\lambda_2)$
- $T(c\lambda) = (c\lambda)v = \lambda(cv) = cT(\lambda)$.

Def.- Sea $\alpha: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función y $t_0 \in \text{int}(D)$. Se dice que α es diferenciable en t_0 si $\exists D\alpha(t_0) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ t.q.

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\|\alpha(t) - \alpha(t_0) - D\alpha(t_0)(t-t_0)\|}{|t-t_0|} = 0$$

Teorema.- Sea $\alpha: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función y $t_0 \in \text{int}(D)$. Entonces α es diferenciable en $t_0 \Leftrightarrow \exists \alpha'(t_0)$ vector velocidad.

Dem.-

$\Leftarrow\Rightarrow]$ Sup. que α es diferenciable en $t_0 \Rightarrow \exists D\alpha(t_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ t.q.

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\|\alpha(t) - \alpha(t_0) - D\alpha(t_0)(t-t_0)\|}{|t-t_0|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} \left\| \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t-t_0} - \frac{D\alpha(t_0)(t-t_0)}{t-t_0} \right\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} \left\| \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t-t_0} - \frac{(t-t_0)v}{t-t_0} \right\| = 0$$

$\boxed{\text{como } D\alpha(t_0) \text{ es lineal} \Rightarrow \exists v \in \mathbb{R} \text{ vector t.q. } D\alpha(t_0)(\lambda)} = \lambda v$.

$$\Leftrightarrow \left\| \lim_{t \to t_0} \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t-t_0} - v \right\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t-t_0} = v \therefore \exists \alpha'(t_0).$$

Ejercicio: Sea $\alpha(t) = (\ln(t), t^2 - 2t)$. Determina $D\alpha(1) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$

Sol.- Tenemos que $\alpha: (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$. ~~$D\alpha(1): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $D\alpha(1)(\lambda)$~~

Tenemos que $\alpha'(t) = \left(\frac{1}{t}, 2(t-2)\right) \Rightarrow \alpha'(1) = (1, 0)$

$\therefore D\alpha(1)(\lambda) = \lambda(1, 0)$

Diferenciabilidad

Def.- Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, $c \in \text{Int}(A)$ y $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ la base canónica. Se define la Derivada Parcial de f en $\bar{c}$ respecto a la i-ésima variable como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{c} + te_i) - f(\bar{c})}{t}$$

Siempre que el límite exista

Nota: $\bar{c} \in int(A)$ garantiza que $\bar{c} + t\hat{e}_i \in A$ para t suficientemente pequeño.

Ejercicio: Calcula las derivadas parciales de f.

• $f(x,y) = e^{2x-y}$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, Sea $\bar{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c_1,c_2) = \lim_{t \to 0} \frac{f[(c_1,c_2) + te_1] - f(c_1,c_2)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(c_1+t, c_2) - f(c_1,c_2)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{e^{2(c_1+t)-c_2} - e^{2c_1-c_2}}{t} = 2e^{2c_1-c_2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(c_1,c_2) = \lim_{t \to 0} \frac{f[(c_1,c_2) + te_2] - f(c_1,c_2)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(c_1, c_2+t) - f(c_1,c_2)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{2c_1-(c_2+t)} - e^{2c_1-c_2}}{t}$$

L'Hôpital
$$= \lim_{t \to 0} \frac{-e^{2c_1-c_2-t}}{1} = -e^{2c_1-c_2}.$$

•) $f(x,y,z) = \ln(xy - z)$, $f: \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy > z\} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

• $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{xy-z} \cdot y$

(pues f es diferenciable $\forall (x,y,z) \in A$ o $(x,y,z) \in int(A)$)

• $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{xy-z} \cdot x$

• $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{xy-z} \cdot (-1)$

3) $\det: M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, tenemos que $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es abierto

Sea $\bar{X} \in [x_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $E_{ij} = [e_{kl}]$ con $e_{kl} = \begin{cases} 1 & i=k \wedge j=l \\ 0 & i\neq k \vee j\neq l \end{cases}$

- $$\frac{\partial \det}{\partial x_{ij}}(\bar{X}) = \lim_{t\to 0} \frac{\det[\bar{X} + tE_{ij}] - \det[\bar{X}]}{t}$$

Veamos que:

$$\overset{\bar{X}}{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & & & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}} + t \overset{t\cdot E_{ij}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} & & \\ & x_{ij}+t & \\ & & \end{bmatrix}$$

Igual que el primero

y

$$\det(\bar{X}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} x_{ij} \det(\tilde{X}_{ij})$$

$= (-1)^{i+1} x_{i1} \det(\tilde{X}_{i1}) + (-1)^{i+2} x_{i2} \det(\tilde{X}_{i2}) + \dots + (-1)^{i+j} x_{ij} (\tilde{X}_{ij}) + \dots + (-1)^{i+n} x_{in} \det(\tilde{X}_{in})$

Además

$\det(\bar{X} + E_{ij}t) = (-1)^{i+1} x_{i1} (\det(\tilde{X}_{i1})) + \dots + (-1)^{i+j} (x_{ij}+t) \det(\tilde{X}_{ij}) + \dots + (-1)^{i+n} x_{in} \det(\tilde{X}_{in})$

$\Rightarrow \det(\bar{X} + tE_{ij}) - \det(\bar{X}) = (-1)^{i+j}\, t \det(\tilde{X}_{ij})$

$\therefore \lim_{t\to 0} \dots = \lim_{t\to 0} \frac{(-1)^{i+j}\, t \det(\tilde{X}_{ij})}{t} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{X}_{ij})$

4) $\det: M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

Sea $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & \pi & \sqrt{2} \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

- $$\frac{\partial \det}{\partial x_{32}}(C) = (-1)^{3+2} \det[\tilde{C}_{32}] = (-1) \det\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = (-1)(-\sqrt{2} - 12) = \sqrt{2} + 12.$$

5) Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineal, calcula $\frac{\partial T}{\partial x_i}(\bar{x})$ para $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}(\bar{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{T(\bar{x} + t e_i) - T(\bar{x})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{T(\bar{x}) + t\,T(e_i) - T(\bar{x})}{t}$$

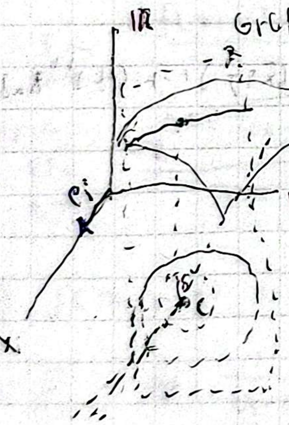
$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{t\,T(e_i)}{t} = T(e_i) \quad 1 \le i \le n.$$

Def: Sea $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$ dada por $\pi_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$, llamada la i-ésima proyección. Las cuales son lineales.

$$\Rightarrow \frac{\partial \pi_i(\bar{x})}{\partial x_j} = \pi_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Interpretación geométrica de las derivadas parciales

Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y $\bar{c} \in \text{int}(A)$, suponga $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$. Sea $\sigma_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ la trayectoria $\sigma_i(t) = c + t e_i$, cuya imagen es la recta en $\mathbb{R}^n$ que pasa por el punto $\bar{c}$ y cuyo vector director es e_i.



Como $c \in \text{int}(A)$, σ_i es continua y $\sigma_i(0) = c$

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ t.q. $\sigma_i(t) \in A \ \forall t \in (-\delta, \delta)$

Por hipótesis $\exists$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{c} + t e_i) - f(c)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(f \circ \sigma_i)(t) - (f \circ \sigma_i)(0)}{t} = (f \circ \sigma_i)'(0)$$

Así la función $(f \circ \sigma_i) : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ es derivable en $t = 0$ y $(f \circ \sigma_i)'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$

y $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$ es la pendiente de la recta tangente en $t = 0$ de la gráfica de $(f \circ \sigma_i)$, la cual se obtiene al intersectar la $Gr(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con el hiperplano generado por la recta $c + t e_i$

Teorema: Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones y $c \in \text{int}(A)$. Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c})$ y $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{c})$ existen $\Rightarrow$:

- $\exists \ \frac{\partial (f+g)}{\partial x_i}(c) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(c)$
- ~~$\exists \ \frac{\partial (f g)}{\partial x_i}(c) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) \, \frac{\partial g}{\partial x_i}(c)$~~

- $\exists \frac{\partial (f g)}{\partial x_i}(\bar{c}) = f(c)\frac{\partial g}{\partial x_i}(c) + g(c)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c})$

- $\exists \frac{\partial (\frac{f}{g})}{\partial x_i}(\bar{c}) = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)\cdot g(c) - f(c)\frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{c})}{[g(c)]^2}$

Dem:

3) $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{f}{g}) = \lim_{t\to 0} \dfrac{(\frac{f}{g})(c+te_i) - (\frac{f}{g})(c)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{\frac{g(c) f(c+te_i) - f(c) g(c+te_i)}{g(c+te_i) g(c)}}{t}$

$= \lim_{t\to 0} \dfrac{g(c)\cdot f(c+te_i) - f(c) g(c+te_i)}{g(c+te_i) g(c)\, t}$

$= \lim_{t\to 0} \dfrac{g(c) f(c+te_i) - g(c) f(c) + g(c) f(c) - f(c) g(c+te_i)}{g(c+te_i) g(c)\, t}$

$= \left[\lim_{t\to 0} \dfrac{g(c)}{g(c+te_i) g(c)}\right]\left[\lim_{t\to 0} \dfrac{f(c+te_i) - f(c)}{t}\right] - \left[\lim_{t\to 0} \dfrac{f(c)}{g(c+te_i) g(c)}\right]\left[\lim_{t\to 0} \dfrac{g(c+te_i) - g(c)}{t}\right]$

$= \dfrac{g(c)}{[g(c)]^2}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) - \dfrac{f(c)}{[g(c)]^2}\frac{\partial g}{\partial x_i}(c) = \dfrac{g(c)\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) - f(c)\frac{\partial g}{\partial (x_i)}(c)}{[g(c)]^2}$.

Ejercicio: Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Demuestra que:

a) f no es cont. en $(0,0)$

b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

Dem: (a) Sean $\alpha, \beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ t.q. $\alpha(t) = (t,t)$, con $\beta(t) = (t,-t)$ las cuales son cont. y $\alpha(0) = (0,0)$, $\beta(0) = (0,0)$.

Así $(f\circ\alpha)(t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$ $\wedge$ $(f\circ\beta)(t) = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{t\to 0}(f\circ\alpha)(t) = \frac{1}{2}$ $\wedge$ $\lim_{t\to 0}(f\circ\beta)(t) = -\frac{1}{2}$ ∴ No existe ∴ no es cont.

en $(0,0)$ ∴ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ no existe.

Sol: (b)

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(t,0) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{\frac{t\cdot 0}{t^2+0}}{t} = \frac{0}{t} = 0.$

y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

∴ Si existen las derivadas parciales en un punto no implica que la función es continua en el punto.

Def.- Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, $c \in \text{int}(A)$ y $v \in \mathbb{R}^n - \{\bar{0}\}$ un vector. Se define la derivada parcial de f respecto al vector v como:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(c) = \lim_{t \to 0} \frac{f(c+tv) - f(c)}{t}$$ siempre que el límite exista.

Obs: 1.- Si $\|v\| = 1$, $\frac{\partial f}{\partial v}(c)$ se llama la derivada direccional de f en c respecto a v

Obs.-2.- $\frac{\partial f}{\partial e_i}(c) = \frac{\partial f}{x_i}(c)$

Ejercicios.-

(1) Sea $f(x,y) = e^{xy}$, $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\underset{(v_1, v_2)}{v} \in \mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}$ un vector.
Calcula $\frac{\partial f}{\partial v}(c)$.

Sol.-

$$\frac{\partial f}{\partial v}(c) = \lim_{t \to 0} \frac{f((c_1,c_2) + t(v_1,v_2)) - f(c_1,c_2)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(c_1+tv_1, c_2+tv_2) - f(c_1,c_2)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{e^{(c_1+tv_1)(c_2+tv_2)} - e^{c_1 \cdot c_2}}{t}$$

L, Hopital

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(c) = \lim_{t \to 0} e^{(c_1+tv_1)(c_2+tv_2)} \cdot [(c_1+tv_1)v_2 + (c_2+tv_2)v_1]$$

$$= e^{c_1 \cdot c_2} \cdot [c_1v_2 + c_2v_1]$$

(2) Sea $f(x,y,z) = \cos^{-1}(xy - zx)$, $c = (1, 1, \frac{1}{4})$ y $v = (-3, 5, 1) \in \mathbb{R}^3$
Calcula $\frac{\partial f}{\partial v}(c)$.

Sol.-

$$\frac{\partial f}{\partial v}(c) = \lim_{t \to 0} \frac{f((1,1,\frac{1}{4}) + t(-3,5,1)) - f(1,1,\frac{1}{4})}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(1-3t, 1+5t, \frac{1}{4}+t) - f(1,1,\frac{1}{4})}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cos^{-1}((1-3t)(1+5t) - (1-3t)(\frac{1}{4}+t)) - \cos^{-1}(1 - \frac{1}{4})}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(c) = \lim_{t\to 0} \frac{\cos^{-1}\left(-12t^2 + \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)}{t}$$

L'Hôpital

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(c) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{-\left(24t + \frac{3}{4}\right)}{\sqrt{1 - \left(-12t^2 + \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}\right)^2}} \right) = \frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{1 - \frac{1}{16}}}$$

Teorema.- Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones, $c \in \operatorname{int}(A)$ y $v \in \mathbb{R}^n - \{\bar{0}\}$ un vector. Si $\exists \ \frac{\partial f}{\partial v}(c)$ y $\frac{\partial g}{\partial v}(c) \Rightarrow$

a) $\exists \ \frac{\partial (f+g)}{\partial v}(c) = \frac{\partial f}{\partial v}(c) + \frac{\partial g}{\partial v}(c)$

b) $\exists \ \frac{\partial (f\cdot g)}{\partial v}(c) = f(c)\frac{\partial g}{\partial v}(c) + g(c)\frac{\partial f}{\partial v}(c)$

c) Si $g(c) \neq 0 \Rightarrow \exists \ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f}{g}\right)(c) = \dfrac{g(c)\frac{\partial f}{\partial v}(c) - f(c)\frac{\partial g}{\partial v}(c)}{[g(c)]^2}$

Ejercicios:

(1) Sean $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$ las proyecciones, $c \in \mathbb{R}^n$ y $v \in \mathbb{R}^n - \{\bar{0}\}$. Calcula $\frac{\partial \pi_i}{\partial v}(c)$

Sol:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial v}(c) = \lim_{t\to 0} \frac{\pi_i(c + tv) - \pi_i(c)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\pi_i(c) + t\pi_i(v) - \pi_i(c)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \pi_i(v) = \pi_i(v)$$

(2) Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ y $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2 / \{\bar{0}\}$

• Demuestra que f es continua.

Dem.-

~~Caso~~ ~~(x,y)≠0~~ $\forall (x,y) \neq (0,0)$. Como $x^2 \le x^2 + y^2 \ \wedge \ x^2 + y^2 \neq 0 \Rightarrow 0 \le \frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0). \quad \therefore f \text{ es continua}$$

Como $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t.q. $\pi_1(x,y) = x \ \wedge \ \pi_2(x,y) = y$ son continuas

$\Rightarrow \dfrac{\pi_1^2 \cdot \pi_2}{\pi_1^2 + \pi_2^2}(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = f(x,y)$ es continua $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}$ $\therefore f$ es continua.

• Calcula $\frac{\partial f}{\partial v}(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f[(x,y) + t(a,b)] - f(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+ta, y+tb) - f(x,y)}{t}$$

Escaneado con CamScanner

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{(x+ta)^2(y+tb)}{(x+ta)^2+(y+tb)^2} - \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}}{t} = 0$$

L'Hôpital

$$= \lim_{t\to 0} \frac{[2(x+ta)a(y+tb)+b(x+ta)^2][(x+ta)^2+(y+tb)^2] - [2(x+ta)a+2(y+tb)b][(x+ta)^2 \ldots]}{[(x+ta)^2+(y+tb)^2]^2}$$

$$= [2xay+bx^2][x^2+y^2] - \{[2xa+2yb]\,[x^2y]\} / (x^2+y^2)^2$$

$$= [2xay+bx^2](x^2+y^2) - (2xa+2yb)(x^2y) / (x^2+y^2)^2$$

$=$

$$\Rightarrow J = \frac{[2xay+bx^2](x^2+y^2)-(2xa+2yb)(x^2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f[(0,0)+t(a,b)]-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{(ta)^2(tb)}{(ta)^2+(tb)^2} - 0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{t\,a^2b}{a^2+b^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{a^2b}{a^2+b^2} = \frac{a^2b}{a^2+b^2}$$

(3) Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq 0 \\ 0 & (x,y)=0 \end{cases}$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad \exists \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Sea $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ y $v=(0,0)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f[(0,0)+t(a,b)]-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{(ta)(tb)}{(ta)^2+(tb)^2}}{t}.$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{ab}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{t} \quad \nexists$$

Nota: si $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \not\Rightarrow \exists \dfrac{\partial f}{\partial v}$ p.a. $v\in \mathrm{Dom}(f)$

Diferenciabilidad

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es diferenciable en $c\in(a,b)$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ $f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to c}\frac{|f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)|}{|x-c|}=0.$

Tenemos que la recta tangente viene dada por $g(x)=f(c)+f'(c)(x-c)$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to c}\frac{|f(x)-g(x)|}{x-c}=0$ y decimos que $g(x)$ es tangente a $f(x)$ si se cumple el límite.

Def: La función $g(x)=f(c)+f'(c)(x-c)$ es tangente a la función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ en el punto c $\Leftrightarrow \lim_{x\to c}\frac{|f(x)-g(x)|}{|x-c|}=0$

Def: Sean $f,g: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ funciones y $c\in int(A)$ se dice que g es tangente a f en el punto c $\Leftrightarrow \lim_{\bar{x}\to\bar{c}}\frac{|f(\bar{x})-g(\bar{x})|}{\|\bar{x}-c\|}=0$

Ejercicios:

1) Sean $f(x,y)=x^2y-3xy$ y $g(x,y)=-5x+4y-5$ y $c=(-1,1)$

Demuestra que g es tangente a f en c.

Dem: $\lim_{(x,y)\to(-1,1)}\frac{|f(x,y)-g(x,y)|}{\|(x,y)-(-1,1)\|}=\lim_{(x,y)\to(-1,1)}\frac{|x^2y-3xy+5x-4y+5|}{\|(x+1,y-1)\|}=\lim_{(x,y)\to(-1,1)}\frac{|x^2y-3xy+5x-4y+5|}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}}$

$=\lim_{(x,y)\to(-1,1)}\frac{|x+1|\,|xy-4y+5|}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}}$ pero $|x+1|\le\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$ $\Rightarrow 0<\frac{|x+1|}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}}\le 1$

y $\lim_{(x,y)\to(-1,1)}|xy-4y+5|=0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(-1,1)}\cdots=0$ $\therefore$ g es tangente a $f(x)$ en $(-1,1)$.

Teorema: Sea $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función y $c\in int(A)$. Si $\exists\, T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ t.q. $g_T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dada por $g_T(x)=f(c)+T(x-c)$ es tangente a f en c $\Rightarrow$ T es única.

Dem: Sea $T_1\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ t.q. $g_{T_1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dada por $g_{T_1}(x)=f(c)+T_1(x$ es tangente a f en c. P.D. $T=T_1$

Como $c\in int(A)$ $\Rightarrow$ $\exists\, B_\delta(c)\subset\mathbb{R}^n$ t.q. $B_\delta(c)\subset A$.

Sea $v\in\mathbb{R}^n$ t.q. $\|v\|=1$ y sea $x=\lambda v+c$ donde $0<|\lambda|<\delta$.

$\Rightarrow \quad \|x-c\| = \|\lambda v + c - c\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| = |\lambda| < \delta \Rightarrow x \in B_\delta(c) \subset A$

Ahora, dado que: $0 \leq |T(v) - T_1(v)| = |T(\frac{x-c}{\lambda}) - T_1(\frac{x-c}{\lambda})|$

$$= \frac{|T(x-c) - T_1(x-c)|}{\lambda} = \frac{|T(x-c) - T_1(x-c)|}{\|x-c\|}$$

$$= \frac{|f(x) - f(c) - T_1(x-c) - f(x) + f(c) + T(x-c)|}{\|x-c\|}$$

$$\leq \frac{|f(x) - f(c) - T_1(x-c)|}{\|x-c\|} + \frac{|f(x) - f(c) - T(x-c)|}{\|x-c\|}$$

$$= \frac{|f(x) - g_{T_1}(\cancel{x})|}{\|x-c\|} + \frac{|f(x) - g_T(x)|}{\|x-c\|}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{x\to c} |T(v) - T_1(v)| \leq \lim_{x\to c} \frac{|f(x) - g_{T_1}(x)|}{\|x-c\|} + \frac{|f(x) - g_T(x)|}{\|x-c\|}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$\Rightarrow |T(v) - T_1(v)| = 0 \Rightarrow T(v) = T_1(v)$

Sea $w \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ tomando $u = \frac{w}{\|w\|}$ se tiene que $\|u\| = 1$

$\Rightarrow T(u) = T_1(u) \Rightarrow T(\frac{w}{\|w\|}) = T_1(\frac{w}{\|w\|}) \Rightarrow \frac{1}{\|w\|} T(w) = \frac{1}{\|w\|} T_1(w)$

$\Rightarrow T(w) = T_1(w).$

Def.- Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y $c \in \text{int}(A)$. Se dice que <u>f es diferenciable en c</u> si $\exists T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ t.q. $g_T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $g_T(x) = f(c) + T(x-c)$ es tangente a f en el punto c, i.e.

$$\lim_{x\to c} \frac{|f(x) - g_T(x)|}{\|x-c\|} = \lim_{x\to c} \frac{|f(x) - f(c) - T(x-c)|}{\|x-c\|} = 0$$

En este caso la transformación lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ se llama la <u>derivada de f en c</u> y se denota por $Df(c) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

Por el teorema anterior $Df(c)$ es única.

