1) Objetos de estudio

• Clases combinatorias

Def.- ~~Es un conjunto~~ Es el par $(\mathcal{E}, |\cdot|)$ (donde)

$\mathcal{E}$ es un conjunto y $|\cdot| : \mathcal{E} \to \mathbb{N}$ t.q

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\# |n|^{-1} < \infty$, es decir

$|\{x \in \mathcal{E} : |x|_{\mathcal{E}} = n\}| < \infty$. $C_n = \#$ de elementos en $\mathcal{E}$ de tamaño $n$.

• Funciones generadoras

* $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ FG- ordinaria

* $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$ FG- exponencial

* otras dos

Propiedades combinatorias de las clases $\Leftrightarrow$ propiedades analíticas de las FG.

2) Método simbólico

Consiste de un conjunto de herramientas para construir FG- de clases combinatorias.

3) Clases Fundamentales

* Neutra $\mathcal{E}$ una clase comb. con un solo elemento de tamaño cero.

$\therefore E(z) = 1$

A' forma $\mathbb{Z}$ una clase de un solo elemento de tamaño 1, y es

$$\mathbb{Z}(z) = z.$$

Operaciones Fundamentales.

* Sean $(A, |\cdot|_A)$ y $(B, |\cdot|_B)$ C.C. entonces se define

$$\mathcal{C} = A+B := A \sqcup B$$

Y se define $|\cdot|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathbb{N}$ dada por

$$|x|_{\mathcal{C}} = \begin{cases} |x|_A & \text{si } x \in A \\ |x|_B & \text{si } x \in B \end{cases}$$

$\therefore (A+B, |\cdot|_{\mathcal{C}})$ es C.C.

Y además $(A+B)(z) = A(z) + B(z)$

* Se define $\mathcal{C} = A \star B = A \times B$

Y $|\cdot|_{\mathcal{C}}(a,b) = |a|_A + |b|_B$

Además $C(z) = A(z) \cdot B(z)$

## Operadores fundamentales.

* Suc.

Sea $(\mathcal{A}, |\cdot|_{\mathcal{A}})$ una C.C. sin elementos neutros, entonces def.

$$\mathcal{C} = \text{Suc}(\mathcal{A}) := \mathcal{E} + \mathcal{A} + \mathcal{A}\star\mathcal{A} + \mathcal{A}\star\mathcal{A}\star\mathcal{A} + \cdots$$

$$:= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n \quad \text{con} \quad \mathcal{A}^0 := \mathcal{E}$$

Obs. $\boxed{C(z) = \dfrac{1}{1-A(z)}}$

Consideremos árboles

Sea $\mathcal{T}$: la C.C. de los árboles binarios

$$\mathcal{T} = \mathcal{Z} + \mathcal{T} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{T}$$

$$\Rightarrow \quad T(z) = z + T(z)\, z\, T(z)$$

$$\Rightarrow \quad T(z) = z + z\,T^2(z)$$

$$\Rightarrow \quad T(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$$

¿Sacar la serie?

~~Ejemplos~~

- Alfabetos, lenguajes, gráficas, permutaciones, particiones, composiciones de enteros, funciones de un conjunto finito en él mismo, ~~etc.~~, triangulaciones, configuraciones topológicas, etc.

Obs.- $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \sum_{\alpha \in A} z^{|\alpha|}$

Ejemplos:-

- Sean $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ clases neutras

$\Rightarrow \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E} \Rightarrow E(z) = 2$

- Sean $\mathcal{Z}_1$ y $\mathcal{Z}_2$ dos átomos

$\Rightarrow$ Sea $\mathcal{C} = \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 \quad \therefore \quad C(z) = z^2$

pues el único elemento de $\mathcal{Z}_1 \times \mathcal{Z}_2$ es $(z_1, z_2)$ y $|(z_1, z_2)|_{\mathcal{C}} = |z_1| + |z_2| = 1 + 1 = 2$

es un elemento de tamaño 2.

- $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \Rightarrow E(z) = 1$

$\circ \; \mathcal{E} = Z_1 + Z_2 \Rightarrow C(z) = 2z$

Ahora

$\circ$ Sea $Z$ átomo / cantidad

$\mathcal{E} \quad Suc(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^n = \mathcal{E} + Z \times Z + \cdots$

$\Rightarrow \mathcal{E}(z) = 1 \cdot z^0 + 1 \cdot z^1 + 1 \cdot z^2 + \cdots$

$= 1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}$

sin el vacío, pues por def Suc no usa $\emptyset$.