Ejercicios:-

(1) Demuestra que $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $T(x,y)=-4x+y$ es lineal y que $f(x,y)=x^2y$ es diferenciable en $c=(-1,2)$, siendo $Df(1,2):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ t.q $Df(-1,2)(x,y)=-4x+y$ su derivada

Dem: $T(\lambda(a,b)+(c,d))=T(\lambda a+c,\lambda b+d)=-4(\lambda a+c)+(\lambda b+c)=\lambda(-4a+b)+(-4c+d)$
$=\lambda T(a,b)+T(c,d)$ $\therefore$ T es lineal

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)}\frac{|f(x,y)-f(-1,2)-Df(-1,2)((x,y)-(-1,2))|}{\|(x,y)-(-1,2)\|}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(-1,2)}\frac{|x^2y-2-[-4(x+1)+(y-2)]|}{\|(x+1,y-2)\|}=\lim_{(x,y)\to(-1,2)}\frac{|x^2y+4x-y+4|}{\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(-1,2)}\frac{|x+1||xy-y+4|}{\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}}=0$$

Nota: Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ y $c\in \text{int}(A)$. Entonces f es diferenciable en c $\iff$ $\exists\, Df(c)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ t.q $\lim_{\bar h\to\bar 0}\frac{|f(c+h)-f(c)-Df(c)(h)|}{\|h\|}=0$

(2) Sea $f: A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función constante y $c\in\text{int}(A)$. Demuestra que f es diferenciable en c

Dem: como f es constante $\exists\, k\in\mathbb{R}$ t.q $f(\bar x)=k$ $\forall x\in A$

Tenemos $f(c+h)-f(c)=k-k=0$ $\Rightarrow$ f es diferenciable en c y $Df(c):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dada por $Df(c)(h)=0$.

(3) Sea $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ lineal. Entonces T es diferenciable en $\mathbb{R}^n$

Dem: Sea $c\in\mathbb{R}^n$, $T(c+h)=T(c)+T(h)-T(c)=T(h)$
$\Rightarrow DT(c):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $DT(c)(h)=T(h)$.

$$\lim_{h\to0}\frac{|T(c+h)-DT(c)(h)|}{\|h\|}=\lim_{h\to0}\frac{|T(h)-T(h)|}{\|h\|}=0.$$

(4) Sea $\phi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ bilineal. Demuestra que ϕ es diferenciable en $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$

Dem: Sea $(a,b)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$

$\phi[(a,b)+(h,k)]-\phi(a,b)=\phi(a+h,b+k)-\phi(a,b)=\phi(a,b+k)+\phi(h,b+k)-\phi(a$
$=\phi(a,b)+\phi(a,k)+\phi(h,b)+\phi(h,k)-\phi(a,b)=\phi(a,k)+\phi(h,b)+\phi(h,k)$

Escaneado con CamScanner

Sea $D\phi_{(a,b)} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.q. $D\phi_{(a,b)}(h,k) = \phi(a,k) + \phi(h,b)$

Además como ϕ es bilineal $\exists M>0$ t.q. $|\phi(h,k)| \leq M \|h\| \|k\|$

Supongo que $h \neq \bar{0}$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|\phi[(a,b)+(h,k)] - \phi(a,b) - D\phi_{(a,b)}(h,k)|}{\|(h,k)\|}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|\phi(h,k)|}{\|(h,k)\|} \leq \lim \frac{M\|h\|\|k\|}{\|h\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} M\|k\| = 0.$$

Interpretación geométrica de Diferenciabilidad

Def.- Sea $\bar{a} \in \mathbb{R}^n - \{\bar{0}\}$ un vector y $k \in \mathbb{R}$ una constante, un hiperplano en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma $P = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \bar{a} ; \bar{x} \rangle = k\}$

Def.- Una transformación afín de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ es una función de la forma $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.q. $L(\bar{x}) = T(\bar{x}) + k$ donde $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ y k = constante

Ejercicios:

(1) Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una transf. afín. Demuestra que $P = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid L(\bar{x}) = c$ con $c \in \mathbb{R}\}$ es un hiperplano

Dem.- Como L es transf. afín $\exists T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $k_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $L(\bar{x}) = T(\bar{x}) + k_0$

Sea $a_i = T(e_i)$ $1 \leq i \leq n$. Así $L(\bar{x}) = T\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) + k_0$

$= \sum_{i=1}^n x_i T(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i a_i = \langle \bar{x} ; \bar{a} \rangle + k_0$, con $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$

$\Rightarrow P = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid L(\bar{x}) = c\} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \bar{x} ; \bar{a} \rangle + k_0 = c\} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \bar{x} ; \bar{a} \rangle = c - k_0\}$

$\therefore$ es un hiperplano ■

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y $\bar{c} \in \text{int}(A)$ y $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una transformación afín;

Se dice que la gráfica de L es tangente a la gráfica de f en $(\bar{c}, f(\bar{c}))$ si

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{c}} \frac{|f(x) - L(x)|}{\|\bar{x} - \bar{c}\|} = 0$$

Si f es diferenciable en $\bar{c}$ entonces la gráfica de la transformación afín $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $L(\bar{x}) = f(c) + Df(c)(x-c)$

$= f(c) + Df(c)(x) - Df(c)(c)$

$= Df(c)(x) + (f(c) - Df(c)(c))$

Es tangente a la gráfica de f en el punto $(\bar{c}, f(c)) \in \mathbb{R}^n$.

En efecto: como f es diferenciable en $c=y$

$$\lim_{x\to c} \frac{|f(x) - f(c) - Df(c)(x-c)|}{\|x-c\|} = \lim_{x\to c} \frac{|f(x) - [f(c) + Df(c)(x-c)]|}{\|x-c\|} = 0.$$

Def. Se define la ecuación del hiperplano tangente a la $Gr(f)$ en el punto $(c, f(c))$ como $L(x) = f(c) + Df(c)(x-c)$

Teorema: Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y $c \in int(A)$. Si f es diferenciable en $\bar{c} \Rightarrow \exists \delta > 0$ y $m > 0$ t.q. $\forall x \in A$ y $\|\bar{x} - c\| < \delta$ $\Rightarrow |f(x) - f(c)| \le m\|\bar{x}-c\|$. En particular f es continua en $\bar{c}$

Dem: Sea $\varepsilon_0 = 1$ como f es diferenciable en $\bar{c} \Rightarrow \exists \delta > 0$ t.q. $\forall \bar{x} \in A$ y $0 < \|x-c\| < \delta \Rightarrow \dfrac{|f(x) - f(c) - Df(c)(x-c)|}{\|x-c\|} < 1$

$|f(x) - f(c) - Df(c)(x-c)| < \|\bar{x} - c\|$

$\Rightarrow |f(x) - f(c)| - |Df(c)(x-c)| < |f(x) - f(c) - Df(c)(x-c)| < \|x-c\|$

$\Rightarrow |f(x) - f(c)| < \|x-c\| + |Df(c)(x-c)|$

Por otra parte $\exists m_1 > 0$ t.q. $|Df(c)(x-c)| \le m_1\|x-c\|$. Luego si $x \in A$ y $0 < \|x-c\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| \le \|x-c\| + m_1\|\bar{x}-c\| = \underbrace{(1+m_1)}_{m}\|x-c\|$

Veamos que f es continua, sea $\varepsilon > 0$ p.d. $\exists \eta > 0$ t.q. si $x \in A$ y $\|x-c\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Por la 1ra parte de la demostración $\exists \delta > 0$ y $m > 0$ t.q. si $x \in A$ y $\|x-c\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < m$

Tomando $\eta = \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{m}\}$ se tiene que si $x \in A$ y $\|x-c\| < \delta$ $\Rightarrow |f(x) - f(c)| \le m\|x-c\| < m \cdot \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon$.

Escaneado con CamScanner

Teorema: Sea $f: A\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, $c\in int(A)$, y $v\in\mathbb{R}^n-\{0\}$ un vector. Si f es diferenciable en c $\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial v}(c)$ y $\frac{\partial f}{\partial v}(c)=Df(c)(v)$

Dem: Sea $\varepsilon>0$. P.D. $\exists\delta>0$ t.q. si $0<|t|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(c+tv)-f(c)}{t} - Df(c)(v)\right|<\varepsilon$

Sea $\varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{\|v\|}>0$. Como f es diferenciable en c y $\varepsilon_0>0$ $\Rightarrow \exists \delta_0>0$ t.q. si $0<\|h\|<\delta \Rightarrow \frac{|f(c+h)-f(c)-Df(c)(h)|}{\|h\|}<\frac{\varepsilon}{\|v\|}$

Tomando $\delta=\frac{\delta_0}{\|v\|}>0$ ~~y $h=tv$~~ se tiene que si

$0<|t|<\delta \Rightarrow 0<|t|<\frac{\delta_0}{\|v\|} \Rightarrow 0<\|v\||t|<\delta_0 \Rightarrow 0<\|tv\|<\delta$.

$\Rightarrow \frac{|f(c+tv)-f(c)-Df(c)(tv)|}{\|tv\|}<\frac{\varepsilon}{\|v\|}$

$\Rightarrow \left|\frac{f(c+tv)-f(c)}{t}-Df(c)(v)\right|<\varepsilon$ ■

Corolario: Sea $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función y $c\in int(A)$. Si f es diferenciable en c $\Rightarrow \exists\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$ $1\le i\le n$ y $Df(c):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ está dada por:

$$Df(c)(u)=\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$$

Dem: Tomando $v=e_i\in\mathbb{R}^n-\{\bar 0\}$, como f es diferenciable en c $\Rightarrow$ por el teorema anterior $\exists \frac{\partial f}{\partial e_i}(c)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$ y $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)=Df(c)(e_i)$. Por otra parte dado $u=(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n$ se tiene que $Df(c)(u)=Df(c)\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i\right) \overset{\text{lineal}}{=} \sum_{i=1}^n u_i Df(c)(e_i)=\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$ ■

Nota: Sea $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función y $c\in int(A)$. Como $c\in int(A)\Rightarrow\exists B_r(c)$ en $\mathbb{R}^n$ t.q. $B_r(c)\subseteq A$.
Así podemos suponer s.p.g. que A es abierto.

Ejercicios:

(1) Sea $f: B_r(c)\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función t.q. $\forall \bar{x}\in B_r(c)$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar x)$ $1\le i\le n$. Demuestra siendo $\bar z_1,\bar z_2\in B_r(c)$ que la función $\phi:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $\phi(t)=f(t\bar z_2+(1-t)\bar z_1)$ es diferenciable

Dem: como $z_1, z_2 \in B_r(\bar{c}) \Rightarrow [z_1, z_2] = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = \lambda z_2 + (1-\lambda) z_1, \lambda \in [0,1]\} \subset B_r(\bar{c})$. Entonces la función $\phi: [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(t) = f(t z_2 + (1-t) z_1)$ está bien definida. Veamos que ϕ es diferenciable en $[0,1]$.

Mal planteado

No terminado

Sea $t_0 \in [0,1]$

$$\phi'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\phi(t_0+h) - \phi(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f[(t_0+h)z_2 + (1-(t_0+h))z_1] - f(t_0 z_2 + (1-t_0) z_1)}{h}$$

Teorema: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y $c \in U$. Si $\forall x \in U$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ $1 \le i \le n$ y las funciones $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas en $\bar{c} \Rightarrow$ f es diferenciable en $\bar{c}$ y $Df(c): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ está dada por $Df(c)(u) = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$

Dem: Sea $\varepsilon > 0$ P.D. $\exists \delta > 0$ t.q. si $x \in U$ y $0 < \|x - c\| < \delta$
$\Rightarrow \left| f(x) - f(c) - \sum_{i=1} (x_i - c_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) \right| < \varepsilon \|x - c\|$

Como $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en c $\forall i$, y $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{n} > 0 \Rightarrow$

$\exists \delta_i > 0$ t.q. si $\bar{x} \in U$ y $\|\bar{x} - \bar{c}\| < \delta_i \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) \right| < \frac{\varepsilon}{n}$

Sea $\delta = \min\{\delta_i \mid 1 \le i \le n\}$ y $x \in U$ t.q. $\|x - c\| < \delta$

Considere los sig. puntos $z_0 = \bar{x}$, $z_1 = (c_1, x_2, \dots, x_n)$, $z_2 = (c_1, c_2, x_3, \dots, x_n)$ ... $z_n = \bar{c}$. Note que $z_i \in B_\delta(\bar{c})$. Así se tiene que:

$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \sum_{i=1}^n f(z_{i-1}) - f(z_i)$. Sea $\phi_i: [0,1] \to \mathbb{R}$ t.q. $\phi_i(t) = f[z_i + t(x_i - c_i) e_i]$

$= f(c_1, \dots, c_{i-1}, c_i + t(x_i - c_i), x_{i+1}, \dots, x_n)$ la cual es ~~diferenciable~~ continua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1) \Rightarrow$ por el T.V.M.
$\exists s_i \in (0,1)$ $\phi_i(1) - \phi_i(0) = \phi_i'(s_i)$, esto es $f(z_{i-1}) - f(z_i)$
$= (x_i - c_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} \underbrace{(c_1, \dots, c_{i-1}, c_i + s_i(x_i - c_i), x_{i+1}, \dots, x_n)}_{w_i}$

Así, $f(x) - f(\bar{c}) - \sum_{i=1} (x_i - c_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = \sum_{i=1} \left(f(z_{i-1}) - f(z_i) \right) - \sum_{i=1}^n (x_i - c_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c})$

$= \sum_{i=1}^n (x_i - c_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(w_i) - \sum_{i=1}^n (x_i - c_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$

$= \sum_{i=1}^n (x_i - c_i) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(w_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) \right)$

Luego, si $x \in U$ y $0 < \|x - c\| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - f(c) - \sum_{i=1}^n (x_i - c_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) \right|$
$= \left| \sum_{i=1}^n (x_i - c_i) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(w_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) \right) \right|$

$\leq \sum_{i=1}^{n} \|x-c\| \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(w_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) \right| = \|x-c\| \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(w_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) \right| < \|x-c\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n}$

$= \|x-c\| \cdot \varepsilon$

Ejercicio:

(1) Sea $f: B_\delta(c) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función t.q. $\forall \bar{x} \in B_\delta(c)$ $\exists$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ $1 \leq i \leq n$. Sea ~~$\bar{h} \in \mathbb{R}^n$~~ $\bar{h} \in \mathbb{R}^n - \{\bar{0}\}$ t.q. $0 < \|\bar{h}\| < \delta$,

así $\bar{c}+\bar{h} \in B_\delta(c)$. Sean $z_0 = \bar{c}$, $z_1 = (c_1+h_1, c_2, \dots, c_n)$
$z_2 = (c_1+h_1, c_2+h_2, c_3, \dots, c_n)$ ... $z_n = \bar{c}+\bar{h}$. Demuestra que la función $g_i(t) = f(c_1+h_1, c_2+h_2, \dots, c_{i-1}+h_{i-1}, t, c_{i+1}, \dots, c_n)$ es diferenciable.

(2) Determina donde es diferenciable f.

(a) $f(x,y) = \cos(x^2+y)$

Sol.- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x\sin(x^2+y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin(x^2+y)$

$\exists$ y son continuas $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\therefore$ f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$

(b) $f(x,y,z) = \ln(\underbrace{xy - xz}_{A}$)

Sol. $f: \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy - xz > 0\} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{y-z}{xy-xz}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{x}{xy-xz}$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{-x}{xy-xz}$

Existen y son continuas $\forall (x,y,z) \in A$. (pues las parciales las evaluo en puntos de A)

(3) Sean $f(x,y,z) = z e^{x^2-yz}$, $\bar{c}=(2,-2,-2)$ y $v=(-\sqrt{3},4,-1)$

(a) Determina donde es diferenciable f.
(b) Determina la ecuación del hiperplano tangente a la gráfica de la función en $\bar{c}$
(c) Calcula $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{c})$

Sol:

• $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = z e^{x^2-yz} \cdot 2x = 2xz e^{x^2-yz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = z e^{x^2-yz} \cdot (-z) = -z^2 e^{x^2-yz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = e^{x^2-yz} + z e^{x^2-yz} \cdot (-y) = e^{x^2-yz}[1-zy]$$

• $x_t = f(\bar{c}) + D_{f(\bar{c})}(\bar{x}-\bar{c})$

$$= f(\bar{c}) + \sum_{i=1}^{3} (x_i - c_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$$

$$x_t = f(2,-2,-2) + \left[(x-2)\frac{\partial f}{\partial x}(2,-2,-2) + (y+2)\frac{\partial f}{\partial y}(2,-2,-2) + (z+2)\frac{\partial f}{\partial z}(2,-2,-2)\right]$$

$$x_t = -2 + [(x-2)(-8) + (y+2)(-4) + (z+2)(-3)]$$

$$x_t = -2 - 8x + 16 - 4y - 8 - 3z - 6 = -8x - 4y - 3z$$

• $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{c}) = D_{f(\bar{c})}(v) = v_1\frac{\partial f}{\partial x}(c) + v_2\frac{\partial f}{\partial y}(c) + v_3\frac{\partial f}{\partial z}(\bar{c})$

$$= (-\sqrt{3})(-8) + (4)(-4) + (-1)(-3).$$

Teorema. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y $\bar{c} \in U$. Entonces f es diferenciable en $\bar{c} \iff \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$ $1 \le i \le n$ y

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{c}} \frac{\left| f(\bar{x}) - f(\bar{c}) - \sum_{i=1}^{n}(x_i - c_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c})\right|}{\|\bar{x}-\bar{c}\|} = 0.$$

Ejercicio:

(4) Sea $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(a) Demuestra que f es continua en $\mathbb{R}^2$
(b) Demuestra que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

(c) Demuestra que $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ no son continuas en $(0,0)$

(d) Demuestra que f es diferenciable en $(0,0)$

a) Veamos que es continua en $(0,0)$.

Tenemos que $-(x^2+y^2) \le (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \le x^2+y^2$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. $\therefore$ f es continua en $(0,0)$.

b) Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y\right)$$

Además

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f[(0,0)+t(1,0)] - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin\left(\frac{1}{|t|}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} t\sin\left(\frac{1}{|t|}\right) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f[(0,0)+t(0,1)] - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin\left(\frac{1}{|t|}\right)}{t} = 0.$$

$\therefore$ $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ $\exists$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$.

c) Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ / $\alpha(t) = (t,0)$ ... $\alpha(0) = (0,0)$.

$\Rightarrow$ si $t \neq 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial f}{\partial x}\circ\alpha\right](t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,0) =$

$= 2t\sin\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{t\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t} = 2t\sin(t) + \cos(t)$

$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\circ\alpha\right)(t) \nexists$ $\therefore$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$

Análogamente para $\frac{\partial f}{\partial y}$.

d) Veamos que $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$ $\Rightarrow D_{f(c)}((x,y)-(0,0)) = \sum_{i=1}^{2}(x_i-c_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - [(x-0)\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - (y-0)\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)]|}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|(x^2+y^2)\operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})| = 0.$$

$\therefore$ f es diferenciable en $(0,0)$

Diferenciación bajo el signo de integración

Lema: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$ compacto y $f: (A\times D) \subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ continua. Dado $c\in A$ y $\varepsilon>0$ $\exists\, \delta>0$ t.q si $x\in A$ y $\|x-c\|<\delta \Rightarrow |f(x,m)-f(c,m)|<\varepsilon$

Dem: Como f es continua en (c,w) para cada $w\in D$, entonces $\exists\, \delta_{(c,w)}$ t.q si $(x,m)\in A\times D$ y $\|(x,m)-(c,w)\|<\delta_{(c,w)} \Rightarrow |f(x,m)-f(c,w)|<\frac{\varepsilon}{2}$

En particular, si $\|m-w\|<\delta \Rightarrow |f(c,m)-f(c,w)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Por otra parte como $D\subset \bigcup B_{\delta_{(c,w)}}(w)$ y D es compacto $\Rightarrow$ $\exists\, w_1,\dots,w_s$ t.q $D\subset \bigcup_{i=1}^{s} B_{\delta_{(c,w_i)}}(w_i)$. Tomando $\delta = \min\{\delta_{(c,w_i)} \mid 1\le i\le s\}$

Se tiene que dado $m\in D$ $\exists\, 1\le j\le s$ t.q $m\in B_{\delta_{(c,w_j)}}(w_j)$, así $\|m-w_j\|<\delta_{(c,w_j)}$.

Si $x\in A$ $\wedge$ $\|x-c\|<\delta \Rightarrow |f(x,m)-f(c,m)| = |f(x,m)-f(c,w_j)+f(c,w_j)-f(c,m)|$

$\le |f(x,m)-f(c,w_j)| + |f(c,w_j)-f(c,m)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Lema: Sea $A\subset\mathbb{R}^n$ y $f: A\times[a,b]\subset\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ continua. Si $\phi: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ está dada por:

$\phi(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt \Rightarrow \phi$ es continua en A.

Dem: Sea $c\in A$ $\wedge$ $\varepsilon>0$ P.D $\exists\,\delta>0$ t.q si $x\in A$ $\wedge$ $\|x-c\|<\delta \Rightarrow |\phi(x)-\phi(c)|$

Como $f: A\times[a,b]\subset\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ es continua, en particular f es continua en (c,t) con $t\in[a,b]$. Así dado $\varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{b-a}$ $\exists\,\delta>0$ t.q si $(x,t)\in A\times[a,b]$ y $\|(x,t)-(c,t)\|<\delta \Rightarrow |f(x,t)-f(c,t)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$

Luego si $x\in A$ $\wedge$ $\|x-c\|<\delta$ es $|\phi(x)-\phi(c)| = |\int_a^b f(x,t)\,dt - \int_a^b f(c,t)\,dt|$

$= |\int_a^b (f(x,t)-f(c,t))\,dt| \le \int_a^b |f(x,t)-f(c,t)| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dt = \varepsilon.$

Teorema (Regla de Leibniz)
Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f: V \times [a,b] \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ continua, suponga que para cada $(\bar{x},t) \in V$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x},t)$ $1 \leq i \leq n$ y que:

$\frac{\partial f}{\partial x_i}: V \times [a,b] \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ es continua.

Si $\phi: V \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ está dada por $\phi(\bar{x}) = \int_a^b f(x,t)\,dt$
$\Rightarrow \exists \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)$ $\forall x \in V$ $\wedge$ $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt$.

Además $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}: V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua.

Dem.- Sea $x \in V$, $\varepsilon > 0$ P.D. $\exists \delta > 0$ t.q. si $0 < |h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\phi(x+he_i) - \phi(x)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt \right| < \varepsilon$

Como V es abierto $\bar{x} \in V \Rightarrow \exists B_r(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^n$ t.q. $B_r(\bar{x}) \subset V$
Así, para $0 < |h| < \delta$ se tiene que $x + he_i \in B_r(x) \subset V$

Luego si $0 < |h| < r \Rightarrow \left| \frac{\phi(x+he_i) - \phi(x)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt \right|$

$= \left| \frac{1}{h} \int_a^b f(x+he_i,t) - f(x,t)\,dt - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt \right|$ (1)

Sea $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(s) = f(x + she_i, t)$
la cual es continua (Teoremas anteriores) en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1)$
$\Rightarrow$ por el T.V.M $\exists \theta \in (0,1)$ t.q. $g(1) - g(0) = g'(\theta)$
i.e. $g'(\theta) = f(x+he_i,t) - f(x,t) = h \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta he_i, t)$.

Así se tiene que si $0 < |h| < r \Rightarrow$

$(1) = \left| \frac{1}{h} \int_a^b h \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta he_i,t)\,dt - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt \right|$

$= \left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta he_i,t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt \right|$

Por otra parte como $\frac{\partial f}{\partial x_i}: V \times [a,b] \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ es continua y V es compacto, $\Rightarrow$ por el <u>Lema 1</u> se tiene que $\exists \delta_0 > 0$
$x + she_i \in V$ $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{b-a}$ y $\|x + she_i - x\| = \|she_i\| = s|h| < |h| < \delta_0$
$\Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+she_i,t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

Tomando $\delta = \min\{r, \delta_0\}$ se tiene que si $0 < |h| < \delta$
$\Rightarrow$

$\left| \frac{\phi(x+he_i) - \phi(x)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt \right| = \left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta he_i,t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt \right|$

$$\leq \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h e_i, t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right| dt < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} < \varepsilon$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas $\Rightarrow$ por el lema 2,

$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\bar{x}) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt$ es continua

Ejercicio.-

(1) Sea $\phi(x,y) = \int_0^1 e^{tx^2+y}\,dt$. Verifica que ϕ cumple las hipótesis de la regla de Leibniz y calcula $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)$

Sol.- $f : \mathbb{R}^2 \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,t) = e^{tx^2+y}$

Para cada $t \in [0,1]$ la función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to e^{tx^2+y}$ es continua

Además $\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,1]$, $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,t) = 2tx\,e^{tx^2+y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,t) = e^{tx^2+y}$ y son continuas, entonces por la regla de Leibniz $\exists \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,t)\,dt = \int_0^1 2t\,x\,e^{tx^2+y}\,dt$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,t)\,dt = \int_0^1 e^{tx^2+y}\,dt =$$

Derivadas parciales de orden superior

Def.- Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función. Si $\forall \bar{x} \in U$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$, se tiene una función $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ llamada la derivada parcial de 1er orden.

Si $\forall \bar{x} \in U$ $\exists \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x})$ se tiene una función $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ llamada la derivada parcial de 2do orden

De manera similar se definen las derivadas parciales de orden "p", con $p \geq 3$. f puede tener a lo más n^p derivadas parciales de orden p.

Nota: En general $\frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i} \neq \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}$

Escaneado con CamScanner

Ejercicio:

(i) Calcula las derivadas parciales de 2do orden de $f(x,y,z) = e^{xy-yz}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y\, e^{xy-yz}$
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y,z) = y^2 e^{xy-yz} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y,z) = e^{xy-yz} + y\, e^{xy-yz}(x-z) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y,z) = -y^2 e^{xy-yz}. \end{cases}$$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = (x-z)\, e^{xy-yz}$
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y,z) = e^{xy-yz} + (x-z)\, e^{xy-yz}(y) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y,z) = (x-z)^2 e^{xy-yz} \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y,z) = -e^{xy-yz} + (x-z)\, e^{xy-yz}\cdot(-y) \end{cases}$$

- $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -y\, e^{xy-yz}$
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = -y^2 e^{xy-yz} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = -e^{xy-yz} - y\, e^{xy-yz}(x-z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = -y\, e^{xy-yz}(-y) \end{cases}$$

Notamos que en este caso $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, etc. ¿Cuándo se cumple esto?

Lema 1: Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función y $(a,b) \in U$. Si $\forall (x,y) \in U$, $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en (a,b). Si $G(h,k)$ es la diferencia compuesta ($G(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a,b)$)

$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \lim_{(h,k)\to(a,b)} \frac{G(h,k)}{hk}$

Dem: Sea $\varepsilon > 0$. P.D. $\exists \delta > 0$ t.q. $0 < \|(h,k)\|_\infty < \delta \Rightarrow \left| \frac{G(h,k)}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \right| < \varepsilon$

Como U es abierto y $(a,b) \in U \Rightarrow \exists \delta_1 > 0$ t.q.

$B_{\delta_1}(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y) - (a,b)\|_\infty < \delta_1\} \subseteq U$. Así, para $0 < |h| < \delta_1$, $0 < |k| < \delta_1$ se tiene que $(a+h, b+k), (a+h, b), (a, b+k) \in U$

Como $\varepsilon > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ es continua en $(a,b) \Rightarrow \exists \delta_2 > 0$ t.q. si $(x,y) \in U$ y $\|(x,y) - (a,b)\|_\infty < \delta_2 \Rightarrow \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \right| < \varepsilon$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Si $0 < \|(h,k)\|_\infty < \delta \Rightarrow$ definir la función $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = f(a+th, b+k) - f(a+th, b)$ así $g(1)-g(0) = G(h,k)$

Como $\forall (x,y) \in V$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ se tiene que g es continua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1)$ $\Rightarrow$ por el T.V.M $\exists \theta_1 \in (0,1)$ t.q $g(1)-g(0) = g'(\theta_1)$
$\Rightarrow$
$G(h,k) = h \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k) - h \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b)$ (Note que θ_1 depende de h y k).

Sea $\ell: [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\ell(s) = h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+sk)$, así $G(h,k) = \ell(1) - \ell(0)$. Como $\forall (x,y) \in V$ $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ se tiene que la función "ℓ" es continua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1)$ $\therefore$ por el T.V.M
$\exists$ $\theta_2 \in (0,1)$ t.q $\ell(1) - \ell(0) = \ell'(\theta_2)$
$\Rightarrow G(h,k) = \ell(1) - \ell(0) = hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$ (Note que θ_2 depende de h, k y θ_1)
$\Rightarrow$
Luego, si $0 < \|(h,k)\|_\infty < \delta \Rightarrow \frac{G(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$
y $\|(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) - (a,b)\|_\infty = \|(\theta_1 h, \theta_2 k)\|_\infty < \delta$.

Como $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ es continua en (a,b) se tiene que, si $0 < \|(h,k)\|_\infty < \delta$
$\Rightarrow \|(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) - (a,b)\| < \delta < \delta_1$
$\Rightarrow \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \right| = \left| \frac{G(h,k)}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \right| < \varepsilon$

Lema 2: Sea $V \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $f: V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función y $(a,b) \in V$, si $\forall (x,y) \in V$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ $\wedge$ $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}: V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en (a,b)
$\Rightarrow$ $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$

Dem: Como V es abierto y $(a,b) \in V \Rightarrow \exists B_{\delta_1}(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)-(a,b)\|_\infty < \delta_1\}$ t.q $B_{\delta_1}(a,b) \subseteq V$

Si $0 < |h| < \delta_1$ y $0 < |k| < \delta_1 \Rightarrow (a+h, b+k), (a+h, b), (a, b+k) \in B_{\delta_1}(a,b) \subseteq V$

Sea $G: B_{\delta_1}(a,b) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t.q

$G(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a,b)$

Como $\forall (x,y) \in V$ $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \Rightarrow$ se tiene que

$$\lim_{k \to 0} \frac{G(h,k)}{hk} = \frac{1}{h} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{G(h,k)}{k} = \frac{1}{h}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(a+h, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right] \quad (1)$$

Por otra parte como $\forall (x,y) \in V$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ es continua

Escaneado con CamScanner

en (a,b) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{G(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$

$\Rightarrow$ Sea $\varepsilon>0$ P.D $\exists \delta>0$ t.q si $0<|h|<\delta \Rightarrow \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{h} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \right| < \varepsilon$.

Esto es
Dado $\varepsilon>0$ $\exists \delta_2>0$ t.q si $0<\|(h,k)\|<\delta_2 \Rightarrow \left| \frac{G(h,k)}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Tomando el limite ~~[illegible]~~ cuando $k\to 0$ y usando (1) se tiene que
si $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y $0<|h|<\delta \Rightarrow$

$$\lim_{k\to 0} \left| \frac{G(h,k)}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{h}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \right] - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(a,b) := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b).$$

Teorema de Schwarz:-
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n) \in U$
Si $\forall \bar{x} \in U$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x})$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

es continua en $\bar{c}$ $\Rightarrow$ $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(\bar{c})$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(\bar{c}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{c})$

Demos: supongamos s.p.g que $i<j$.

Sea $\ell: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ t.q $\ell(x,y) = (c_1, \dots, c_{i-1}, x, c_{i+1}, \dots, c_{j-1}, y, c_{j+1}, \dots, c_n)$
la cual es continua y como U es abierto en $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $W = \ell^{-1}(U)$
es una vecindad abierta de (c_i, c_j).
Sea $F: W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t.q $F(x,y) = f(c_1, \dots, c_{i-1}, x, c_{i+1}, \dots, c_{j-1}, y, c_{j+1}, \dots, c_n)$
Además tenemos así

$$\frac{\partial F}{\partial x}(c_i, c_j) = \lim_{t\to 0} \frac{F(c_i+t, c_j) - F(c_i, c_j)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(c_1, \dots, c_{i-1}, c_i+t, c_{i+1}, \dots, c_{j-1}, c_j, c_{j+1}, \dots, c_n) - f(c_1, \dots, c_n)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{c} + t e_i) - f(\bar{c})}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(c_i, c_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{c}).$$

Como por hipótesis $\forall \bar{x} \in U$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x})$

y $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ es continua en $\bar{c}$ $\Rightarrow$

$\forall (x,y) \in \omega$ $\exists$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ es continua en (c_i, c_j)

$\Rightarrow$ Por lema 2 $\exists$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_i, c_j)$ $\wedge$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_i, c_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_i, c_j)$

Entonces solo vemos que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_i, c_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{c})$ con lo cual

Se tendrá que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{c}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{c})$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_i, c_j) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(c_i, c_j) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(c_i + t, c_j) - \frac{\partial f}{\partial y}(c_i, c_j)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{c} + t e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{c})}{t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\bar{c}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{c}) \quad \blacksquare$$

Funciones de clase C^r ($r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$)

Def.- Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, se dice que f es de clase C^0 en U si f es continua en U.

Se dice que f es de clase C^1 en U si $\forall \bar{x} \in U$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ $1 \leq i \leq n$ y las funciones $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas.

Se dice que f es de clase C^2 si $\forall \bar{x} \in U$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ y las funciones $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son de clase C^1 en U.

En general, se dice que f es de clase C^r en U si $\forall \bar{x} \in U$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})$ y las funciones $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son de clase C^{r-1}

f es de clase C^∞ en U si f es de clase C^r $\forall r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Ejercicios:

(i) Demuestra que f es de clase C^∞

(a) $f(x) = e^x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la cual es de clase C^0 ya que es continua

veamos que f es de clase C^1.

Como $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists f'(x)$ y $f'(x) = e^x$ es continua $\Rightarrow$ f es de clase C^1

Sup. que f es de clase C^{r-1}, como $\exists f'(x) = e^x \wedge \ldots f^{(r-1)}(x) = e^x$ y son continuas $\Rightarrow f^r(x) = e^x$ $\exists$ y es continua en $\mathbb{R}$ $\therefore$

f es de clase C^r $\forall r \in \mathbb{N}$ $\therefore$ f es de clase C^∞.

(b) $f(x) = \ln(x)$. $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$

Tenemos que f es de clase C^0 pues f es continua.
Veamos que f es de clase C^1

- Como $\forall x \in (0,\infty)$ $\exists$ $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ $\Rightarrow$ $f'(x)$ es continua
$\therefore$ f es de clase C^1

- Sup que f es de clase C^{r-1}

Como $f'(x) = x^{-1}$
$f''(x) = (-1)x^{-2}$
$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)x^{-3}$
$\vdots$
$f^{(r-1)}(x) = (r-2)!\,(-1)^{r-2}\,x^{-(r-1)}$

$\Rightarrow$ $f^{r}(x) = (r-1)!\,(-1)^{r-1}\,x^{-r}$ la cual $\exists \forall x \in (0,\infty)$ y es continua
$\therefore$ f es de clase C^r $\forall r \in \mathbb{N}$ $\therefore$ f es de clase C^∞

(c) $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Tenemos que f es de clase C^0 pues es continua

- Como $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists$ $f'(x) = \cos(x)$ y es continua $\Rightarrow$ f es de clase C^1

- Sup. que f es de clase C^{r-1}

Como $f^{(1)}(x) = \cos(x)$
$f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen}(x)$
$f^{(3)}(x) = -\cos(x)$
$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen}(x)$
$\vdots$

$$f^{(r-1)}(x) = \begin{cases} \cos(x) & (r-1) \equiv 1 \pmod 4 \\ -\operatorname{sen}(x) & (r-1) \equiv 2 \pmod 4 \\ -\cos(x) & (r-1) \equiv 3 \pmod 4 \\ \operatorname{sen}(x) & (r-1) \equiv 4 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{r}(x) = \begin{cases} \cos(x) & r \equiv 1 \pmod 4 \\ -\operatorname{sen}(x) & r \equiv 2 \pmod 4 \\ -\cos(x) & r \equiv 3 \pmod 4 \\ \operatorname{sen}(x) & r \equiv 4 \pmod 4 \end{cases}$$ la cual es continua $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f es de clase C^r $\forall r \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ f es de clase C^∞

(4) $\Pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $1 \le i \le n$ t.q. $\Pi_i(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) = x_i$

- son continuas $\Rightarrow$ son de clase C^0

- Veamos que es de clase C^1

$\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\exists \frac{\partial \Pi_i}{\partial x_j}(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ y son continuas, $\Rightarrow$ Π_i es de clase C^1

- Suponga que Π_i $1 \le i \le n$ es de clase C^{r-1}

como $\frac{\partial \Pi_i}{\partial x_j}(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$, $\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x_k \partial x_j}(\bar{x}) = 0$, $\frac{\partial^3 \Pi_i}{\partial x_s \partial x_k \partial x_j}(\bar{x}) = 0, \dots, \frac{\partial^{(r-1)} \Pi_i}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_{(r-1)}}}(\bar{x}) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial^r \Pi_i}{\partial x_{j_1} \cdots \partial j_r}(\bar{x}) = 0$ las cuales $\exists$ y son continuas $\therefore$ Π_i es de clase C^r $\forall r \in \mathbb{N}$ $\therefore$ Π_i es de clase C^∞ $\forall 1 \le i \le n$.

Teorema: Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función. Si f es de clase C^r en $U \Rightarrow f$ es de clase C^{r-1}

Dem: Por inducción sobre r

- Sup. que f es de clase $C^1 \Rightarrow \forall \bar{x} \in U$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ y son continuas $\Rightarrow f$ es diferenciable en U. $\Rightarrow f$ es continua $\therefore$ f es de clase C^0

- Sup. que el teorema se cumple para las funciones de clase C^{r-1}

Como f es de clase C^r en $U \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ $1 \le i \le n$ y $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son de clase C^{r-1}, Así por H.I $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $1 \le i \le n$ y $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son de clase C^{r-2}

$\therefore$ f es de clase C^{r-1} ∎

Teorema: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función. Si f es de clase C^r en $U \Rightarrow f$ es diferenciable

Dem: por inducción sobre r.

- Sup. que f es de clase $C^1 \Rightarrow f$ es diferenciable

- Sup. que el teorema es cierto para las funciones de clase C^{r-1}

Como f es de clase C^r en $U \Rightarrow f$ es de clase C^{r-1} (teorema anterior)

$\Rightarrow$ por H.I f es diferenciable

Teorema: Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones.
Si f y g son de clase C^r $\Rightarrow$ $f+g, f \cdot g : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y
$\frac{f}{g} : \{\bar{x} \in U \mid g(\bar{x}) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ son de clase C^r.

Dem: por inducción sobre r.

• Sup. que f y g son de clase C^1 $\Rightarrow$ $\forall \bar{x} \in U$ $\exists$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}), \frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x})$ $1 \leq i \leq n$
y $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas.

Además $\frac{\partial}{\partial x_i}(f+g)(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x})$, $\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x_i}(\bar{x}) = f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x}) + g(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$

$\wedge$ $\frac{\partial \frac{f}{g}}{\partial x_i}(\bar{x}) = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, g(x) - \frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x})\, f(x)}{[g(\bar{x})]^2}$

Además como f y g son de clase C^1 $\Rightarrow$ f y g son continuas
$\Rightarrow$ $\frac{\partial (f+g)}{\partial x_i}(\bar{x})$, $\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x_i}(\bar{x})$ $\wedge$ $\frac{\partial (\frac{f}{g})}{\partial x_i}(\bar{x})$ son continuas

$\Rightarrow$ $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ son de clase C^1 ✓

• Sup. que el teorema se cumple para f y g de clase C^{r-1}

Como f y g son de clase C^r $\Rightarrow$ $\forall \bar{x} \in U$ $\exists$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$, $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x})$ y
$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son de clase C^{r-1}, y como f y g son de clase C^r $\Rightarrow$ f y g son de clase C^{r-1}

Entonces por HI, suma, producto y cociente de funciones de clase C^{r-1} es de clase C^{r-1}

$\Rightarrow$ $\frac{\partial (f+g)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial (\frac{f}{g})}{\partial x_i}$ son de clase C^{r-1}

$\Rightarrow$ $\underline{f+g, \ f \cdot g, \ \frac{f}{g} \text{ son de clase } C^r}$ ∎

Teorema: Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función.
Entonces f es de clase C^r $\Leftrightarrow$ para cada $\alpha \leq r$ y
cada $\{i_1, \dots, i_\alpha\} \subset \{1, \dots, n\}$ $\exists$ $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\alpha}}$ y son continuas en U.

Dem: por inducción sobre r.

• f es de clase C^1 en U $\Leftrightarrow$ $\forall \bar{x} \in U$ $\exists$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ $1 \leq i \leq n$ y las
funciones $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas

$\Leftrightarrow$ para cada $\alpha = i$ y para cada $\{i\} \subset \{1, \dots, n\}$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}$ y son continuas en U.

- Sup. que el teorema es cierto para las funciones de clase C^{r-1}

f es de clase $C^r \Leftrightarrow \forall \bar{x} \in U$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ $1 \leq i \leq n$ y $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son de clase C^{r-1} $\Leftrightarrow$ $\forall \bar{x} \in U$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$, $1 \leq i \leq n$, y por H.I. para cada $\beta \leq r-1$ y cada $\{j_1, \dots, j_\beta\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $\exists$

$\exists \frac{\partial^\beta}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_\beta}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ y son continuas en U $\Leftrightarrow$ para cada $\alpha \leq r$. y cada $\{i_1, \dots, i_\alpha\} \subset \{1, \dots, n\}$ $\exists \frac{\partial^\alpha f}{\partial_{i_1} \dots \partial_{i_\alpha}}$.

Gradiente y superficies regulares

Def.- Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y $\bar{c} \in U$ t.q. $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c})$ $1 \leq i \leq n$, se define el vector gradiente de f en $\bar{c}$ como:

$$\nabla f(\bar{c}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{c}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{c}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{c}) \right)$$

Ejercicio.-

Calcula $\nabla f(\bar{c})$

- $f(x,y) = e^{x^2-2y}$, $\bar{c} = (1,1)$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x e^{x^2-2y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2 \cdot e^{-1}$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2 e^{x^2-2y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -2 \cdot e^{-1}$

$\Rightarrow \nabla f(1,1) = (2 \cdot e^{-1}, -2 \cdot e^{-1})$

- $f(x,y) = xz - yz$; $\bar{c} = (-1, 2, 3)$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = z \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(-1,2,3) = 3$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -z \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2,3) = -3$

- $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y) = x - y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(-1,2,3) = -3$

$\Rightarrow \nabla f(-1,2,3) = (3, -3, -3)$

Teorema: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, $\bar{c} \in U$ y $v \in \mathbb{R}^n - \{\bar{0}\}$ un vector. Si f es diferenciable $\Rightarrow$

$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{c})$ y $\frac{\partial f}{\partial v}(c) = \langle \nabla f(\bar{c}), v \rangle$

Dem: Como f es diferenciable en $\bar{c}$ $\exists \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{c})$ y $\frac{\partial f}{\partial v}(c) = Df(c)(v)$

$= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = \langle Df(c), v \rangle$

Def: Sean $u, w \in \mathbb{R}^n - \{\bar{0}\}$

i) Se define la <u>dirección del vector</u> u como el unitario $v = \frac{1}{\|u\|} u$

ii) Se dice que u y w tienen la misma dirección si $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+$ t.q. $u = \lambda w$

iii) u y w tienen direcciones opuestas si $\exists \lambda \in \mathbb{R}^-$ t.q. $u = \lambda w$

~~Teo~~.

Veamos la primera propiedad importante del gradiente.

Teorema: Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable y $\bar{c} \in U$ t.q. $\nabla f(\bar{c}) \neq \bar{0}$. Si $h: S^{n-1} \cancel{\subset \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$ está dada por $h(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{c})$ entonces:

1) El valor máximo de h está dado por la norma del gradiente, esto es: $\max\{\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{c}) \mid \|v\| = 1\} = \|\nabla f(\bar{c})\|$ y además h alcanza este valor máximo cuando v tiene la dirección del vector $\nabla f(\bar{c})$

2) El valor mínimo de h está dado por: $\min\{\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{c}) \mid \|v\| = 1\} = -\|\nabla f(\bar{c})\|$ y además h alcanza este valor cuando v tiene la dirección opuesta a la de $\nabla f(\bar{c})$

Dem: Note que h es continua ya que h es la restricción de la transformación lineal $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \langle \nabla f(\bar{c}), v \rangle$

Como S^{n-1} y $h(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{c}) = \langle \nabla f(c), v \rangle = \|v\| \, \|\nabla f(\bar{c})\| \cos\theta$
donde $0 \leq \theta \leq \pi$ es el ángulo entre $\nabla f(\bar{c})$ y v.

Así, h alcanza su valor máximo cuando $\theta = 0$ y su valor mínimo en $\theta = \pi$

Luego el valor máximo de h es $\|\nabla f(\bar{c})\|$ y lo alcanza en $\theta = 0$ es decir que v tiene la misma dirección que el gradiente

Hiperespacios Regulares

Def.- Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una hipersuperficie regular de dimensión n ó n-hiperespacio regular si $\exists\, U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, abierto, $f: U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 t.q $S = \{\bar{x} \in U \mid f(\bar{x}) = 0\}$ y $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ $\forall \bar{x} \in S$.

Ejercicios: Demuestra que $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una superficie regular en el $\mathbb{R}^{n+1}$ correspondiente.

(1) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3\}$
Sol.-
Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t.q $f(x,y) = y - x^3$ la cual es de clase C^1,
$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ y $\nabla f(x,y) = (-3x^2, 1) \neq \bar{0}$ $\forall (x,y) \in S$
$\therefore$ S es 1-superficie regular.

(2) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$
Sol.-
Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ t.q $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$ la cual es de clase C^1,
$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\}$ y $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) \neq \bar{0}$ $\forall (x,y,z) \in S$
$\therefore$ S es una 2-hipersuperficie regular.