$\circ \; Suc(\underbrace{Suc(Z)}_{I \geq 1})$

$\Rightarrow I_{\geq 1}(z) = \frac{1}{1-z} - 1 = \frac{z}{1-z}$

$\therefore \; Suc(I_1)(z) = \frac{1}{1 - I_{\geq}(z)}$

$= \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{1-z}\right)} = \frac{1}{\frac{1-z-z}{1-z}} = \frac{1-z}{1-2z}$

$= \frac{1}{1-2z} - \frac{z}{1-2z}$

$= (1 + 2z + 4z^2 + 8z^3 + \cdots) - (z + 2z^2 + 4z^3 + 8z^4 + \cdots)$

$= 1 + z + 2z^2 + 4z^3 + 8z^4 = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} z^n.$

Def. Sea $A$ una f.c.c. (de elementos neutros).

$\Rightarrow MuCon(A) := Suc(A)/_{\sim_\alpha}$

donde $\sim_\alpha$ es la relación de equivalencia

$\alpha : S_\ell \to Suc(A)$ t.q. $\forall \sigma \in S_\ell$ y $\forall x \in Suc(A)$

$x = (a_1, \dots, a_\ell)$ ~~$\alpha(h, x) = (a_{1+h} \bmod \ell), \dots$~~

$\alpha(\sigma, x) = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(\ell)})$

Además si $\zeta = MuCon(A)$

¿ $C(z)$ ?

Ejemplo

~~$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$~~ $A = \{a, b, c, d\}$

$X = \{a, b, b, c, d, d, d, a, d\}$

$= \{a, a, a, b, b, c, d, d, d, d\}$

$\Rightarrow MuCon(A) = \prod_{\alpha \in A} Suc(\alpha)$

$\Rightarrow \zeta(z) = \prod_{\alpha \in A} \frac{1}{1 - z^{|\alpha|}} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-z^n}\right)^{A_n}$

Escaneado con CamScanner

Definición de grupo.

- El orden de un grupo $|G|$, su cardinalidad.

Si $|G| < \infty$ diremos grupo finito.

Si $|G| = \infty$ diremos grupo infinito.

* Funciones que preservan la estructura de grupo.

Def: Sean $(G, \circ)$ y $(G', *)$ dos grupos, un homomorfismo de grupos es una función $f: G \to G'$ t.q $f(u \circ v) = f(u) * f(v)$.

Así también recordamos el concepto de "acción"

Def: Sean $\Omega$ y $A$ dos conjuntos. Una acción de $\Omega$ en $A$ es una función de $\Omega \times A$ en el conjunto $A$

Def: Sea $\Omega$ un conjunto, un grupo $(G, \circ)$ junto con una acción de $\Omega$ en $(G, \circ)$

$$\circ: \Omega \times G \to G$$
$$(\alpha, x) \to \circ(\alpha, x) = \alpha \circ x = x^{\alpha}$$

que sea distributiva con respecto a la ley de composición de $(G, \circ)$ se le llama grupo con operadores en $\Omega$

La ley distributiva puede expresarse como

$$(xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha}$$

i.e, $\alpha \circ (xy) = (\alpha \circ x)\circ(\alpha \circ y)$

**Nota** Dio todos las def. de anillo, anillo con uno, dominio entero, etc. campo, homomorfismo de anillos, modulos, algebras, algebra exterior, algebra tensorial, ... etc.

# Combinatoria

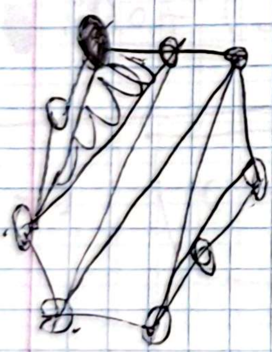
$$\frac{2(1\pm\sqrt{1-4z})}{1-(1-4z)}$$
$4z$

- Dos clases com. $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son isomorfos si $A(z) = B(z)$