(3) $S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid w - x^2 - y^2 - z^2 = 0\}$
Sol.-
Sea $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ t.q $f(x,y,z,w) = w - x^2 - y^2 - z^2$ la cual es de clase C^1
, $S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x,y,z,w) = 0\}$ y $\nabla f(x,y,z,w) = (-2x, -2y, -2z, 1) \neq \bar{0}$ $\forall (x,y,z,w) \in S$ $\therefore$ S es 3-hipersuperficie regular.

(4) Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f: V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Demuestra que $Gr(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una n-hipersuperficie regular.

Dem.- Sea $U = V \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ el cual es abierto y $F: (V \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ t.q $F(\bar{x}, x_{n+1}) = x_{n+1} - f(\bar{x})$ la cual es de clase C^1,
$Gr(f) = \{(\bar{x}, x_{n+1}) \in V \times \mathbb{R} \mid F(\bar{x}, x_{n+1}) = 0\}$
$= \{(\bar{x}, x_{n+1}) \in V \times \mathbb{R} \mid \bar{x} \in V\}$ y $\nabla F(\bar{x}, x_{n+1}) = (-\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \ldots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}), 1) \neq \bar{0}$
$\forall (\bar{x}, x_{n+1}) \in Gr(f)$ $\therefore$ $Gr(f)$ es una n-superficie regular.

Def.- Sea $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una n-hipersuperficie regular, $\bar{c} \in S$ y $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ un vector. Se dice que "v" es un vector tangente a S en el punto c si $\exists\, \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ curva de clase C^1 t.q $\alpha(0) = \bar{c}$ y $\alpha'(0) = v$ y $\alpha(t) \in S$ $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Se define el Espacio tangente a S en el punto c

Como: $T_{\bar c}S = \{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid v$ es vector tangente a S en el punto $\bar c \}$

Un vector $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ es un vector normal a S en el punto $\bar c$ si $\langle u ; v \rangle = 0 \quad \forall v \in T_{\bar c}S$

Teorema (Regla de la cadena caso sencillo): Sea $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ abierto, $f: V \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ diferenciable. Si $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ es una curva diferenciable t.q. $\alpha(t) \in V \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow (f \circ \alpha): (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ es diferenciable y ~~$D_{(f\circ\alpha)}(t) = D_{f(\alpha(t))}(\alpha'(t))$~~

$$D_{(f\circ\alpha)}(t) = D_{f(\alpha(t))}(\alpha'(t))$$

La 2da propiedad del vector gradiente está dada en el siguiente teorema

Teorema: Sea $S = \{ \bar x \in V \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid f(\bar x) = 0 \}$ una n-hipersuperficie regular y $\bar c \in S \Rightarrow \nabla f(\bar c)$ es un vector normal a S en el punto $\bar c$.

Dem: Sea $T_{\bar c}S$ el espacio tangente a S en el punto $\bar c$ y $v \in T_{\bar c}S$ P.D] $\langle \nabla f(\bar c) ; v \rangle = 0$

Como $v \in T_{\bar c}S \Rightarrow \exists$ una curva de clase C^2 $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ t.q. $\alpha'(0) = v$ y $\alpha(t) \in S \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Así, se tiene que $(f\circ\alpha)(t) = 0 \Rightarrow$ por el teorema de regla de la cadena se tiene que $D_{(f\circ\alpha)}(0) = 0 = D_{f(\alpha(0))}(\alpha'(0))$
$= D_{f(\bar c)}(v) = \langle \nabla f(\bar c) ; v \rangle$ ∎

Def: Sea $S = \{ \bar x \in V \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid f(\bar x) = 0 \}$ una n-hipersuperficie regular y $\bar c \in S$. Se define la ecuación del hiperplano tangente a S en el punto $\bar c$ como:

$$\langle \nabla f(\bar c) ; \bar x - \bar c \rangle = 0$$

Ejercicio:

1) Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie regular $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \}$ en el punto $(0, 0, 1)$

Sol: Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ t.q. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$

$\Rightarrow \nabla f(0, 0, 1) = (0, 0, 2) \Rightarrow$ la ecuación del plano tangente a S en $(0, 0, 1)$ está dada por

$\langle \nabla f(0, 0, 1) ; (x-0, y-0, z-1) \rangle = 0 \Rightarrow \langle (0, 0, 2) ; (x, y, z) \rangle = 0 \Rightarrow 2z - 2 = 0$

=) $z = 1$

Funciones diferenciables de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Def.- Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función, $\bar{c} \in \text{Int}(A)$ y $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$. Se define la 'derivada parcial' de f en $\bar{c}$ respecto a la i-ésima variable como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{c} + te_i) - f(\bar{c})}{t}$$

siempre que el límite exista.

Note que: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{c} + te_i) - f(\bar{c})}{t}$ existe $\Leftrightarrow$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f_j(\bar{c} + te_i) - f_j(\bar{c})}{t} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{c}) \quad 1 \leq j \leq m \quad \text{existe}$$

Así $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\bar{c}), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\bar{c}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\bar{c}) \right)$

Ejercicios: calcula las sig. derivadas parciales de f

(1) $f(x,y) = (e^{xy}, xy^2, \ln(x+y))$, $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y > 0\} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) \right)$

$$= \left(ye^{xy}, y^2, \frac{1}{x+y} \right)$$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(xe^{xy}, 2xy, \frac{1}{x+y} \right)$

(2) $f(x,y,z) = (xz - y^2 z, z\sin^{-1}(x+y))$, $f : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x+y| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \left(z, z\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} \right)$ $\exists$ en $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x+y| < 1\}$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \left(-2y^2 z, z\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} \right)$

- $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \left(x - y^2, \sin^{-1}(x+y) \right)$ $\exists$ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x+y| \leq 1\}$

Escaneado con CamScanner

Def: Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función, $\bar{c} \in \text{int}(A)$ y $v \in \mathbb{R}^n$ un vector. Se define la <u>derivada parcial</u> de f en $\bar{c}$ <u>respecto al vector v</u> como:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar c) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar c + tv) - f(\bar c)}{t}, \quad \text{siempre que exista.}$$

Note que:

(1) $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar c) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar c + tv) - f(\bar c)}{t}$ existe $\iff$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_j(\bar c + tv) - f(\bar c)}{t} = \frac{\partial f_j}{\partial v}(\bar c) \text{ existe } 1 \le j \le m$$

Así $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar c) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(\bar c), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial v}(\bar c)\right)$

(2) $\frac{\partial f}{\partial e_i}(\bar c) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar c)$

(3) Si $\|v\| = 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(\bar c)$ es la <u>derivada direccional</u> de f en c respecto al <u>vector de dirección</u> v.

Ejercicios:

(1) Sea $f(x,y,z) = (2xy - z, \sqrt{z-x-y})$, $\bar c = (1,-1,3)$ y $v = (-1,1,2)$.

Calcula $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar c)$. $\quad f: \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z-x-y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(\bar c) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(\bar c), \frac{\partial f_2}{\partial v}(\bar c)\right)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial v}(\bar c) = \lim_{t\to 0} \frac{f_1(\bar c + tv) - f_1(\bar c)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((1,-1,3) + t(-1,1,2)) - f(1,-1,3)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f_1(1-t, -1+t, 3+2t) - f_1(1,-1,3)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2(1-t)(-1+t) - (3+2t) - (-5)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-2+4t-2t^2-3-2t+5}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-2t^2+2t}{t} = 2.$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial v}(\bar c) = \lim_{t\to 0} \frac{f_2(1-t, -1+t, 3+2t) - f_2(1,-1,3)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{3+2t-1+t+1-t} - \sqrt{3}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{3+2t}-\sqrt{3}}{t} \cdot \frac{\sqrt{3+2t}+\sqrt{3}}{\sqrt{3+2t}+\sqrt{3}}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(3+2t)-3}{t(\sqrt{3+2t}+\sqrt{3})} = \lim_{t\to 0} \frac{2}{\sqrt{3+2t}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{c}) = \left(2, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial f_1}{\partial v}(\bar{c}) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(\bar{c})\cdot v_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y}(\bar{c})\cdot v_2 + \frac{\partial f_1}{\partial z}(\bar{c})\cdot v_3}$$

$$\boxed{\frac{\partial f_2}{\partial v}(\bar{c}) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(\bar{c})\cdot v_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y}(\bar{c})\cdot v_2 + \frac{\partial f_2}{\partial z}(\bar{c})\cdot v_3}$$

Def: Sean $f, g: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funciones y $c \in int(A)$. Se dice que g es tangente a f en el punto c si:

$$\lim_{x\to c} \frac{\| f(x) - g(x)\|}{\|x - c\|} = 0$$

Ejercicio: Demuestra que $g(x,y) = (-2x-1, x+y+1)$ es tangente a $f(x,y) = (x^2, yx)$ en el punto $c = (-1,1)$

P.D $\lim_{\bar{x}\to\bar{c}} \frac{\| f(\bar{x}) - g(\bar{x})\|}{\|\bar{x} - c\|} = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{\|(x^2, yx) - (-2x-1, x+y+1)\|}{\|(x,y)-(-1,1)\|} = \lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{\|(x^2+2x+1, yx-x+y+1)\|}{\|(x+1, y-1)\|}$$

$$\leq \lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{|x^2+2x+1| + |yx-x+y-1|}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}} = \lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(x+1)^2}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}} + \lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{|(x+1)(y-1)|}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}}$$

$= 0 + 0 = 0.$

Teorema: Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función y $c \in int(A)$. Si $\exists T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ t.q $g_T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $g_T(x) = f(c) + T(x-c)$ es tangente a f en $c \Rightarrow T$ es único

Dem: Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ t.q g_{T_1}, g_{T_2} son tangentes a f en el punto c. P.D $T_1 = T_2$

Como $c \in int(A) \Rightarrow \exists B_\delta(c) \subset \mathbb{R}^n$ t.q $B_\delta(c) \subset A$. Sea $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ t.q $\|v\| = 1$ y $\bar{x} = c + \lambda v \Rightarrow \|\bar{x} - c\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| = |\lambda| < \delta$

$|\lambda| < \delta$

2) $\bar{x} \in B_\delta(c) \Rightarrow \bar{x} \in A$. Por otro lado

$$0 \leq \| T(v) - T_1(v) \| = \| T\left(\frac{x-c}{\lambda}\right) - T_1\left(\frac{x-c}{\lambda}\right) \| = \| \frac{1}{\lambda} T(x-c) - \frac{1}{\lambda} T_1(x-c) \|$$

$$= \frac{\| T(x-c) - T_1(x-c) \|}{|\lambda|} = \frac{\| T(x-c) - T_1(x-c) \|}{\| x-c \|}$$

$$= \frac{\| f(x) - f(c) - T_1(x-c) - (f(x) - f(c) - T(x-c)) \|}{\| x-c \|}$$

$$\leq \frac{\| f(x) - g_{T_1}(x) \|}{\| x-c \|} + \frac{\| f(x) - g_T(x) \|}{\| x-c \|}$$

Tomando el límite en la desigualdad anterior cuando $x \to c$ se tiene que $\| T(v) - T_1(v) \| = 0 \Rightarrow T(v) = T_1(v)$

Sea $u \in \mathbb{R}^n - \{\bar{0}\} \Rightarrow v = \frac{u}{\|u\|}$ es unitario $\Rightarrow$ por lo anterior $T(v) = T_1(v) \Rightarrow T\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = T_1\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \Rightarrow T(u) = T_1(u)$

$T = T_1$.

Def: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función y $c \in \text{Int}(A)$. Se dice que f es diferenciable en el punto c si $\exists T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ t.q. $g_T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $g_T(x) = f(c) + T(x-c)$ es tangente a f en el punto "c", es decir, es

$$\lim_{x \to c} \frac{\| f(x) - f(c) - T(x-c) \|}{\| x-c \|} = 0$$

En este caso, por el teorema anterior T es única y se llama la derivada de f en el punto c y se denota como $Df(c) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Notes: que si f es diferenciable en c es

$$\lim_{h \to \bar{0}} \frac{\| f(x+h) - f(c) - Df(c)(h) \|}{\|h\|} = 0$$

Ejercicios

1) Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal. Demuestra que T es diferenciable en cada punto $c \in \mathbb{R}^n$.

Dem: Como $T(c+h) - T(c) = T(c) + T(h) - T(c) = T(h)$

Así: $DT(c): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ está dada por $DT(c)(h) = T(h)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|T(c+h)-T(c)-D_{T(c)}(h)\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|0\|}{\|h\|} = 0.$$

(2) Sea $ev: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ t.q. $ev(T,v) = T(v)$. Demuestra que ev es diferenciable en cada punto $(T,v)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\times\mathbb{R}^m$

Dem: $ev[(T,v)+(h,k)] - ev[(T,v)] = ev(T+h, v+k) - ev(T,v)$

bilineal

$= ev(T+h, v) + ev(T+h, k) - ev(T,v) = ev(T,v) + ev(h,v) + ev(T,k) + ev(h,k) - ev(T,v)$

$= ev(h,v) + ev(T,k) + ev(h,k)$

Sea $D_{ev(T,v)}: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ dada por $D_{ev(T,v)}(h,k) = ev(T,k) + ev(h,v)$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\|ev[(T,v)+(h,k)] - ev[(T,v)] - D_{ev(T,v)}(h,k)\|}{\|(h,k)\|}$$

$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\|ev(h,k)\|}{\|(h,k)\|}$ como ev es bilineal $\exists M>0$ t.q. $\|ev(h,k)\|\leq M\|h\|\|k\|$ y $\|h\|\leq\|(h,k)\|$, si $h\neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\|(h,k)\|} \leq \frac{1}{\|h\|} \Rightarrow \frac{\|ev(h,k)\|}{\|(h,k)\|} \leq \frac{\|ev(h,k)\|}{\|h\|}$

~~$h\neq 0$~~

$\Rightarrow \leq \frac{M\|h\|\|k\|}{\|h\|}$

$\Rightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\|ev(h,k)\|}{\|(h,k)\|} \leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{M\|h\|\|k\|}{\|h\|} = 0.$

Teorema: Sea $f: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una función y $c\in\operatorname{int}(A)$. Entonces f es diferenciable en c $\Leftrightarrow$ $f_j: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $1\leq j\leq m$ son diferenciables en $\bar{c}$. En este caso $D_{f(\bar{c})}: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es la dada por
$D_{f(\bar{c})}(v) = (D_{f_1(\bar{c})}(v), D_{f_2(\bar{c})}(v), \dots, D_{f_m(\bar{c})}(v))$

Dem: f es diferenciable en c $\Leftrightarrow$ $\lim_{h\to 0} \frac{\|f(c+h)-f(c)-D_{f(c)}(h)\|}{\|h\|} = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\|f_j(c+h)-f_j(c)-D_{f_j(c)}(h)\|}{\|h\|} = 0$ $1\leq j\leq m$ $\Leftrightarrow$ $f_j: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\bar{c}$.

Teorema: Sea $f: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $g: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ funciones y $h: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p$ t.q. $h(\bar{x}) = (f(\bar{x}), g(\bar{x}))$, $c\in\operatorname{int}(A)$ $\Rightarrow$ h es diferenciable en $\bar{c}$ $\Leftrightarrow$ f y g son diferenciables en $\bar{c}$. En este caso $D_{h(c)}(v) = (D_{f(c)}(v), D_{g(c)}(v))$

Dem: Usaremos $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}: \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ t.q. $\|(\bar{x},\bar{y})\|_{\mathbb{R}^{m+p}} = \max\{\|\bar{x}\|, \|\bar{y}\|$

h es diferenciable en $\bar{c}$ $\iff$ $\lim_{k\to 0} \frac{\| h(c+k) - h(c) - D_{h(c)}(k)\|}{\|k\|} = 0$

$\iff \lim_{k\to 0} \frac{\| (f(c+k), g(c+k)) - (f(c), g(c)) - (D_{f(c)}(k), D_{g(c)}(k))\|}{\|k\|} = 0$

$\iff \lim_{k\to 0} \frac{\| (f(c+k) - f(c), g(c+k) - g(c)) - (D_{f(c)}(k), D_{g(c)}(k))\|}{\|k\|} = 0$

$\iff \lim_{k\to 0} \frac{\| f(c+k) - f(c) - D_{f(c)}(k)\|}{\|k\|} = 0$ y $\lim_{k\to 0} \frac{\| g(c+k) - g(c) - D_{g(c)}(k)\|}{\|k\|} = 0$

$\iff f$ es diferenciable en $\bar{c}$ y g es diferenciable en $\bar{c}$.

Teorema: Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f: V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función. Si f es diferenciable en $\bar{c} \in V \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ y $M > 0$ t.q. si $x \in V$ y $\|x - c\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(c)\| \leq M \|x - c\|$. En particular f es continua en $\bar{c}$.

Dem: Sea $\varepsilon_0 = 1$. Como f es diferenciable en $c \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ t.q. si $x \in V$ $0 < \|x - c\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(c) - D_{f(c)}(x - c)\| \leq \|x - c\|$

$\Rightarrow \|f(x) - f(c)\| - \|D_{f(c)}(x - c)\| \leq \|f(x) - f(c) - D_{f(c)}(x - c)\| \leq \|x - c\|$

$\Rightarrow \|f(x) - f(c)\| \leq \|x - c\| + \|D_{f(c)}(x - c)\|$.

Ahora como $D_{f(c)} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \Rightarrow \exists\, K > 0$ t.q. $\|D_{f(c)}(u)\| \leq K \|u\|$ $\forall u \in \mathbb{R}^n$. Luego si $x \in V$ y $\|x - c\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(c)\| \leq \|x - c\| + K\|x - c\| = (K+1)\|x - c\|$

sea $\varepsilon > 0$.

Veamos que f es continua en c. Por la primera parte de la demostración $\exists\, \delta > 0$ t.q. si $x \in V$ y $\|x - c\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(c)\| < M\|x - c\|$ tomando $\eta = \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{M}\}$ se tiene que si $x \in V$ y $\|x - c\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(c)\| < \varepsilon$.

Teorema: Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abto, $f: V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función, $c \in V$ y $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Si f es diferenciable en $c \Rightarrow \exists\, \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{c})$ y $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{c}) = D_{f(c)}(v)$

Dem: Sea $\varepsilon > 0$ P.D. $\exists\, \delta > 0$ t.q. si $0 < |t| < \delta \Rightarrow \| \frac{f(c + tv) - f(c)}{t} - D_{f(c)}(v)\| <$

Como $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\|v\|} > 0$ y f es diferenciable en $c \Rightarrow \exists\, \delta_0$ t.q. si $0 < \|h\| < \delta_0 \Rightarrow \|f(c + h) - f(c) - D_{f(c)}(h)\| < \frac{\varepsilon}{\|v\|}\|h\|$

tomando $\delta = \frac{\delta_0}{\|v\|} > 0$ se tiene que si $0 < |t| < \delta$ pues $0 < |t| < \frac{\delta_0}{\|v\|} \Rightarrow$
$0 < \|tv\| < \delta_0 \Rightarrow \|f(c+tv) - f(c) - Df(c)(tv)\| < \frac{\varepsilon}{\|v\|}\|tv\|$
$\Rightarrow \left\| \frac{f(c+tv) - f(c)}{t} - Df(c)(v) \right\| < \varepsilon_0$

Corolario: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función y $c \in U$. Si f es diferenciable en $\bar{c}$ $\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c})$ $1 \le i \le n$ y $Df(c): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ está dado por $Df(c)(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c})$

Dem: Tomando $v = e_i$, $1 \le i \le n$, por el teorema anterior $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$ y $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = Df(c)(e_i)$.

Dado $v \in \mathbb{R}^n$ es $Df(c)(v) = Df(c)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i Df(c)(e_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c})$.

Teorema: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abto. $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función y $c \in U$. Si f es diferenciable en c $\Rightarrow$ la matriz de $Df(c): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ respecto a las bases $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ y $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\} \subset \mathbb{R}^m$ está dada por:

$$Jf(c) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{c}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{c}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{c}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{c}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{c}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(c) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{c}) \end{bmatrix}$$

Dem:

$$Df(c)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\bar{c}), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\bar{c}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\bar{c}) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{c})\, \bar{e}_j \quad \therefore \quad Jf(c) = \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(c) \right] \begin{matrix} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m \end{matrix}$$

Teorema: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abto., $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\bar{c} \in U$. Si $\forall \bar{x} \in U$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ $1 \le i \le n$ y las funciones $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son continuas en $\bar{c}$ $\Rightarrow$ f es diferenciable en $\bar{c}$. Además $Df(c): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ está dada por $Df(c)(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c})$

Dem: por hip. $\forall \bar{x} \in U$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ y $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $1 \le i \le n$ son continuas en $\bar{c}$.
Así $\forall \bar{x} \in U$ y $1 \le j \le m$ $\exists \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{x})$ $\forall\, 1 \le i \le n$ y $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $1 \le i \le n$ son continuas en $\bar{c}$.

Así por teorema $f_j: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\bar{c}$ y $Df_j(c): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ está dada por $Df_j(c)(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{c})$

$\therefore$ $Df(c): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ está dada por

$D_{f(c)}(u) = (D_{f_1(c)}(u), D_{f_2(c)}(u), \dots, D_{f_m(c)}(u))$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\bar{c}), \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\bar{c}), \dots, \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\bar{c}) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{c})$$

Derivada de la composición: Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos y $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g: V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ funciones t.q. $f(U) \subseteq V$.
Si f es diferenciable en $\bar{c}$ y g es diferenciable en $f(c)$
$\Rightarrow$ $(g \circ f): U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en $\bar{c}$ y $D(g\circ f)(c): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ está dada por $D_{(g\circ f)(c)}(u) = (D_{g(f(c))} \circ D_{f(c)})(u)$

Dem: Sea $\varepsilon > 0$ P.D. $\exists \delta > 0$ t.q. si $x \in U$ y $0 < \|x - c\| < \delta$

$\Rightarrow \| (g\circ f)(x) - (g \circ f)(c) - D_{g(f(c))}(D_{f(c)}(x-c)) \| < \varepsilon \|x - c\|$

Tenemos $\|(g\circ f)(x) - (g\circ f)(c) - D_{g(f(c))}(D_{f(c)}(x-c))\|$

$= \| g(f(x)) - g(f(c)) - D_{g(f(c))}(f(x) - f(c)) + D_{g(f(c))}(f(x) - f(c)) - D_{g(f(c))}(D_{f(c)}(x-c)) \|$
lineal
$\leq \| g(f(x)) - g(f(c)) - D_{g(f(c))}(f(x) - f(c)) \| + \| D_{g(f(c))}[f(x) - f(c) - D_{f(c)}(x-c)] \|$

Como f es diferenciable en $\bar{c}$, $\exists M > 0$ y $\delta_1 > 0$ t.q. si $x \in U$ y $\|x - c\| < \delta_1$ $\Rightarrow$ $\|f(x) - f(c)\| \leq M \|x - c\|$

Por otra parte como $D_{g(f(c))}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es lineal $\exists K > 0$ t.q. $\|D_{g(f(c))}(w)\| \leq K\|w\|$. Como f es diferenciable en c y $\frac{\varepsilon}{2K} > 0$
$\Rightarrow$ $\exists \delta_2 > 0$ t.q. si $x \in U$ y $0 < \|x - c\| < \delta_2$ $\Rightarrow$ $\|f(x) - f(c) - D_{f(c)}(x-c)\| < \frac{\varepsilon}{2K}\|x - c\|$

Ahora, como g es diferenciable en $f(c)$ y $\frac{\varepsilon}{2M} > 0$ $\Rightarrow$ $\exists \delta_3 > 0$ t.q. si $y \in V$ y $0 \leq \|y - f(c)\| < \delta_3$ $\Rightarrow$ $\|g(y) - g(f(c)) - D_{g(f(c))}(y - f(c))\| < \frac{\varepsilon}{2M}\|y - f(c)\|$.

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \frac{\delta_3}{M}, \delta_2\}$ se tiene que si $x \in U$ y $0 < \|x - c\| < \delta \Rightarrow$
$\|f(x) - f(c)\| < M\|x - c\| < M \frac{\delta_3}{M} = \delta_3$

$\Rightarrow$ $< \frac{\varepsilon}{2M}\|f(x) - f(c)\| + K\|f(x) - f(c) - D_{f(c)}(x-c)\| < \frac{\varepsilon}{2M} M\|x - c\| + K\frac{\varepsilon}{2K}\|x - c\|$
$= \varepsilon \|x - c\|$ ■

Regla de la cadena: Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos, $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g: V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(U) \subset V$. Si f es diferenciable en c y g es diferenciable en $f(c)$ $\Rightarrow$ $(g \circ f): U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en c y

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(c) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(c) \cdot \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(c))$$

Dem: Como f es diferenciable en c y g es diferenciable en $f(c)$ $\Rightarrow$ por el teo. anterior, $(g \circ f): U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en c y $D(g \circ f)(c)(h) = D g(f(c))(Df(c)(h))$

Así, si $1 \le i \le n$, $\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(c) = D_{(g \circ f)(c)}(e_i) = D_{g(f(c))}(Df(c)(e_i))$

$= D_{g(f(c))}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)\right) = D_{g(f(c))}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(c), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(c), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(c)\right)$

$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(c) \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(c))$

Ejercicios:

(1) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Demuestre que $F(x,y) = f(f(x,y), x^2 y)$ es diferenciable y calcule $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$.

Dem: Sea $\underline{\ell: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \ell(x,y) = (f(x,y), x^2 y)}$ la cual es diferenciable y como $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable $\Rightarrow$ $(f \circ \ell)(x,y) = f(f(x,y), x^2 y)$ es diferenciable.

$DF(x,y) = Df(\ell(x,y)) \circ D\ell(x,y)$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\ell(x,y)) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\ell(x,y))\right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ 2xy & x^2 \end{bmatrix} \text{ (matrices)}$$

$$= \Big[\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(\ell(x,y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2xy \frac{\partial f}{\partial y}(\ell(x,y))}_{\frac{\partial F}{\partial x}} \quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(\ell(x,y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + x^2 \frac{\partial f}{\partial y}(\ell(x,y))}_{\frac{\partial F}{\partial y}}\Big]$$ (matriz 1x2)

(2) Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ diferenciable. Demuestre que $F(x,y,z) = (f(xe^y, yz, x), f(x,y,z))$ es diferenciable y calcule $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)$

Dem: Sea $\ell: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.q. $\ell(x,y,z) = (xe^y, yz, x)$ la cual es diferenciable, $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.q. $h(x,y,z) = (x,y,z)$ la cual es diferenciable $\Rightarrow F_1 = (f \circ \ell)(x,y,z) = f(xe^y, yz, x)$ y $F_2 = (f \circ h)(x,y,z) = f(x,y,z)$ son diferenciables $\Rightarrow$ $F(x,y,z)$ VTQ es diferenciable.

$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z))$

Escaneado con CamScanner

$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z), \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) \right)$

$f_1 = f(xe^y, yz, x)$

$f_2 = g(x,y,z)$.

$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = \left[y\frac{\partial f_1}{\partial z}(h(x,y,z)), y\frac{\partial f_2}{\partial z}(h(x,y,z)), \frac{\partial f_1}{\partial z}(h(x,y,z)), \frac{\partial f_2}{\partial z}(h(x,y,z)) \right)$

Corolario: Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f: U\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g: U\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ funciones. Sea $h: U\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ t.q. $h(x) = (f(x), g(x))$ y $\phi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ bilineal. Si f, g son diferenciables en c, $(\phi\circ h): U\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en c y $D_{(\phi\circ h)(c)}(u) = \phi(f(c), D_{g(c)}(u)) + \phi(D_{f(c)}(u), g(c))$

Dem: como f y g son diferenciables en "c" $\Rightarrow$ h es dif. en c.
Ahora como ϕ y h son diferenciables $\Rightarrow$ $\phi\circ h: U\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

Además como $D_{\phi(x,y)}(x,y) = \phi(a,y) + \phi(x,b)$

$\Rightarrow D_{(\phi\circ h)(c)}(u) = D_{\phi(h(c))}(D_{h(c)}(u)) = D_{\phi(f(c),g(c))}(D_{f(c)}(u), D_{g(c)}(u))$

$= \phi(f(c), D_{g(c)}(u)) + \phi(D_{f(c)}(u), g(c))$.

Ejercicios:

(1) Sea $inv: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}-\{0\}$ t.q. $inv(x) = \frac{1}{x}$. Demuestra que inv es diferenciable y determina $D_{inv(a)}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, con $a \in \mathbb{R}-\{0\}$

Dem: Veremos que $D_{inv(a)}(x) = -\frac{x}{a^2}$

Teorema:

(1) Sean $s, m: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q. $s(x,y) = x+y$, $m(x,y) = x\cdot y$ $\Rightarrow$ s y m son diferenciables y $D_{s(a,b)}: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $D_{s(a,b)}(x,y) = x+y$
$D_{m(a,b)}: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $D_{m(a,b)}(x,y) = ax+by$

(2) Sea $q: \mathbb{R}\times(\mathbb{R}-\{0\}) \to \mathbb{R}$ t.q. $q(x,y) = \frac{x}{y}$ $\Rightarrow$ q es diferenciable y $D_{q(a,b)}: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $D_{q(a,b)}(x,y) = \frac{bx-ay}{b^2}$

Dem: Veamos que s es lineal y que m es bilineal

• $s[\lambda(x_1,y_1)+(x_2,y_2)] = s(\lambda x_1+x_2, \lambda y_1+y_2) = \lambda x_1+x_2+\lambda y_1+y_2 = \lambda s(x_1,y_1)+s(x_2,y_2)$

∴ $D_{s(a,b)}(x,y) = s(x,y) = x+y$

• $m(\lambda x_1+x_2, y) = (\lambda x_1+x_2)\cdot y = \lambda x_1 y + x_2 y = \lambda m(x_1,y)+m(x_2,y)$

$m(x, \lambda y_1+y_2) = x(\lambda y_1+y_2) = \lambda x y_1 + x y_2 = \lambda m(x,y_1)+m(x,y_2)$

∴ $D_{m(a,b)}(x,y) = m(a,y)+m(x,b) = ay+xb$

(2) Sea $inv: \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ t.q. $inv(y)=\frac{1}{y}$ la cual es diferenciable y $D_{inv(b)}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $D_{inv(b)}(y) = -\frac{y}{b^2}$

Sea $h: \mathbb{R}\times(\mathbb{R}-\{0\}) \to \mathbb{R}\times(\mathbb{R}-\{0\})$ t.q. $h(x,y)=(x,\frac{1}{y})$ la cual es diferenciable y $D_{h(a,b)}: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ está dada por $D_{h(a,b)}(x,y) = (x, -\frac{y}{b^2})$

Ahora, como $m: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es diferenciable y h es diferenciable ⇒ $(m\circ h): \mathbb{R}\times(\mathbb{R}-\{0\})\to\mathbb{R}$ t.q. $(m\circ h)(x,y) = m(x,\frac{1}{y}) = \frac{x}{y} = q(x,y)$ es diferenciable, y $D_{q(a,b)}: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ está dada por

$D_{q(a,b)}(x,y) = D_{m(h(a,b))}(D_{h(a,b)}(x,y)) = D_{m(a,\frac{1}{b})}(x, -\frac{y}{b^2})$

$= x\frac{1}{b} - \frac{ay}{b^2} = \frac{xb}{b^2} - \frac{ay}{b^2} = \frac{xb-ay}{b^2}$

Teorema: Sean $U\subset\mathbb{R}^n$ abierto y $f,g: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ funciones diferenciables y $c\in U$ ⇒

(1) $(f+g): U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es diferenciable en c y $D_{(f+g)(c)} = D_{f(c)} + D_{g(c)}$

(2) $(f\cdot g): U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es diferenciable en c y $D_{(f\cdot g)(c)} = f(c)D_{g(c)} + g(c)D_{f(c)}$

(3) Si $g(c)\neq 0$ ⇒ $\frac{f}{g}: \{x\in U \mid g(x)\neq 0\}\to\mathbb{R}$ es diferenciable en c

y $D_{(\frac{f}{g})(c)} = \frac{g(c)D_{f(c)} - f(c)D_{g(c)}}{[g(c)]^2}$

Dem:

(1) Sea $h: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ t.q. $h(x) = (f(x), g(x))$ la cual es diferenciable y sea $s: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ t.q. $s(x,y) = x+y$ la cual es diferenciable

⇒ $(s\circ h)(x) = s(h(x)) = s(f(x),g(x)) = \underbrace{f(x)+h(x)}_{=(f+g)(x)}$ es diferenciable

y $D_{(f+g)(c)}(u) = D_{(s\circ h)(c)}(u) = D_{s(h(c))}(D_{h(c)}(u)) = D_{s(f(c),g(c))}(D_{f(c)}(u), D_{g(c)}(u))$

$= D_{f(c)}(u) + D_{g(c)}(u)$

(2) ... $s(x,y) = xy$ ... $(m\circ h)(x) = f(x)\cdot g(x)$ diferenciable ...

y $D_{(f\cdot g)(x)}(u) = D_{(m\circ h)(x)}(u) = D_m(h(x))(Dh(x)(u))$

$= D_m(f(x), g(x))(Df(x)(u), Dg(x)(u)) = g(x)\,Df(x)(u) + f(x)\,Dg(x)(u)$

(4) Sea $h: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ t.q. $\underline{h(x) = (f(x), g(x))}$ la cual es diferenciable y sea $q: \mathbb{R}\times(\mathbb{R}-\{0\}) \to \mathbb{R}$ t.q. $q(x,y) = \frac{x}{y}$ la cual es diferenciable $\Rightarrow (q\circ h)(x) = q(f(x), g(x)) = \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es diferenciable y

$D_{\left(\frac{f}{g}\right)(x)}(u) = D_{(q\circ h)(x)}(u) = D_{q(h(x))}(Dh(x)(u)) = D_{q(f(x),g(x))}(Df(x)(u), Dg(x)(u))$

$= \dfrac{g(x)\,Df(x)(u) - f(x)\,Dg(x)(u)}{[g(x)]^2}$

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en cada punto $\bar{x} \in U$ entonces se tiene una función $Df: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ t.q. $x \to Df(x)$
$\Rightarrow D^2f := D(Df): U \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ (si es que Df es diferenciable)
y si D^2f es diferenciable $\Rightarrow$
$D^3f := D(D^2(f)): U \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, (\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))))$

Def: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ y $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función. Se dice que $\underline{f \text{ es de clase } C^1}$ en U si $\forall x \in U$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ $1 \le i \le n$ y las funciones $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son continuas.

Teorema: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función. Entonces $\underline{f \text{ es de clase } C^1}$ $\Leftrightarrow$ f es diferenciable en U y $Df: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es continua.

Falta apuntes de 1 día

Escaneado con CamScanner

Teorema.- Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abto y $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función. Si f es de clase $C^r \Rightarrow f$ es de clase C^{r-1}

Dem.- Como f es de clase $C^r \Rightarrow$ por el teorema anterior $f_j: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $1 \leq j \leq m$ es de clase $C^r \Rightarrow$ por teorema demostrado $f_j: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $1 \leq j \leq m$ es de clase $C^{r-1} \Rightarrow f$ es de clase C^{r}

Corolario.- Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abto y $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función. Si f es de clase $C^r \Rightarrow f$ es diferenciable.

Dem.- Como f es de clase $C^1 \Rightarrow f_j: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $1 \leq j \leq m$ es de clase $C^r \Rightarrow$ por teorema demostrado $f_j: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $1 \leq j \leq m$ es diferenciable $\Rightarrow f$ es diferenciable.

Teorema.- Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g: V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funciones t.q. $f(U) \subset V$. Si f es de clase C^r en U y g es de clase C^r en $V \Rightarrow (g \circ f): U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^r

Dim.- Por inducción sobre r.

$g \circ f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- Si f, g son de clase $C^1 \Rightarrow f, g$ son diferenciables $\Rightarrow (g \circ f)$ es diferenciable y $\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(\bar{x})) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{x}) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial y_j} \circ f\right)(\bar{x})$ $\forall \bar{x} \in U$, $1 \leq i \leq n$

Por otra parte como f, g son de clase $C^1 \Rightarrow \forall \bar{x} \in U$, $\forall y \in V$ $\exists \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{x})$ $\frac{\partial g}{\partial y_j}(y)$ $1 \leq j \leq m$ y son continuas, además f es continua

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial y_j} \circ f\right)(\bar{x})$ es continua (composición, producto y suma de continuas) $\Rightarrow \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}$ son continuas $\Rightarrow g \circ f$ es de clase C^1.

- Sup. que el teorema se cumple para funciones de clase C^{r-1}

- Si f, g son de clase C^r ...

Ahora como f, g son de clase $C^r \Rightarrow \forall x \in U$, $\forall y \in V$ $\exists \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$, $\frac{\partial g}{\partial y_j}(y)$ y las funciones $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\frac{\partial g}{\partial y_j}: V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ son de clase C^{r-1}, además f es de clase C^{r-1}

Ahora como f es de clase C^{r-1} y $\frac{\partial g}{\partial y_j}$ es de clase $C^{r-1} \Rightarrow$ por H.I $\frac{\partial g}{\partial y_j} \circ f$ es de clase C^{r-1} y como producto y suma de funciones C^{r-1} es $C^{r-1} \Rightarrow \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $1 \leq i \leq n$ es de clase $C^{r-1} \Rightarrow$ $g \circ f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^r

Teorema del valor medio: Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abto, $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in U$ t.q $[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \subseteq U$.
Si f es continua en $[\bar{x}_0, \bar{x}_1]$ (segmento) y diferenciable en $(\bar{x}_0, \bar{x}_1)$
$\Rightarrow \exists\, \bar{c} \in (\bar{x}_0, \bar{x}_1)$ t.q $f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_0) = D_{f(\bar{c})}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)$

Dem: Sea $\phi: [0,1] \to \mathbb{R}$ t.q $\phi(t) = f((1-t)\bar{x}_0 + t\bar{x}_1)$ la cual es continua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1)$ ya que f es continua en $[\bar{x}_0, \bar{x}_1]$ y diferenciable en $(\bar{x}_0, \bar{x}_1)$, entonces por el T.V.M de cálculo I, se tiene que $\exists s \in (0,1)$ t.q $\phi(1) - \phi(0) = \phi'(s)$
$\Rightarrow f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_0) = D_{f(\underbrace{(1-s)\bar{x}_0 + s\bar{x}_1}_{\bar{c}})}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)$

Teorema: (Desigualdad del valor medio). Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función y $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in U$ t.q $[\bar{x}_0, \bar{x}_1] \subseteq U$. Si f es continua en $[\bar{x}_0, \bar{x}_1]$ y diferenciable en $(\bar{x}_0, \bar{x}_1)$ $\Rightarrow \exists\, \bar{c} \in (\bar{x}_0, \bar{x}_1)$ t.q
$\| f(x_1) - f(x_0) \| \leq \| D_{f(c)}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \|$. Además si $\exists M > 0$ t.q $\| D_{f(x)} \| \leq M$ $\forall \bar{x} \in [\bar{x}_0, \bar{x}_1] \Rightarrow \| f(x_1) - f(x_0) \| \leq M \| x_1 - x_0 \|$

Dem: Sea $y_0 = f(x_1) - f(x_0)$. Si $y_0 = \bar{0}$, se tiene que
$\| f(x_1) - f(x_0) \| = \| 0 \| = 0 \leq \| D_{f(x)}(x_1 - x_0) \|$ $\forall x \in (\bar{x}_0, \bar{x}_1)$

Sup que $y_0 \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\|y_0\|} y_0$ es unitario. Sea $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.q $F(x) = \langle f(x), y_0 \rangle$ la cual es continua en $[\bar{x}_0, \bar{x}_1]$ y diferenciable en $(\bar{x}_0, \bar{x}_1) \Rightarrow$ por el teo. anterior $\exists\, c \in (\bar{x}_0, \bar{x}_1)$ t.q
$F(x_1) - F(x_0) = D_{F(c)}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \Rightarrow \langle f(x_1), y_0 \rangle - \langle f(x_0), y_0 \rangle$
$= \langle f(x_1) - f(x_0), y_0 \rangle = \langle f(x_1) - f(x_0), \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\| f(x_1) - f(x_0) \|} \rangle = \frac{\| f(x_1) - f(x_0) \|^2}{\| f(x_1) - f(x_0) \|}$

Cauchy-Schwarz

$= \| f(x_1) - f(x_0) \| = \langle D_{f(c)}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0), y_0 \rangle \leq \| D_{f(c)}(\bar{x}_1 - x_0) \| \, \underbrace{\| y_0 \|}_{1}$

$\Rightarrow \| f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_0) \| \leq \| D_{f(c)}(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \|$

Además si $\exists M > 0$ t.q $\| D_{f(x)} \| \leq M$ $\forall x \in [\bar{x}_0, \bar{x}_1] \Rightarrow \| f(x_1) - f(x_0) \| \leq \| D_{f(c)}(x_1 - x_0) \|$
$\leq \| D_{f(c)} \| \, \| x_1 - x_0 \| \leq M \| \bar{x}_1 - \bar{x}_0 \|$ ■

Teorema de la función inversa y la función implícita

Def.- Sean $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abto y $f: U \to V$ una función. Se dice que f es un Difeomorfismo si f es biyectiva y f, f^{-1} son diferenciables. Si además f, f^{-1} son de clase C^r $\Rightarrow$ se dice que f es un Difeomorfismo de clase C^r.

En este caso se dice que U y V son Difeomorfos.

Ejercicio.-

- Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo. Demuestra que T es Difeomorfismo de clase C^∞.

Dem.- Como T y T^{-1} son lineales $\Rightarrow$ T, T^{-1} son de clase C^∞ $\therefore$ es un Difeomorfismo de clase C^∞ (pues T es biyectiva por ser isomorfo)

- Sea $f: B(0,1) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ t.q. $f(\bar{x}) = \dfrac{\bar{x}}{\sqrt{1-\|x\|^2}}$. Demuestra que f es un Difeomorfismo de clase C^∞

Dem.- $f(x_1, \dots, x_n) = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt{1-\|x\|^2}}, \dfrac{x_2}{\sqrt{1-\|x\|^2}}, \dots, \dfrac{x_n}{\sqrt{1-\|x\|^2}}\right)$ $\Rightarrow$ f es de clase C^∞

y $f^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt{1+\|x\|^2}}, \dots, \dfrac{x_n}{\sqrt{1+\|x\|^2}}\right)$ la cual es de clase C^∞.

- Sean $U, V, W \subset \mathbb{R}^n$ abtos. Si $f: U \to V$ y $g: V \to W$ son isomorfismos $\Rightarrow$ $(g \circ f): U \to W$ es un isomorfismo.

- Sea $c \in \mathbb{R}^n$ un punto. Demuestra que $\tau_c: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $\tau_c(\bar{x}) = \bar{x} + c$ es un difeomorfismo de clase C^∞.
Además, para $a, b \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\tau_{-a} = \tau_a^{-1}$ y $\tau_{a+b} = \tau_b \circ \tau_a$

Def.- Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abto. y $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función. Se dice que f es un difeomorfismo local si $\forall x \in U$ $\exists$ vecindades abiertas $V \subset U$, $W \subset \mathbb{R}^n$ de x y $f(x)$ respectivamente t.q. $f: V \to W$ es un difeomorfismo.

Ejercicios

- Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función. Demuestra que si f es un difeomorfismo local $\Rightarrow$ $\forall x \in U$ $Df(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo

Dem- Sea $x \in V$, como f es un difeo local $\Rightarrow \exists$ vecindades abiertas $V \subset V$, $W \subset \mathbb{R}^n$ de x y $f(x)$ respectivamente t.q. $f: V \to W$ es un difeomorfismo.

Así f es biyectiva y f, f^{-1} son diferenciables.

Luego $(f^{-1} \circ f)(y) = y$ $\forall y \in V$ y $(f \circ f^{-1})(z) = z$ $\forall z \in W$

Entonces $D(f^{-1} \circ f)(y) = I$ y $D(f \circ f^{-1})(z) = I$

$\Rightarrow Df^{-1}(f(y)) \circ Df(y) = I$ y $Df(f^{-1}(z)) \circ Df^{-1}(z) = I$

~~y como la derivada es una transformación lineal es $(Df(x))$ es biyectiva~~

En particular para $y = x$ se tiene que $Df(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo, luego invertible $(Df^{-1}(f(x))): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

• Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ abto y $f: V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función. Demuestra que si f es un difeo local y $A \subset V$ es abto $\Rightarrow$ $f(A)$ es abto en $\mathbb{R}^n$.

Dem- Sea $z \in f(A)$ P.D. $\exists B \subset \mathbb{R}^n$ abto t.q. $z \in B \subset f(A)$

Como $z \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A$ t.q. $f(x) = z$, dado que f es un difeomorfismo $\exists$ vecindades abiertas $V \subset V$, $W \subset \mathbb{R}^n$ de x y $f(x) = z$ t.q. $f: V \to W$ es un difeo, en particular $f^{-1}: W \to V$ es continua.

Como $A \cap V$ es abierto en $V \Rightarrow (f^{-1})^{-1}(A \cap V) = f(A \cap V)$ es una vecindad abierta de z, t.q. $f(A \cap V) \subset f(A)$ ■

• Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ abto y $f: V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función. Demuestra que si f es un difeo local e inyectiva $\Rightarrow$ $f: V \to f(V)$ es un difeomorfismo.