- $\forall N \subseteq \mathbb{N}$, definimos $\mathcal{C} = \mathrm{Suc}_N(\mathcal{A})$
$:= \sum_{n\in N} \mathcal{A}^n$

$$\Rightarrow \boxed{C(z) = \sum_{n\in N} A(z)^n}$$

- Triangulaciones de polígonos



$\mathcal{T}$ = clase de triangulaciones de polígonos

$$\mathcal{T} = \underbrace{\mathcal{Z}}_{\text{o es un triángulo}} + \underbrace{\mathcal{Z}\times\mathcal{T}\times\mathcal{Z}}_{\text{o es una triangulación seguido de dos triángulos}}$$

$\mathcal{A}$ no elementos cero

- Recordamos que $\mathrm{Mult}(\mathcal{A}) = \prod_{a\in\mathcal{A}} \mathrm{Suc}(a)$

$$\Rightarrow \boxed{C(z) = \prod_{a\in\mathcal{A}} \frac{1}{1-z^{|a|_{\mathcal{A}}}} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-z^n}\right)^{A_n}}$$

pero quiero que esté en términos de $A(z)$.

$$\boxed{\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-z^n}\right)^{A_n}}$$

$$= e^{\ln(\;)} = e^{\sum_{n\geq 1} A_n \log\left(\frac{1}{1-z^n}\right)}$$

$$= e^{\sum_{n\geq 1} A_n \sum_{k\geq 1} \frac{z^{nk}}{k}}$$

$$= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{nk}}{k}\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^{nk}\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} A(z^k)\right)$$

$$\therefore \prod = \boxed{\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(z^n)}{n}\right)}$$

$k$ enteros $\geq 1$

Sea $P = \mathrm{MuCon}(I \geq 1)$

$$\Rightarrow P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^n}$$

$$\Rightarrow P(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{z^n}{1-z^n}\right)}{n}\right)$$

particiones

$$\boxed{I_{\geq 1} = \{1, 2, \ldots\} \quad \text{t.q.} \quad |n|_I = n}$$

D 12 M 09 A 24

Definimos $\underline{\text{pot}}$

Ejemplo: si $\mathcal{C} = \text{pot}(\mathcal{Z}) = \{\mathcal{E}, \mathcal{Z}\}$

$\Rightarrow$ sabemos que $Z(z) = z \Rightarrow C(z) = 1 + z$

si $\mathcal{C} = \text{pot}(\underbrace{\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2}_{A}) = \{\mathcal{E}, \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \{\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2\}\}$

$\Rightarrow A(z) = 2z \Rightarrow C(z) = 1 + 2z + z^2$

si $\mathcal{C} = \text{pot}(I_{\geq 1})$ son particiones sin rep.

$$\boxed{\text{pot}(\mathcal{A}) = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (\mathcal{E} + \alpha)} \qquad \boxed{A_0 = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{C(z) = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (1 + z^{|\alpha|}) = \prod_{n \geq 1} (1 + z^n)^{A_n}}$$

$$C(z) = \prod_{n \geq 1} (1 + z^n)^{A_n} = \exp\left(\sum_{n \geq 1} A_n \log(1 + z^n)\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-z^n)^k}{k}\right)$$

$$= \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{nk}}{k}\right)$$

$$= \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (z^k)^n\right)$$

$$= \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} A(z^k)\right)$$

$$\therefore \boxed{C(z) = \exp\left(-\sum_{h\geq 1}^{\infty} \frac{A(z^h)}{h}(-1)^h\right)}$$

## Ciclos

Sea $\mathcal{B}$ c.c sin elementos neutros.

Sea $\mathcal{A} = \text{Cic}(\mathcal{B}) := \text{Suc}(\mathcal{B})/\beta$

Donde $\beta$ es la relación $\beta : \mathbb{Z} \to \text{Suc}(\mathcal{B})$

Sea $n \in \mathbb{Z}$, $X = (b_0, b_1, \dots, b_{k-1}) \in \text{Suc}(\mathcal{B})$

con $\beta(n, X) = (b_{0+n \,(\text{mod } k)}, b_{1+n \,(\text{mod } k)}, \dots, b_{k-1+n \,(\text{mod } k)})$

**Ejemplo:**

Sea $\mathcal{B} = \{○, ●\}$ con $|○| = 1$, $|●| = 1$ átomos

$\Rightarrow \xi := \text{Cic}(\mathcal{B}) \ni$  = una sucesión de pelotas negras y blancas sin inicio ni fin.