Dem- Claramente es supra $\Rightarrow$ es biyectiva y es diferenciable pues $f: V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lo es.

Como f es un difeo local y V es abto en $\mathbb{R}^n \Rightarrow f(V)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.
P.D. $f^{-1}: f(V) \to V$ es diferenciable

Sea $z \in f(V) \Rightarrow \exists x \in V$ t.q. $f(x) = z$
Como f es un difeo local $\exists$ vecindades abiertas $V \subset V$ y $W \subset \mathbb{R}^n$ de x y z respectivamente t.q. $f: V \to W$ es un difeo.

Así $f^{-1}: W \to V$ es diferenciable, en particular es diferenciable en $z = f(x)$.

Def: Sea $f: A \subset (M,d) \to (N,\delta)$ una función. Se dice que f es una contracción si $\exists \lambda \in (0,1)$ t.q. $\delta(f(x), f(y)) \leq \lambda\, d(x,y)$ $\forall x,y \in A$.

Teorema: Si $f: A \subset (M,d) \to (N,\delta)$ es una contracción $\Rightarrow$ f es continua.

Ejercicio

- Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y convexo. Si $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable y $\exists\, 0 < \lambda < 1$ t.q. $\|Df(x)\| \leq \lambda$ $\forall x \in U$ $\Rightarrow$ f es una contracción.

Def: Sea $f: A \subset (M,d) \to (M,d)$ y $\bar{x}_0 \in A$. Se dice que $\bar{x}_0$ es un <u>punto fijo de f</u> si $f(\bar{x}_0) = \bar{x}_0$.

Falta apuntes de 1 clase

Lema 1.- Si $A \in GL(n) \Rightarrow \exists r>0$ t.q $\forall H \in B_{\frac{r}{2}}(\bar{0}) \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ se tiene que $A+H \in GL(n)$ y $\|(A+H)^{-1}\| < \frac{2}{r}$

Dem.- Como $GL(n)$ es abierto y $A \in GL(n) \Rightarrow \exists B_\delta(A)$ en $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ t.q $B_\delta(A) \subset GL(n)$.

Sea $r < \min\{\delta, \frac{1}{\|A^{-1}\|}\}$ y $H \in B_{\frac{r}{2}}(\bar{0}) \Rightarrow \|A+H - A\| = \|H\| < \frac{r}{2} < \delta$

$\Rightarrow A+H \in B_\delta(A) \subset GL(n)$.

Veamos que si $H \in B_{\frac{r}{2}}(\bar{0}) \Rightarrow \|(A+H)^{-1}\| < \frac{2}{r}$. Como $\|x\| = \|(A^{-1} \circ A)(x)\|$
$\leq \|A^{-1}\| \|A(x)\| \Rightarrow r\|x\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}\|x\| \leq \|A(x)\| \Rightarrow r\|x\| < \|A(x)\|$

Por otra parte $\|(A+H)(x)\| \geq \|A(x)\| - \|H(x)\| > r\|x\| - \|H(x)\|$
$\geq r\|x\| - \frac{r}{2}\|x\| = \frac{r}{2}\|x\|$

Así se tiene que: $\|x\| = \|(A+H)[(A+H)^{-1}(x)]\| > \frac{r}{2}\|(A+H)^{-1}(x)\|$

$\Rightarrow \|(A+H)^{-1}(x)\| < \frac{2}{r}\|x\| \Rightarrow \|(A+H)^{-1}(x)\| < \frac{2}{r}$.

Ejercicio.-

o Sea $\Psi: L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to L(L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ t.q
$(A, B) \to \Psi(A, B)$. Donde $\Psi_{(A,B)}(H) := -A \circ H \circ B$. Demostrar que Ψ es bilineal.

Dem.

$\Psi[\lambda A_1 + A_2, B](H) = -(\lambda A_1 + A_2) \circ H \circ B = -\lambda A_1 \circ H \circ B - A_2 \circ H \circ B$
$= \lambda(-A_1 \circ H \circ B) + (-A_2 \circ H \circ B) = \lambda \Psi(A_1, B)(H) + \Psi(A_2, B)(H)$
$= [\lambda \Psi(A_1, B) + \Psi(A_2, B)](H)$

Análogo al otro lado $\therefore$ es bilineal

Lema 2.- Sea $inv: GL(n) \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ t.q $inv(A) = A^{-1}$
$\Rightarrow inv$ es de clase C^1 y $D\,inv(A): L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ está dada por $D_{inv(A)}(H) = -A^{-1} \circ H \circ A^{-1}$

Dem.-
Como $A \in GL(n)$, por el lema 1 $\exists r>0$ t.q $\forall H \in B_{\frac{r}{2}}(\bar{0}) \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ se tiene que $A+H \in GL(n)$ y $\|(A+H)^{-1}\| < \frac{2}{r}$

Veamos que:

$$\lim_{H \to 0} \frac{\|inv(A+H) - inv(A) - (-A^{-1} \circ H \circ A^{-1})\|}{\|H\|} = 0$$

Sea $\phi(H) = (A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1} \circ H \circ A^{-1}$ c)

$(A+H) \circ \phi(H) = I - I - HA^{-1} + HA^{-1} + HA^{-1} \circ H \circ A^{-1}$
$= HA^{-1} \circ H \circ A^{-1}$

$\Rightarrow \phi(H) = (A+H)^{-1} (HA^{-1} HA^{-1})$; $\Rightarrow 0 \leq \frac{\|\phi(H)\|}{\|H\|} = \frac{\|(A+H)^{-1} (HA^{-1} HA^{-1})\|}{\|H\|}$

$\leq \frac{2}{r} \|HA^{-1} HA^{-1}\| = \frac{2}{r} \|H\|^2 \|A^{-1}\|^2$

$\Rightarrow = \lim_{H \to 0} \frac{\|\phi(H)\|}{\|H\|} = \lim_{H \to 0} \frac{2}{r} \|H\|^2 \|A^{-1}\|^2 = 0.$

$\therefore$ inv. es diferenciable

Ahora veamos que Dinv es continua

Sea $(inv, inv) : GL(n) \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ t.q.
$A \to (A^{-1}, A^{-1})$; la cual es continua pues inv es diferenciable.

Sea $\psi : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to L(L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ t.q.
$\psi(A,B)(H) := -A \circ H \circ B$ la cual es bilineal y $\therefore$ continua.

$\Rightarrow [\psi \circ (inv, inv)(A)](H) = \psi(A^{-1}, A^{-1})(H) = -A^{-1} H A^{-1} = D\,inv(A)(H)$ es continua. (composición de continuas)

$\therefore$ inv es de clase C^1.

Teorema de la función inversa.

Ejercicios:-

(1) Sea $f(x,y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$

(a) Probar que f es un difeomorfismo sobre su imagen

(b) Determina $f^{-1}: Im(f) \to \mathbb{R}^2$.

Sol: f es de clase C^1

(a) $Df(x,y) = \begin{bmatrix} e^x & e^y \\ e^x & -e^y \end{bmatrix} \Rightarrow \det(Df(x,y)) = -e^{x+y} - e^{x+y} = -2e^{x+y} \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Así por el teorema de la función inversa f es un difeomorfismo local de clase C^1 alrededor de cada punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Veamos que f es inyectiva.

Sean $(a,b),(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $f(x,y) = f(a,b) \Rightarrow$ $e^x + e^y = e^a + e^b$, $e^x - e^y = e^a - e^b$

$\Rightarrow 2e^x = 2e^a \Rightarrow e^x = e^a \Rightarrow x = a \Rightarrow y = b$

$\Rightarrow (x,y) = (a,b)$ $\therefore$ es inyectiva.

Como f es un difeo local, f es inyectiva y $\mathbb{R}^2$ es abierto $\Rightarrow f(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^2$ es abierto y $f: \mathbb{R}^2 \to f(\mathbb{R}^2)$ es un difeomorfismo de clase C^1.

(b) Determinemos $Im(f)$.

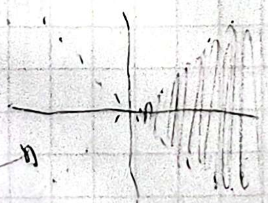
Sea $(x,y) \in f(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \exists\, a,b \in \mathbb{R}^2$ t.q. $f(a,b) = (x,y) \Rightarrow$

$x = e^a + e^b \wedge y = e^a - e^b \Rightarrow x+y = 2e^a \Rightarrow \frac{x+y}{2} = e^a \Rightarrow a = \ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$

$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\Rightarrow f^{-1}(x,y) = \left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right), \ln\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)$

$\Rightarrow f^{-1}: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y > 0 \text{ y } x-y > 0\} \to \mathbb{R}^2$



(2) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.q. $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$

(a) Determina en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ f es localmente invertible

(b) Demuestra que f no es inyectiva

(c) Prueba que f es inyectiva en $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$

(d) Demuestra que $f: U \to f(U)$ es un difeo de clase C^∞ y calcula $\frac{\partial f^{-1}}{\partial v}(1,0)$ donde $v = (-3,4)$.

Sol: f es de clase C^∞

(a) Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow Df(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix} \Rightarrow \det(Df(x,y)) = 4x^2 + 4y^2 \neq 0$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$

así, por el Teo. de la función inversa $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\exists$ vecindades abiertas $V_{(x,y)}, W_{f(x,y)}$ en $\mathbb{R}^2$ t.q. $f: V_{(x,y)} \to W_{f(x,y)}$ es un difeomorfismo de clase C^1

(b) $(1,1) \neq (-1,-1)$ y $f(1,1) = (0,2) = f(-1,-1)$ $\therefore$ f no es inyectiva

(c) Sean $(x,y), (a,b) \in V$ t.q. $f(x,y) = f(a,b) \Rightarrow \begin{matrix} x^2 - y^2 = a^2 - b^2 \\ 2xy = 2ab \end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{matrix} x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \\ 4x^2y^2 = 4a^2b^2 \end{matrix} \overset{\text{sumando}}{\Rightarrow} (x^2+y^2)^2 = (a^2+b^2)^2 \Rightarrow x^2+y^2 = a^2+b^2$

$\Rightarrow \begin{matrix} x^2 - y^2 = a^2 - b^2 \\ \wedge \ x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \end{matrix}$ (sumando) $\Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow |x| = a$ pero $x > 0 \Rightarrow x = a \Rightarrow y = b$

$\therefore$ f es inyectiva en U

(d) Como f es un difeo local de clase C^∞, $V \subset \mathbb{R}^2$ abierto y f es inyectiva en $V \Rightarrow f(V)$ es abierto y $f: V \to f(V)$ es un difeo de clase C^∞.

Por el Teo. de la función inversa: $Df^{-1}(1,0) = [Df(1,0)]^{-1}$

Sea $Df(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix} \Rightarrow Df(1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow [Df(1,0)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f^{-1}}{\partial v}(1,0) = [Df(1,0)]^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix} = \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$

(3) Dado el sistema: $\begin{cases} u = y\,\text{sen}(x) \\ v = x + y - 1 \end{cases}$, Determinar si se puede expresar x e y en función de (u,v) alrededor del punto $(0,1)$

Sol: Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.q. $f(x,y) = (y\,\text{sen}(x), x+y-1) = (u,v)$
Basta probar que f es un difeo local de clase C^1 alrededor del punto $(0,1)$, f es de clase C^1 y

$\Rightarrow Df(x,y) = \begin{bmatrix} y\cos(x) & \text{sen}(x) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Df(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$

$\therefore$ por el T.F.I $\exists$ vecindades abiertas V, W en $\mathbb{R}^2$ de $(0,1)$ y $(0,0)$ t.q. $f: V \to W$ es un difeo de clase C^1
Así $\exists f^{-1}: W \to V$. Luego $\forall (x,y) \in V$ se tiene que $(x,y) = f^{-1}(u,v)$

$(x,y) = f^{-1}(f(x,y)) = (h(u,v), g(u,v)) \Rightarrow x = h(u,v)$ y $y = g(u,v)$

Def: Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y $(a,b) \in U \times V$.
Sea $F: (U \times V) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ una función t.q. $F(a,b) = \bar{0}$. Se dice que la ecuación $F(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{0}$ define implícitamente a $\bar{y}$ en función de $\bar{x}$ alrededor del punto (a,b) si existe una vecindad abierta $W \subset U$ de $\bar{a}$, $f: W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función t.q. $f(\bar{a}) = \bar{b}$ y $F(\bar{x}, f(\bar{x})) = 0$ $\forall \bar{x} \in W$.

Ejercicio:

(1) Demuestra que la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ define implícitamente a y en función de x alrededor del punto $(0,1)$. $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Sol.- $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$.
Sea $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $f(0) = 1$ y

$F(x, f(x)) = F(x, \sqrt{1-x^2}) = x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 - 1 = x^2 + 1 - x^2 - 1 = 0.$

(2) Demuestra que la ecuación $x + e^{z-y} - 2 = 0$ define implícitamente a la variable z en función de (x,y) alrededor del punto $(1,1,1)$

Sol.- Sea $F(x,y,z) = x + e^{z-y} - 2 \Rightarrow F(1,1,1) = 0$.
Despejando z de la ecuación $x + e^{z-y} - 2 = 0$ se tiene que

$e^{z-y} = 2 - x \Rightarrow z - y = \ln(2-x) \Rightarrow z = \ln(2-x) + y$

$\Rightarrow f: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 - x > 0\} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t.q. $f(x,y) = \ln(2-x) + y$

y además $f(1,1) = 1$, y $\cancel{F(x,y,f(x,y))}$.

$F(x,y,f(x,y)) = 0$.

Ejercicios

(1) Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y $(a,b) \in U \times V$. Sea $F: (U \times V) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ una función, se definen las funciones parciales de F en el punto (a,b) como las funciones $f_b: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ y $f_a: V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ t.q.
$f_b(x) = F(x,b)$ y $f_a(y) = F(a,y)$.
Demostrar que si F es diferenciable en (a,b) $\Rightarrow$ f_b es diferenciable en a y f_a es diferenciable en b, y además
$Df_b(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ y $Df_a(b): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ están dadas por
$Df_b(a)(v) = DF(a,b)(v,0)$ y $Df_a(b)(v) = DF(a,b)(0,v)$. Estas transformaciones

llaman se llaman las derivadas parciales de F en (a,b) y se denotan como:

- $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) := Df_b(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$
- $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) := Df_a(b) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$

En este caso: $D_{F(a,b)}(u,v) = D_{F(a,b)}(u,0) + D_{F(a,b)}(0,v) = \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)(u) + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)(v)$

Así $DF(a,b) = \left[\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right]_{p\times(m+n)}$

Dem.- Sea $h_b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y $h_a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ t.q. $h_b(x) = (x,b)$ y $h_a(y) = (a,y)$ las cuales son diferenciables.

Ahora como $h_b(a) = (a,b)$, $h_a(b) = (a,b) \in U\times V \Rightarrow W_1 = h_b^{-1}(U\times V) \subset \mathbb{R}^n$
$W_2 = h_a^{-1}(U\times V) \subset \mathbb{R}^m$ son abiertos, y $(F\circ h_b)(x) = F(x,b) = f_b(x)$
y $(F\circ h_a)(y) = F(a,y) = f_a(y)$ $\Rightarrow$ se tiene que f_a y f_b son diferenciables.
y $Df_b(a)(u) = D_{(F\circ h_b)(a)}(u) = D_{F(h_b(a))}(Dh_b(a)(u)) = D_{F(a,b)}(u,0)$
y $Df_a(b)(v) = D_{(F\circ h_a)(b)}(v) = D_{F(h_a(b))}(Dh_a(b)(v)) = D_{F(a,b)}(0,v)$

Así $D_{F(a,b)}(u,v) = D_{F(a,b)}(u,0) + D_{F(a,b)}(0,v) = \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)(u) + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)(v)$ ■

Teorema de la Función Implícita: Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y $(a,b) \in U\times V$.
Si $F : U\times V \subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es de clase C^1_g, $F(a,b) = \bar{0}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \in GL(m)$
$\Rightarrow$ $\exists$ vecindades abiertas $W \subset U$, $V_1 \subset V$ de a y b respectivamente y
$f : W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de clase C^1 t.q. $f(a) = b$ y $\forall x \in W$ $F(x, f(x)) = 0$ y
$f(x) \in V_1$.

Dem.- Sea $H : (U\times V) \subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ t.q. $H(x,y) = (x, F(x,y))$ la cual es de clase C^1 (pues x lo es y $F(x,y)$ lo es), $H(a,b) = (a, F(a,b)) = (a,0)$
y $D_{H(a,b)} : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ está dada por $D_{H(a,b)}(u,v) = (u, D_{F(a,b)}(u,v))$
$= (u, \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)(u) + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)(v))$ la cual es un isomorfismo ya que
$\ker D_{H(a,b)} = \{(0,0)\}$.

En efecto, si $(0,0) = D_{H(a,b)}(u,v) \Rightarrow (0,0) = (u, \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)(u) + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)(v))$
$\Rightarrow u = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)(u) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)(v) = 0$ $\Rightarrow v = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)(v)\right)$
$= \left[\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right]^{-1}(0) = 0$.

Así $D_{H(a,b)} \in GL(n+m)$ $\Rightarrow$ por el Teo. de la F. Inversa $\exists$ $U_1 \subset U$ ($\subset \mathbb{R}^n$), $V_1 \subset V$ vecindades abiertas de a, b respectivamente t.q. $H : U_1\times V_1 \to H(U_1\times V_1)$ es un difeo de clase C^1

$\Rightarrow$ tiene inversa. Sea $H^{-1}: H(V_1 \times V_1) \to V_1 \times V_1$ t.q.
$H^{-1}(x,y) = (\phi_1(x,y), \phi_2(x,y))$.

Así $(x,y) = (H \circ H^{-1})(x,y) \Rightarrow (x,y) = H(H^{-1}(x,y)) = H(\phi_1(x,y), \phi_2(x,y))$.
$\Rightarrow (x,y) = (\phi_1(x,y), F(\phi_1(x,y), \phi_2(x,y))) \Rightarrow \phi_1(x,y) = x$
$\Rightarrow h^{-1}(x,y) = (x, \phi_2(x,y))$.

Sea $W = \{x \in U_1 \mid (x,0) \in h(V_1 \times V_1)\}$ la cual es una vecindad abierta de a. En efecto, sea $\ell: U_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ t.q. $\ell(x) = (x,0)$ la cual es de clase C^1, en particular continua, entonces
$\ell^{-1}(H(U_1 \times V_1)) = \{x \in U \mid \ell(x) = (x,0) \in H(U_1 \times V_1)\} = W$ es abierto.

Sea $f: W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ t.q. $f(x) = (\phi_2 \circ \ell_{|W})(x) = \phi_2(\ell_{|W}(x)) = \phi_2(x,0)$ la cual es de clase C^1 y $F(x, f(x)) = 0 \ \forall x \in W$ ya que

$(x,0) = (H \circ H^{-1})(x,0) = H(H^{-1}(x,0)) = H(x, \phi_2(x,0)) = (x, F(x, \phi_2(x,0)))$

$\Rightarrow (x,0) = (x, F(x, \phi_2(x,0)))$, así $F(x, \phi_2(x,0)) = 0$
$\Rightarrow F(x, f(x)) = F(x, \phi_2(x,0)) = 0 \quad \forall x \in W$.

Por último veamos que $f(a) = b$, en efecto:

$(a,b) = (H^{-1} \circ H)(a,b) = H^{-1}(H(a,b)) = H^{-1}(a, 0) = (a, \phi_2(a,0))$

$\Rightarrow (a,b) = (a, \phi_2(a,0)) \Rightarrow b = \phi_2(a,0) \Rightarrow f(a) = b$.

Ejercicios.- ~~Para~~ ~~$\mathbb{R}^n$~~

o) Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y $(a,b) \in U \times V$. Demuestra que si $F: (U \times V) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es de clase C^1 y $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \in GL(m)$
$\Rightarrow \exists\, D \subset U \times V$ vecindad ~~abierta~~ de (a,b) t.q. $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \in GL(m)$
$\forall (x,y) \in D$

Dem.- Sea $\Psi: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, donde $\Psi(T)(v) := T(0,v)$

Veamos primero que $\Psi(T)$ está bien definida, esto es que $\Psi(T): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es lineal. En efecto:

$\Psi(T)(\lambda v_1 + v_2) = T(0, \lambda v_1 + v_2) = \lambda T(0, v_1) + T(0, v_2) = \lambda \Psi(T)(v_1) + \Psi(T)(v_2)$

Ahora veamos que Ψ es lineal, en efecto:

$\Psi(\lambda T_1 + T_2)(v) = (\lambda T_1 + T_2)(0,v) = \lambda T_1(0,v) + T_2(0,v) = \lambda \Psi(T_1)(v) + \Psi(T_2)(v)$
$= [\lambda \Psi(T_1) + \Psi(T_2)](v)$

$\therefore$ $\Psi(\lambda T_1 + T_2)(v) = [\lambda \Psi(T_1) + \Psi(T_2)](v)$ $\therefore$ es lineal $\therefore$ es continua

Por otra parte como F es de clase $C^1 \Rightarrow$ $D_F : (U \times V) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ es continua. Entonces la siguiente composición es continua:

$$\begin{tikzcd}
(U \times V) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \arrow[r, "D_F"] \arrow[dr, "\Psi \circ D_F"'] & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \arrow[d, "\Psi"] \\
& \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \supset GL(m)
\end{tikzcd}$$

Y como $GL(m) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ es abierto $\Rightarrow$ $(\Psi \circ D_F)^{-1}[GL(m)] = \{(x,y) \in U \times V \mid (\Psi \circ D_F)(x,y) \in GL(m)\}$

Pero $(\Psi \circ D_F)(x,y)(v) = \Psi(D_F(x,y))(v) = D_{F(x,y)}(0,v) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)(v)$

$\Rightarrow (\Psi \circ D_F)^{-1}(GL(m)) = \{(x,y) \in U \times V \mid \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \in GL(m)\}$ $\blacksquare$

Borrador:

c) Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y $(a,b) \in U \times V$. Sea $F : (U \times V) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Suponga que F cumple las hipótesis del teorema de la función implícita así, $\exists W \subset U$ vecindad abierta de a y $f : W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de clase C^1 t.q. $f(a) = b$ y $F(x, f(x)) = 0$ $\forall x \in W$.
Demuestra que $Df(x)(u) = -\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right]^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))(u)\right)$

Dem - Sea $G : W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ t.q. $G(x) = (x, f(x))$ $\Rightarrow$ $(F \circ G)(x) = F(x, f(x)) = 0$

$\Rightarrow 0 = D(F \circ G)(x)(u) = D_{F(G(x))}(D_{G(x)}(u)) = D_{F(x, f(x))}(u, Df(x)(u))$

$= \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))(u) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))(Df(x)(u))$ $\Rightarrow$ despejando

$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))(Df(x)(u)) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))(u)$ $\Rightarrow$ $Df(x)(u) = -\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right]^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))(u)\right)$

Teorema de la Función Implícita (V.2) Sean

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y $(a,b) \in U \times V$. Si $F_j : (U \times V) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $\forall 1 \le j \le m$ son de clase C^1, $F_j(a,b) = 0$ y

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(a,b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(a,b) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a,b) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b) & \frac{\partial F_m}{\partial y_2}(a,b) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a,b) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{(Determinante)}$$

Entonces las ecuaciones $F_j(\bar{x}, y_1, \dots, y_j, \dots, y_m) = 0$ $1 \le j \le m$ definen implícitamente funciones $f_j : W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1 t.q.

vecindad abierta de a t.q $f_j(a)=b_j$ ∀ j (m)

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = -\frac{\dfrac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_{j-1},x_i,y_{j+1},\dots,y_m)}(x,f(x))}{\dfrac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}(x,f(x))}$$

Dem: Sea $F:(U\times V)\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ t.q $F(\bar{x},\bar{y})=(F_1(x,y),\dots,F_m(x,y))$ la cual es de clase C^1, $F(a,b)=\bar{0}$ es decir $F_j(a,b)=0$ ∀j, y $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\in GL(m)$, ya que $\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}(a,b)=\det\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$.

Podemos suponer s.p.g que $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\neq 0$ $\forall(x,y)\in U\times V$.

Así por el T.F. Implícita $\exists\, W\subset U$ vecindad abierta de a, $f: W\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ de clase C^1 t.q $f(a)=b$ y $F(x,f(x))=0$ $\forall x\in W$.
Luego, las ecuaciones $F_j(\bar{x},y_1,\dots,y_j,\dots,y_m)=0$ definen implícitamente funciones $f_j: W\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $1\le j\le m$ de clase C^1 t.q $f_j(a)=b_j$ y
$F(x,f_1(x),\dots,f_m(x))=\bar{0}$

Veamos que $\forall \bar{x}\in W$ $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)=-\frac{\quad}{\quad}$

Sea $G: W\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ t.q $G(x)=(x,f(x))$ la cual es diferenciable y $(F\circ G)(x)=\bar{0}$. Así, para cada $1\le j\le m$ se tiene que $(F_j\circ G)(x)=0$
$\Rightarrow$ por regla de la cadena

$$0=\frac{\partial(F_j\circ G)}{\partial x_i}(x)=\sum_{k=1}^{n+m}\frac{\partial G_k}{\partial x_i}(x)\cdot\frac{\partial F_j}{\partial z_k}(G(x))$$

$$=\frac{\partial F_j}{\partial z_1}(G(x))\overset{0}{\frac{\partial G_1}{\partial x_i}}(x)+\dots+\frac{\partial F_j}{\partial z_i}(G(x))\frac{\partial z_i}{\partial x_i}(x)+\dots+\frac{\partial F_j}{\partial z_n}(G(x))\frac{\partial G_n}{\partial x_i}(x)$$

$$+\frac{\partial F_j}{\partial z_{n+1}}(G(x))\frac{\partial G_{n+1}}{\partial x_i}(x)+\dots+\frac{\partial F_j}{\partial z_{n+m}}(G(x))\frac{\partial G_{n+m}}{\partial x_i}(x)$$

$$\Rightarrow 0=\frac{\partial F_j}{\partial z_i}(G(x))+\frac{\partial F_j}{\partial z_{n+1}}(G(x))\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x)+\dots+\frac{\partial F_j}{\partial z_{n+m}}(G(x))\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x)\qquad\forall\, 1\le j\le m$$

Así se obtiene el sistema de ecuaciones (con $(\overset{x_1}{z_1},\dots,\overset{x_n}{z_n},\overset{y_1}{z_{n+1}},\dots,\overset{y_m}{z_{n+m}})$)

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(G(x))\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x)+\dots+\frac{\partial F_1}{\partial y_j}(G(x))\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)+\dots+\frac{\partial F_1}{\partial y_m}(G(x))\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x)=-\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(G(x))$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_1}(G(x))\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x)+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial y_j}(G(x))\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}(G(x))\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x)=-\frac{\partial F_m}{\partial x_i}(G(x))$$

el cual es un sistema de $m\times m$ ecuaciones con las incógnitas
$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ $1\le j\le m$

$\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}(x,f(x)) \neq 0$

En el cual el determinante del sistema es
entonces por la regla de Cramer se tiene que

$$\Rightarrow \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_{j-1},x_i,y_{j+1},\dots,y_m)}(x,f(x))}{\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}(x,f(x))}$$

Ejercicios:

(1) Demuestra que la ecuación $\sin^{-1}(xy)+5y^3+4x = 5$ define implícitamente a y en función de x alrededor de $(0,1)$

Sol.- Sea $F(x,y) = \sin^{-1}(xy)+5y^3+4x-5$ t.q. $F:\underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |xy|\le 1\}}_{A}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$\Rightarrow F(0,1)=\sin^{-1}(0)+5-5=0$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}}+4$$

F es de clase C^1 en A

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}}+15y^2$$

Entonces de: $\left(\frac{\partial(F_1,F_2,\dots,F_m)}{\partial(y_1,y_2,\dots,y_m)}(x,y)\neq 0\right)$ se tiene que

$\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)\neq 0$ lo cual es cierto pues $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)=15\neq 0$

$\therefore$ Por el T.F. Implícita $\exists\, V\subset\mathbb{R}$ vecindad abierta de $0\in\mathbb{R}$ y $f: V\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $f(0)=1$, y

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}$$

(2) Demuestra que la ecuación $e^{xy-yz}+3x^2y-5xz=-1$ define implícitamente a x en función de (y,z) ~~alrededor~~ esto es $x=f(y,z)$ alrededor del punto $(1,1,1)$ y calcula $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$

donde $y\in(-5,3)$

Sol: Sea $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ t.q. $F(x,y,z)=e^{xy-yz}+3x^2y-5xz+1$, la cual es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^3$.

{cual quiero despejar?: "x"} entonces

$\Rightarrow \cdot\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = y e^{xy-yz}+6xy-5z$ $\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1)=1+6-5=2\neq 0$

$\cdot\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = (y-z)e^{xy-yz}+3x^2$ y

$\cdot\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = -y e^{xy-yz}-5x$

$\Rightarrow$ Por el T.F. Implícita $\exists W \subset \mathbb{R}^2$ vecindad abierta de $(1,1)$ y $f: W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 t.q. $f(1,1) = 1$. Además

- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1,1)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1,1)} = -\dfrac{3}{2}$

- $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1,1)} = 3$

$\Rightarrow$ • $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1) = \cancel{\dots}$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cdot(-5) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(3) = (-5)\left(-\frac{3}{2}\right) + (7)(3)$$

(3) Demostrar que el sistema:

$$\begin{cases} \ln(xu) + 3y^2 v = 6 \\ u^2 y - 5x v^3 = -41 \end{cases}$$

Define implícitamente a x y v en función de (y,u) alrededor del punto $(1,-1,1,2)$. Además, determinar si la función $G(y,u) = (x(y,u), v(y,u))$ es un difeomorfismo, alrededor del punto $(-1,1)$.

Sol: Sean $F_1, F_2 : \{(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4 \mid xu > 0\} \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ t.q.

$F_1(x,y,u,v) = \ln(xu) + 3y^2 v - 6 \;\wedge\; F_2(x,y,u,v) = u^2 y - 5xv^3 + 41$

Las cuales son de clase C^1

$\Rightarrow$ • $\dfrac{\partial F_1}{\partial x} = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 6yv$, $\dfrac{\partial F_1}{\partial u} = \dfrac{1}{u}$, $\dfrac{\partial F_1}{\partial v} = 3y^2$

• $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = -5v^3$, $\dfrac{\partial F_2}{\partial y} = u^2$, $\dfrac{\partial F_2}{\partial u} = 2uy$, $\dfrac{\partial F_2}{\partial v} = -15xv^2$

Además

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}\underbrace{(1,-1,1,2)}_{(\bar{z})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(\bar{z}) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(\bar{z}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(\bar{z}) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(\bar{z}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -40 & -60 \end{vmatrix} = -60 + 120 = 60 \neq 0$$

$\therefore$ Por el teo. de la función implícita, $\exists W \subset \mathbb{R}^2$ vecindad abierta de $(-1,1)$ y funciones $x, v : W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 t.q. $x(-1,1) = 1$, $v(-1,1) = 2$

y • $\dfrac{\partial x}{\partial y}(-1,1) = -\dfrac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,v)}(1,-1,1,2)}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}(1,-1,1,2)} = -\dfrac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}}{60} = \dfrac{\begin{vmatrix} -12 & 3 \\ 1 & -60 \end{vmatrix}}{60} =$

• $\dfrac{\partial x}{\partial u}(-1,1) = -\dfrac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}(1,-1,1,2)}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}(1,-1,1,2)} = -\dfrac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}}{60} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -60 \end{vmatrix}}{60}$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(-1,1) = - \frac{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}(1,-1,1,2)}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}(1,-1,1,2)} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}}{60} = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & -12 \\ -10 & 1 \end{vmatrix}}{60}$$

$$\frac{\partial v}{\partial m}(-1,1) = - \frac{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,m)}(1,-1,1,2)}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}(1,-1,1,2)} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}}{60} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -40 & -2 \end{vmatrix}}{60}$$

Calculando la matriz jacobiana

$$DG(-1,1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial y}(-1,1) & \frac{\partial x}{\partial m}(-1,1) \\ \frac{\partial v}{\partial y}(-1,1) & \frac{\partial v}{\partial v}(-1,1) \end{bmatrix}$$

Derivadas de orden superior

Def.- Sea $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $c \in U$. Se dice que f es 2 veces diferenciable en el punto $c \in U$ si $\exists V \subset U$ vecindad abierta de c t.q. $f: V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable y $\frac{\partial f}{\partial x_i} : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $1 \leq i \leq n$ son diferenciables.

Se dice que f es 2 veces diferenciable en U si f es diferenciable en x, $\forall x \in U$

Def.- Si f es 2-veces diferenciable en $c \in U$, se define la derivada de segundo orden de f en c, como la aplicación bilineal:

$$D^2 f(c): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ t.q. } D^2 f(c)(u,v) := \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} v_j u_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c)$$

Entonces se dice que f es 3 veces diferenciable en c, si $\exists V \subset U$ vecindad abierta de c t.q. $f: V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable y $\frac{\partial f}{\partial x_i} : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $1 \leq i \leq n$ son 2-veces diferenciables

Se define la Derivada de 3er orden, como la aplicación trilineal

$$D^3 f(c): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ t.q. } D^3 f(c)(u,v,w) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} w_k v_j u_i \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}$$

En general, se dice que f es p-veces diferenciable en c si $\exists V \subset U$ vecindad abierta de c t.q. $f: V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable y $\frac{\partial f}{\partial x_i} : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $1 \leq i \leq n$ son $(p-1)$ veces diferenciables

Se define la derivada de orden p de f en c como la aplicación p-lineal

Escaneado con CamScanner

$D^p f(c) : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{p \text{ veces}} \to \mathbb{R}^n$ tq

$$D^p f(c)(u^{(1)}, \ldots, u^{(p)}) = \sum_{i_p=1}^{n} \cdots \sum_{i_1=1}^{n} u^{(p)}_{i_p} \cdots u^{(1)}_{i_1} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \cdots \partial x_{i_1}}(c)$$

Ejercicios

(1) Sea $f(x,y,z) = z \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ y $c = (1,1,-2)$. Calcula la derivada de segundo orden de f en c.

Sol.-

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{z}{x}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = z \cdot \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{z}{xy}$
- $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$

$\Rightarrow$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y,z) = -\frac{z}{x^2}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{1}{x}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y,z) = \frac{z}{y^2}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{1}{y}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \frac{1}{x}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = -\frac{1}{y}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z}(x,y,z) = 0$

$\Rightarrow D^2 f(c) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$D^2 f(c)(u,v) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} v_j u_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \left(v_j u_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_1}(c) + v_j u_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_2}(c) + v_j u_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_3} \right)$$

$$= \left(v_1 u_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(c) + v_1 u_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(c) + v_1 u_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \right)$$
$$+ \left(v_2 u_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c) + v_2 u_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} + v_2 u_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(c) \right)$$
$$+ \left(v_3 u_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(c) + v_3 u_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(c) + v_3 u_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_3}(c) \right)$$

$$= 2 v_1 u_1 + 0 + v_1 u_3 + 2 v_2 u_2 + v_2 u_3 + v_3 u_1 + v_3 u_2 + 0$$

Escaneado con CamScanner

(2) Sea $f(x,y)=x^4y^2-2x^3y^3$, calcula la derivada de 3er orden de f en $c=(-1,1)$.

Sol.- $D^3 f(c): \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$D^3 f(c)(u,v,w)=\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} w_k v_j u_i \frac{\partial^3 f}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}(c)$$

Teorema.- Sea $U\subset\mathbb{R}^n$ abto, y $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Si f es de clase C^p $\Rightarrow$ f es p-veces diferenciable

Dem.- por inducción sobre p

(B.I) $p=1$ Si f es de clase C^1 $\Rightarrow$ por teo. anterior f es diferenciable

(H.I) Sup. que el teorema se cumple para las funciones de clase C^{p-1}

(P.I) Si f es de clase C^p $\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ $1\leq i\leq n$ y son de clase C^{p-1} $\Rightarrow$ por H.I, $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ son $(p-1)$-veces diferenciables $\therefore$ f es p veces diferenciable

Teorema.- Sea $U\subset\mathbb{R}^n$ abto y $f: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Si f es p-veces diferenciable $\Rightarrow$ f es de clase C^{p-1}

Dem.- por inducción sobre p

- Si f es diferenciable $\Rightarrow$ f es continua $\Rightarrow$ f es de clase C^0
- Sup. que el teorema se cumple para las funciones $(p-1)$-veces diferenciables
- Si f es p-veces diferenciable $\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ $\forall 1\leq i\leq n$ y son $(p-1)$-veces diferenciables $\Rightarrow$ son de clase C^{p-2} $\Rightarrow$ f es de clase C^{p-1}

Teorema de Taylor (Cálculo I)

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es de clase C^{p+1} $\Rightarrow \exists$ $f(b)=f(a)+f'(b-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2+\dots+\frac{1}{p!}f^{(p)}(b-a)^p+\frac{1}{(p+1)!}f^{(p+1)}(b-a)^{p+1}$

Teorema (Formula de Taylor de orden p)

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto; $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^{p+1}, $\bar{c} \in U$ y $\bar{h} \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ t.q. $[\bar{c}, \bar{c}+\bar{h}] \subseteq U \Rightarrow \exists\, s \in (0,1)$ t.q.

$$f(\bar{c}+\bar{h}) = f(\bar{c}) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) + \frac{1}{2!}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} h_j h_i \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{c}) + \dots + \frac{1}{p!}\sum_{i_p,\dots,i_1=1}^{n} h_{i_p}\cdots h_{i_1} \frac{\partial f}{\partial i_p \cdots \partial i_1}(\bar{c})$$

$$+ \sum_{i_{p+1},\dots,i_1=1}^{n} h_{i_{p+1}}\cdots h_{i_1} \frac{\partial f}{\partial x_{i_{p+1}}\cdots x_{i_1}}(\bar{c}+s\bar{h}).$$

Ademas tomando $R(f,c,p) = \frac{1}{(p+1)!}\sum_{i_{p+1},\dots,i_1=1}^{n} h_{i_{p+1}}\cdots h_{i_1} \frac{\partial f}{\partial x_{i_{p+1}}\cdots x_{i_1}}(\bar{c}+s\bar{h})$

el cual se llama "El residuo" se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{|R(f,c,p)|}{\|h\|^p} = 0$$

Dem: Sea $\lambda: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ t.q. $\lambda(t) = \bar{c} + t\bar{h}$ la cual es de clase C^∞, en particular de clase C^{p+1} y $\lambda(t) \in U$ $\forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow$ Sea $g: [0,1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q. $g(t) = (f\circ\lambda)(t)$ la cual es de clase $(p+1)$ $\Rightarrow$ por el Teorema de Taylor de 1 variable

$\exists\, s \in (0,1)$ t.q. $g(1) = g(0) + g'(0)(1-0)^1 + \dots + \frac{1}{p!} g^{(p)}(0)(1-0)^p + \frac{1}{(p+1)!} g^{(p+1)}(s)(1-0)^{p+1}$

$\Rightarrow$ Así se tiene la 1ra parte del teorema y a que

$g(1) = (f\circ\lambda)(1) = f(c+h)$ y $g(0) = f(c)$ y

$$g'(t) = (f\circ\lambda)'(t) = Df(\lambda(t))\,\lambda'(t) = Df(c+th)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c+th)$$

$\Rightarrow g'(0) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$

$$g^{(2)}(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\circ\lambda\right)(t)\right] = \sum_{i=1}^{n} h_i\, D\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda(t))\right)\circ(\lambda'(t))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i\, D\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(c+th)\right)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i\left(\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c+th)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} h_j h_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c+th)$$

$\Rightarrow g^{(2)}(0) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} h_j h_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{c})$

Para $g^{(p)}(t) = \sum_{i_p \dots i_1 = 1}^{n} h_{i_p} \cdots h_{i_1} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \cdots \partial x_{i_1}}(c+th)$

$$\Rightarrow g^{(p)}(0) = \sum_{i_p \dots i_1 = 1}^{n} h_{i_p} \cdots h_{i_1} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \cdots \partial x_{i_1}}(c)$$

$$g^{(p+1)}(t) = \sum_{i_{p+1} \dots i_1 = 1}^{n} h_{i_{p+1}} \cdots h_{i_1} \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_{i_{p+1}} \cdots \partial x_{i_1}}$$

$$\Rightarrow g^{(p+1)}(s) = \sum_{i_{p+1} \dots i_1 = 1}^{n} h_{i_{p+1}} \cdots h_{i_1} \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_{i_{p+1}} \cdots \partial x_{i_1}}(c+sh)$$

Solo resta probar que $\lim_{h \to 0} \frac{|R(f,c,p)|}{\|h\|^p} = 0$

Como f es de clase $C^{p+1} \Rightarrow \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_{i_{p+1}} \cdots \partial x_{i_1}} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas

en particular se tiene que

$\lim_{h \to 0} \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_{i_{p+1}} \cdots \partial x_{i_1}}(c+th) = \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_{i_{p+1}} \cdots \partial x_{i_1}}(c)$, por otra parte $|h_{i_j}| \leq \|h\|$

$\forall\, 1 \leq j \leq p+1 \Rightarrow \frac{|h_{i_j}|}{\|h\|} \leq 1 \Rightarrow \frac{|h_{i_1}|}{\|h\|} \leq 1, \frac{|h_{i_2}|}{\|h\|} \leq 1, \dots, \frac{|h_{i_{p+1}}|}{\|h\|} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{|h_{i_p} \cdots h_{i_1}|}{\|h\|^p} \leq 1 \Rightarrow \frac{|h_{i_{p+1}} \cdots h_{i_1}|}{\|h\|^p} \leq |h_{i_{p+1}}|$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{|R(f,c,p)|}{\|h\|^p} \leq \lim_{h \to 0} \frac{\left| \sum_{i_{p+1} \dots i_1 = 1}^{n} h_{i_{p+1}} \cdots h_{i_1} \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_{i_{p+1}} \cdots \partial x_{i_1}}(c+sh) \right|}{\|h\|^p}$$

$$\leq \frac{1}{(p+1)!} \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{i_{p+1} \dots i_1 = 1}^{n} |h_{i_{p+1}}| \left| \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_{i_{p+1}} \cdots \partial x_{i_1}}(c+sh) \right|}{\|h\|^p} = 0$$

¿ ? porque!

Def: Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^{p+1}, $c \in U$ y $h \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, se define el polinomio de Taylor de orden p ~~centrado~~ en el punto c como:

$$P(h) = f(c) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} h_j h_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c) + \cdots$$

$$+ \sum_{i_p \dots i_1 = 1}^{n} h_{i_p} \cdots h_{i_1} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \cdots \partial x_{i_1}}(c)$$

Extremos locales

Def: Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n$ una función y $c \in A$

(1) f tiene un mínimo local o relativo en c si $\exists B_r(c)$ t.q $f(c) \leq f(x)$ $\forall x \in B_r(c) \cap A$

(2) f tiene un máximo local o relativo en c si $\exists B_r(c)$ t.q $f(x) \leq f(c)$ $\forall x \in B_r(c) \cap A$

(3) f tiene un extremo local en c, si f tiene un min. o max local en c

(4) c es un punto silla de f si $\forall B_r(c)$ $\exists x_1, x_2 \in A \cap B_r(c)$ t.q $f(x_1) < f(c)$ y $f(c) < f(x_2)$

Ejercicios:

- Demuestra que $f(x,y) = x^2 + y^2$ tiene un min local en $(0,0)$

Dem: En efecto, $\forall (x,y) \in B_1(0,0)$ se tiene que $f(0,0) = 0 \leq x^2 + y^2 = f(x,y)$

- Demuestra que $f(x,y) = 1 - (x^2+y^2)$ tiene un max local en $(0,0)$

Dem:
En efecto $\forall (x,y) \in B_1(0,0)$ se tiene que $f(0,0) = 1 \geq 1 - (x^2+y^2) = f(x,y)$

- Demuestra que $(0,0)$ es un punto silla de $f(x,y) = y^2 - x^2$

Dem: Sea $r>0$, veamos que $\exists x_1, x_2 \in B_r(0,0) \cap \mathbb{R}^2 = B_r(0,0)$ t.q $f(x_1) < f(0,0)$, $f(0,0) < f(x_2)$. Proponemos $\bar{x}_1 = (\frac{r}{2}, 0)$ y $\bar{x}_2 = (0, \frac{r}{2})$

$\Rightarrow f(\frac{r}{2}, 0) = 0 - \frac{r^2}{4} < f(0,0)$ y $f(0, \frac{r}{2}) = \frac{r^2}{4} - 0 > f(0,0)$

Def: Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función y $c \in \text{int}(A)$. Se dice que c es punto crítico de f si f es diferenciable en c y $Df(c) = 0$ o esto es $Df(c) \neq 0$

Ejercicio: Determina los puntos críticos de f

- $f(x,y) = x\cos(y)$

Sol: Tenemos que f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$

$\nabla f(x,y) = (\cos(y), -x\sin(y)) = (0,0)$ ssi $\cos(y) = 0$
$-x\sin(y) = 0$

$y = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\cos(y) = 0$ y $x\sin(y) = 0$ $x = 0$

$-6x+1=0$

$\Rightarrow \quad y = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad (x=0 \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen}(y)=0)$

$\Rightarrow \quad y = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (x=0 \quad \text{ó} \quad y = \pi k) \Rightarrow$ los puntos críticos serán

$(0, \frac{2k+1}{2}\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$

- $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + xy + 2z$

Sol:
Es dif. en $\mathbb{R}^3$

$\nabla f(x,y,z) = (3x^2 + y, 2y + x, 2z + 2) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x^2 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow 2(-3x^2) + x = 0 \Rightarrow -6x^2 + x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } x = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow y = 0 \text{ ó } y = -\frac{1}{12}$$

$2z + 2 = 0 \Rightarrow z = -1$

$\Rightarrow$ los puntos críticos son $(0,0,-1), (\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, -1)$

Teorema: Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $c \in U$, si f tiene un extremo local en c y f es diferenciable en $c \Rightarrow \nabla f(c) = 0$

Dem:

- Sup. que f tiene un máximo local en $c \Rightarrow \exists B_\delta(c) \subseteq U$ t.q $f(x) \leq f(c) \; \forall x \in B_\delta(c)$.

Sea $\lambda_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ t.q $\lambda_i(t) = c + te_i$, la cual es diferenciable y en particular continua y $\lambda_i(0) = c \in B_\delta(c) \Rightarrow$ por continuidad $\exists \varepsilon > 0$ t.q $\lambda_i(t) \in B_\delta(c) \; \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Sea $g_i: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ t.q $g_i(t) = (f \circ \lambda_i)(t)$ la cual es diferenciable y $\underline{g_i(t) = f(c + te_i) \leq f(c) = g_i(0)} \Rightarrow$ así g_i tiene un máximo local en $t=0 \Rightarrow$ por cálculo 1, $0 = g'(0) = D_{f(c)}(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$

$\therefore \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = 0 \; \forall i \Rightarrow \nabla f(x) = (0, \dots, 0) = \overline{0}$.

Def: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, $c \in U$ tq $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c)$ $1 \leq i, j \leq n$, se define la matriz Hessiana de f en c como: el ~~[illegible]~~ la matriz Jacobiana del gradiente $\Rightarrow H_f(c) = J \nabla f(c) \Rightarrow J\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$

$$\Rightarrow H_f(c) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(c) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(c) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(c) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(c) \end{bmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

Ejercicio / Determina la matriz Hessiana de f en c

- $f(x,y) = e^{2x-y}$, $c = (1,2)$

$\nabla f(x,y) = (2e^{2x-y}, -e^{2x-y})$

$$\Rightarrow H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 4e^{2x-y} & -2e^{2x-y} \\ -2e^{2x-y} & 2e^{2x-y} \end{bmatrix} \Rightarrow H_f(1,2) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- $f(x,y,z) = z \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ $c = (2,1,-3)$

$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{z \cdot \frac{1}{y}}{\frac{x}{y}}, z \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right), \ln\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \left(\frac{z}{x}, -\frac{z}{y}, \ln\left(\frac{x}{y}\right)\right)$

$$\Rightarrow H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -\frac{z}{x^2} & 0 & \frac{1}{x} \\ 0 & \frac{z}{y^2} & -\frac{1}{y} \\ \frac{1}{x} & -\frac{1}{y} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow H_f(2,1,-3) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Def.- Sea $A=[a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica. La forma cuadrática asociada a A es la función $Q:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$Q(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_j x_i$$

- Se dice que Q es definida positiva si $Q(x)>0$ $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n - \{\bar{0}\}$
- Se dice que Q es definida negativa si $Q(x)<0$ $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n - \{\bar{0}\}$
- Se dice que Q es indefinida si $\exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ t.q. $Q(x_1)<0$ y $Q(x_2)$

Ejemplo.- Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f: U\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y $c \in U$ entonces la función $H_{f(c)}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (no es el Hessiano) dado por

$$H_{f(c)}(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c)$$

Note que si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n - \{\bar{0}\}$ y $t \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow H_{f(c)}\left(\frac{tx}{\|tx\|}\right) = H_{f(c)}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$

Dem.-

$$H_{f(c)}\left(\frac{tx}{\|tx\|}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{tx_i}{\|tx\|}\right)\left(\frac{tx_j}{\|tx\|}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{t^2 x_i x_j}{t^2\|x\|^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i x_j}{\|x\|^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = H_{f(c)}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

Variedades

Def.- Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ abto y $f: V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función. Se dice que f es suave si f es de clase C^∞.

Def.- Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad suave de dimensión "m" si $\forall x \in M$ $\exists W \subset \mathbb{R}^n$ vecindad abierta de x, $V \subset \mathbb{R}^m$ abto y $\Phi: V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ suave t.q

(1) $\Phi: V \to W \cap M$ es biyectiva
(2) $D\Phi(u): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva i.e rang$(D\Phi(u)) = m$
(3) $\Phi^{-1}: W \cap M \to V$ es continua

El par (V, Φ) se llama una parametrización en M y $(W\cap M, \Phi^{-1})$ se llama una carta

Ejercicios

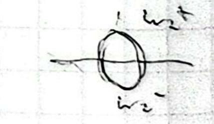
(1) Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ abto. Demuestra que V es una n-variedad suave.
Sol.- Sea $\Phi: V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ t.q $\Phi(x) = x$ ✓

(2) Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abto y $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ suave. Demuestra que $Gr(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid x \in U\}$ es una n-variedad suave

Dem.- Sea $W = U \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ es vecindad abierta de $(x, f(x))$, $U \subset \mathbb{R}^n$ y $\Phi: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ t.q $\Phi(x) = (x, f(x))$ la cual es suave, ~~...~~, $\Phi: U \to W \cap Gr(f)$ es biyectiva con inversa $\Phi^{-1}: W \cap Gr(f) \to U$ t.q $\Phi^{-1}(x, f(x)) = x$, además $D\Phi(z): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ está dada por ~~...~~ $D\Phi(z)[v] = (v, Df(z)[v])$ la cual es inyectiva

(3) Demuestra que $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ es una 1-variedad

Dem.- Sean $W_1^{\pm} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pm x > 0\} \cap S^1$
$W_2^{\pm} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pm y > 0\} \cap S^1$



Sean $\Phi_1^{\pm}: (-1,1) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ t.q $\Phi_1^{\pm}(t) = (\pm\sqrt{1-t^2}, t)$
t.q $\Phi_1^{\pm}: (-1,1) \to W_1^{\pm} \cap S^1$ es biyectiva y $(\Phi_1^{\pm})^{-1}: W_1^{\pm} \cap S^1 \to (-1,1)$ está dada por $(\Phi_1^{\pm})^{-1}(x,y) = y$

$\Rightarrow D\Phi_1^{\pm}(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $D\Phi_1^{\pm}(t)(s) = s\left(\mp \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, 1\right)$ es biyectiva

Ahora sean $\Phi_2^{\pm}: (-1,1) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ t.q $\Phi_2^{\pm}(t) = (t, \pm\sqrt{1-t^2})$
t.q $\Phi_2^{\pm}: (-1,1) \subset \mathbb{R} \to W_2^{\pm} \cap S^1$ es biyectiva y $(\Phi_2^{\pm})^{-1}: W_2^{\pm} \cap S^1 \to (-1,1)$ está dada por $(\Phi_2^{\pm})^{-1}(x,y) = x$

t.q. $D\phi_2^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $D\phi_2^{-1}(a)(s) = s\left(1, \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)$ es biyectiva

Def.- Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abto y $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ suave y $c \in \mathbb{R}^m$. Se dice que c es un valor regular de f si: $f^{-1}(c) = \emptyset$ o bien $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ y $Df(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es suprayectiva $\forall x \in f^{-1}(c)$

Ejercicios:

- Sea $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$. Demuestra que $0 \in \mathbb{R}$ es valor regular de f.

Dem.- $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$

Tenemos que $Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x & -2y & 1 \end{pmatrix}$ p.d. $Df(x,y,z): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es suprayectiva en $f^{-1}(0)$.

~~Sea $(a,b,c) \in f^{-1}(0)$, $\exists$? $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces quiero $(a,b,c) \in f^{-1}(0)$ t.q. $Df(x,y,z)(a,b,c) = \lambda$~~

$Df(a,b,c)((0,0,\lambda)) = \langle \nabla f(a,b,c), (0,0,\lambda) \rangle = \langle (-2a, -2b, 1), (0,0,\lambda) \rangle = \lambda$

- Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ t.q. $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, z)$. Demuestra que $(1,0) \in \mathbb{R}^2$ es valor regular de f.

Dem.- Tenemos que $f^{-1}(\{(1,0)\}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1, z = 0\}$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1, z = 0\}$ veamos que $Df(x)$ es supra.

Sea $(a,b,c) \in f^{-1}(\{(1,0)\})$. $Df(a,b,c): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $Df(a,b,c) = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

y como $\operatorname{Ran}(Df(a,b,c)) = 2 \Rightarrow$ es suprayectiva.

Teorema del valor Regular.- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ suave y $c \in \mathbb{R}^m$ t.q. $f^{-1}(c) \neq \emptyset$. Si c es valor regular de f $\Rightarrow M = f^{-1}(c) \subset A$ es una $(n-m)$-variedad suave.

Dem.- Sea $\bar{a} \in f^{-1}(c)$, como c es valor regular de $f \Rightarrow Df(\bar{a}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es suprayectiva, así por el teorema de la dimensión $n \geq \dim(\operatorname{Ker}(Df(a))) + \dim \operatorname{Im}(Df(a)) = \dim(\operatorname{Ker}(Df(a))) + m$ y $m \leq n$

En este caso: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ y $\bar{a} = (a_1, a_2) \in f^{-1}(c)$
$(\bar{x}, \bar{y})$

Luego la matriz Jacobiana:

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-m}}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(a) \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n-m}}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(a) \end{pmatrix}$$

tiene m columnas linealmente independientes. (pues $\mathrm{Ran}(Df(a)) = m$)
mediante el cambio de coordenadas en $\mathbb{R}^n$ podemos suponer
s.p.g. que las ultimas m columnas son lin. ind.

Luego $\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}(\bar a) \neq 0$, así por el T.F. Implicita $\exists$ una
vecindad abierta $W=(U\times V) \subset A$ de $\bar a=(a_1,a_2)$, $g: U \subset \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$
suave t.q. $g(a_1)=a_2$, $f(x,g(x)) = \bar c$ $\forall x\in U$

Sea $\phi: U \subset \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ t.q. $\phi(x)=(x,g(x))$ la cual es suave,
$\phi: U \to W\cap f^{-1}(c)$ es biyectiva y ya que $D\phi(x)(z) = (z, Dg(x)(z))$
y $\phi^{-1}: W\cap f^{-1}(c) \to U$ esta dada por $\phi^{-1}(x,g(x)) = x$, la
cual es continua. $\therefore M=f^{-1}(c) \subset A \subset \mathbb{R}^n$ es una n-m
variedad suave.

Ejercicios:

• Demuestra que $S^n = \{\bar x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|=1\}$ es una n-variedad suave

Dem: Sea $f: \mathbb{R}^{n+1} - \{\bar 0\} \to \mathbb{R}$ t.q. $f(\bar x) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$, la cual es suave
y $f^{-1}(1) = \{\bar x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} = S^n$

Veamos que $1 \in \mathbb{R}$ es valor regular, con lo cual se tendra que
$S^n = f^{-1}(1)$ es una $((n+1)-1) = n$-variedad suave.

En efecto, dado $\bar x \in S^n$ se tiene que $\nabla f(x) = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n) \neq \bar 0$
(pues $\bar x \in S^n$) $\therefore$ S^n es una n-variedad suave

{El ejercicio anterior dice que para ver si el $1 \in \mathbb{R}$ es un valor
regular bastaba con que el gradiente fuera distinto de cero}

• Demuestra que el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que se obtiene al
rotar el circulo $(x-2)^2+z^2=1$ alrededor del eje z, es
una 2-variedad suave.

Dem: Sea $T \subset \mathbb{R}^3$, $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 + z^2 = 1$

Sea t.q. $f(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 + z^2$
$f: \mathbb{R}^3 - \{(0,0,z) \mid z\in\mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$

la cual es suave y $f^{-1}(1) = T$, basta ver que $1\in\mathbb{R}$ es
valor regular $\nabla f(x,y,z) =$

Sea $(x,y,z) \in V \Rightarrow \nabla f(x,y,z) = \left(2(\sqrt{x^2+y^2}-2)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, 2(\sqrt{x^2+y^2}-2)\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}, 2z \right)$

$\Rightarrow \nabla f(x,y,z) = \left(\frac{2x(\sqrt{x^2+y^2}-2)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y(\sqrt{x^2+y^2}-2)}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2z \right)$

¿Cuándo $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$?

$\Rightarrow 2x(\sqrt{x^2+y^2}-2) = 0 \wedge 2y(\sqrt{x^2+y^2}-2) = 0 \wedge 2z = 0$

$\Leftrightarrow x=0, y=0$ ó $\sqrt{x^2+y^2}-2=0$ y $z=0$

$\Leftrightarrow$ i) $x=0$ y $y=\pm 2$ y $z=0 \Rightarrow (0,2,0)$ y $(0,-2,0)$
ii) $y=0$ y $x=\pm 2$ $\quad (2,0,0)$ y $(-2,0,0)$

Pero estos puntos no pertenecen a T

$\Rightarrow \nabla f(x,y,z) \neq 0 \quad \forall (x,y,z) \in T$

Def: Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ m-variedad suave, $x \in M$ y $\phi: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ parametrización de M t.q. $\phi(m_0) = x$, donde $m_0 \in U$. Se define el espacio tangente a M en el punto x como

$T_x M := Im(D\phi(m_0))$

Obs: La definición de $T_x M$ no depende de la parametrización

Ejercicio:

- Determina $T_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})} S^1$.

Sol: Sea $\phi: (-1,1) \to \mathbb{R}^2$ t.q. $\phi(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, $\phi(\frac{1}{\sqrt{2}}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

$\Rightarrow D\phi(\frac{1}{\sqrt{2}}): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ t.q. $D\phi(\frac{1}{\sqrt{2}})(s) = s\left(1, \frac{-(\frac{1}{\sqrt{2}})}{\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}}\right) = s(1,-1) = (s,-s)$

$\therefore T_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})} S^1 = \{ (s,-s) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in \mathbb{R} \}$

Teorema: Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ m-variedad suave y $x \in M$. Entonces $v \in T_x M \Leftrightarrow \exists$ una curva suave $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ t.q. $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = v$

Dem: Sea $\phi: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una parametrización en M t.q. $\phi(m_0) = x$ donde $m_0 \in U$, así por def $T_x M := Im(D\phi(m_0))$

$\Rightarrow$) Sea $v \in T_x M := Im(D\phi(m_0)) \Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}^m$ t.q. $D\phi(m_0)(u) = v$

Sea $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ t.q. $c(t)=m_0+tm$ la cual es una curva suave t.q. $c(0)=m_0\in V \Rightarrow \exists\, \varepsilon>0$ t.q. $c(t)\in V\ \forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.
tomando $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^n$ t.q. $\alpha(t)=(\Phi\circ c)(t)$ se tiene una curva suave t.q. $\alpha(t)=\Phi(c(t))\in W\cap M$, $\alpha(0)=\Phi(c(0))=\Phi(m_0)=x$
y $\alpha'(0)=D\Phi(c(0))(c'(0))=D\Phi(m_0)(m)=v$.

[$\Leftarrow$] s.p. que $\exists$ una curva suave $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ t.q. $\alpha(0)=x$ y $\alpha'(0)=v$
p.d. $v\in T_xM:=Im(D\Phi(m_0))$. Como $\alpha(0)=x\in W\cap M$ (podemos) suponer s.p.g. que $\alpha(t)\in W\cap M\ \forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$,

Sea $\beta:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^m$ t.q. $\beta(t)=(\Phi^{-1}\circ\alpha)(t)$, la cual es suave, y $\beta(0)=\Phi^{-1}(\alpha(0))=\Phi^{-1}(x)=m_0$ y $\beta(t)\in V\ \forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$

Así, $\beta=\Phi^{-1}\circ\alpha \Rightarrow \alpha=\Phi\circ\beta$ y por hip. $v=\alpha'(0)$

$\Rightarrow v = D(\Phi\circ\beta)(0) = D\Phi(m_0)(\beta'(0))\in Im(D\Phi(m_0)) = T_xM$

Teorema: Sea $M\subset\mathbb{R}^n$ m-variedad, $x\in M$ y $\Phi: V\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ parametrización t.q. $\Phi(m_0)=x$, donde $m_0\in V \Rightarrow$
$\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(m_0),\dots,\frac{\partial\Phi}{\partial x_m}(m_0)\right\}$ es base del espacio tangente.

Dem: Como $D\Phi(m_0):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ es inyectiva y $\{e_1,\dots,e_m\}\subset\mathbb{R}^m$ son l.i. $\Rightarrow \{D\Phi(m_0)(e_1), D\Phi(m_0)(e_2),\dots,D\Phi(m_0)(e_m)\}$ es linealmente independiente pero $D\Phi(m_0)(e_i)=\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(m_0)$

$\Rightarrow \left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(m_0),\dots,\frac{\partial\Phi}{\partial x_m}(m_0)\right\}$ es l.i. y generan a $Im(D\Phi(m_0))=T_xM$ ■

$\therefore$ es base de T_xM (y por lo tanto el espacio tangente tiene dimensión m)

Teorema: Sea $A\subset\mathbb{R}^n$ abierto, $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ suave y $c\in\mathbb{R}^m$ t.q. $f^{-1}(c)\neq\emptyset$. Si c es valor regular de f $\Rightarrow M=f^{-1}(c)\subset A$ es una $(n-m)$-variedad suave y para cada $x\in M$ $T_xM=Ker(Df(x))$

Dem: Como c es valor regular de f $\Rightarrow$ por el teo. del valor regular $M=f^{-1}(c)\subset A$ es una $(n-m)$-variedad suave.

Sea $x\in M=f^{-1}(c)$ veamos que $T_xM=Ker(Df(x))$
Sea $v\in T_xM \Rightarrow$ por teorema $\exists$ una curva suave $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ t.q. $\alpha(0)=x$ y $\alpha'(0)=v$. Así $\forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ $(f\circ\alpha)(t)=c$ pues $\forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, $\alpha(t)\in M$ y $M=f^{-1}(c)\Rightarrow f(M)=c$

$\Rightarrow 0 = D(f\circ\alpha)(0) = Df(\alpha(0))(\alpha'(0)) = Df(x)(v) \Rightarrow v\in Ker(Df(x))$

Así, $T_xM \subseteq Ker(Df(x))$

Por otra parte como "c" es valor regular de f y $x \in M = f^{-1}(c)$ $\Rightarrow$ $Df(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es suprayectiva, así $n = \dim Ker(Df(x)) + \dim Im(Df(x))$ $\Rightarrow$ $n = \dim(Ker Df(x)) + m$ $\Rightarrow$ $\dim(Ker Df(x)) = n-m$

y como $\dim(T_xM) = n-m$ y $T_xM \subseteq Ker(Df(x))$ $\Rightarrow$ $T_xM = Ker(Df(x))$

Ejercicios:

- Demuestra que $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ es una 2-variedad suave y determina $T_{(0,0,1)}S^2$

Dem: Sea $f: \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}$ t.q. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ la cual es suave y $f^{-1}(1) = S^2$. Veamos que $1 \in \mathbb{R}$ es valor regular de f, con lo cual S^2 es una $(3-1) = 2$-variedad suave.

Sea $(x,y,z) \in S^2$ $\Rightarrow$ $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) \neq \bar{0}$ pues como $(x,y,z) \in S^2$ $x \neq 0$, ó $y \neq 0$ ó $z \neq 0$

Por el teo. anterior $T_{(0,0,1)}S^2 = Ker(Df(0,0,1)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid Df(0,0,1)(x,y,z) = 0\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \nabla f(0,0,1), (x,y,z) \rangle = 0\} =$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (0,0,2z) = 0\}$ $\Rightarrow$ $T_{(0,0,1)}S^2 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3\}$

Def: Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ m-variedad suave y $x \in M$. Se define el espacio normal a M en el punto "x" como $(T_xM)^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w\rangle = 0 \ \forall v \in T_xM\}$
Así $\dim(T_xM)^\perp = n-m$.

Nota: $(T_xM)^\perp$ depende de donde está contenida M.

Los vectores de $(T_xM)^\perp$ se llaman vectores normales a M

Teorema: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abto, $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ suave y $c \in \mathbb{R}^m$ t.q. $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ $M = f^{-1}(c) \subset A$ es una $(n-m)$-variedad suave y $\forall x \in M$ se tiene que $\{\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_m(x)\} \subset \mathbb{R}^n$ son base del espacio normal $(T_xM)^\perp$

Dem: Como $c \in \mathbb{R}^m$ es valor regular de f entonces por el teo. del valor regular, $M = f^{-1}(c)$ es una $(n-m)$-variedad suave

Sea $\bar{x} \in M$ veamos que $\{\nabla f_1(\bar{x}), \dots, \nabla f_m(\bar{x})\}$ es base de $(T_xM)^\perp$
Esto es, Dado $v \in T_xM$ se tiene que $\langle \nabla f_j(\bar{x}), v\rangle = 0$ $\forall j = 1, \dots, m$

$Df(\bar{x})(v)$

Como $v \in T_xM \Rightarrow \exists$ una curva suave $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ t.q. $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = v$

$\Rightarrow (f \circ \alpha)(t) = c \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ (pues $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow \alpha(t) \in M$)

$\Rightarrow (f_j \circ \alpha)(t) = c_j \quad \forall\, 1 \leq j \leq m \Rightarrow$

$$0 = D(f_j \circ \alpha)(0)(1) = Df_j(x)(\alpha'(0)) = Df_j(x)(v) = \langle \nabla f_j(x), v \rangle$$

$\Rightarrow \nabla f_j(x) \in (T_xM)^\perp \Rightarrow \{\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_m(x)\} \subset (T_xM)^\perp$

Ahora como $\dim(T_xM) = n - m \Rightarrow \dim((T_xM)^\perp) = n - (n-m) = m$

$\Rightarrow$ ~~basta~~ basta probar que $\{\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_m(x)\}$ es l.i.

Como $x \in f^{-1}(c)$ y c es valor regular de $f \Rightarrow Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es suprayectiva, esto es, el rango de la matriz jacobiana:

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \nabla f_2(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

es "m" $\Rightarrow$ la matriz jacobiana tiene m renglones l.i.

$\therefore \{\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_m(x)\}$ es l.i. ~~, está contenido en $(T_xM)^\perp$ y tiene la misma dimensión~~ $\therefore$ es base de $(T_xM)^\perp$