**Prop:** si $\mathcal{A} = \text{Cic}(\mathcal{B}) \Rightarrow$

$$A(z) = \sum_{h\geq 1} \frac{\varphi(h)}{h} \log\left(\frac{1}{1 - B(z^h)}\right)$$

Restricciones $\quad \mathcal{P} = \mathrm{SEC}(\mathcal{I}_{\geq 1})$ particiones

Sea $N \in \mathcal{I}_{\geq 1}$, $\mathcal{P}_N$ particiones del conjunto de enteros de $N$ sigue la clase $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{P} = \prod_{\alpha \in N} \mathrm{SEC}(\alpha)$$

$$\Rightarrow \cancel{P(z) = \prod_{\alpha \in N} \frac{1}{1-z^{|\alpha|}}}$$

$\mathcal{P}^{\langle \leq k \rangle}$ particiones donde cada sumando aparece a lo más $k$ veces

$$\Rightarrow \mathcal{P}^{\langle \leq k \rangle} = \prod_{\alpha \in \mathcal{I}_{\geq 1}} \mathrm{SEC}_{\leq k}(\alpha)$$

$=$

Def.- una clase combinatoria es construible ó especificable si admite una especificación (posiblemente recursiva) en términos de $+$, $\times$, Suc, Mulcon, Pot, Ci sobre clases elementales. $(\xi, Z)$

En este caso la FGO se construye a partir de $1, z, +, \times, Q[f] = \frac{1}{1-f}$, $Exp[f] = exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(z^k)}{k}\right]$

$, \overline{Exp}[f] = Exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(x^k)}{k} (-1)^{k+1}\right)$

$, Log[f] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} \log\left(\frac{1}{1-f(z^k)}\right)$

Ejemplos: clases especificables

Arboles: $\tau = Z + Z \times Suc(\tau)$

Particiones: $\mathcal{P} = MuCon(Suc_{\geq 1}(Z))$

Composiciones: $\mathcal{C} = Suc(Suc_{\geq 1}(Z))$

Lenguajes: $\mathcal{L} = Suc(Z_1 + \cdots + Z_m)$

Collares: $\mathcal{K} = Cic(Z_1 + \cdots + Z_m)$

permutaciones:

Ejemplos clases no construibles

primos: $\mathcal{P} = \{primos\}$ con $|p|_{\mathcal{P}} = p$

$a_n = \theta(n)\lambda^n$

Def.- $\theta(n)$ es subexponencial si $\lim_{n\to\infty} \frac{\log \theta(n)}{n} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \theta(n)^{\frac{1}{n}} = 1$

Si tengo $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ analítica con $a_n = \theta(n)\lambda^n$

$\Leftrightarrow \lambda^{-1}$ es el radio de convergencia

1er principio de análisis asintótico de FG:
La posición de las singularidades determinan el crecimiento asintótico de los coeficientes.

En este caso las particiones $p_n = n!$, tienen crecimiento superexponencial, por lo que necesitamos de otro tipo de funciones generadoras.

Restricciones

Ejemplo Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de todas las palabras binarias sobre el alfabeto $\{a, b\}$ que tienen $K$ ocurrencias de $b$.

Obs.- Decimos que un lenguaje es Regular si es isomorfo a una esp. regular, es decir, se utiliza únicamente $+, \times, \text{Suc}$

$\Rightarrow L_n = \binom{n}{k}$

Demuestre que $\mathcal{L}$ es regular

aaa b b aaa b aa b aa b a b aa

$\mathcal{L} = Suc(a) \times (b \times Suc(a))^K$

Sabemos que $L(z) = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} z^n$

pero por otro lado

$L(z) = \frac{1}{1-z} \cdot \left(\frac{z}{1-z}\right)^K = z^K \cdot \frac{1}{(1-z)^{K+1}}$

$\therefore$ $\cancel{[z^n] L(z)}$

$[z^n]\, z^K \cdot \frac{1}{(1-z)^{K+1}} = \binom{n}{k}$

$= [z^{n-K}] \frac{1}{(1-z)^{K+1}}$

Lema: $[z^{n-K}] (1-z)^{-(K+1)} = \binom{n}{k}$

---

$\mathcal{L}$ = Lenguaje binario sobre $\{a, b\}$ además de solo $K$'s $b$

para que la distancia entre 2 $b$'s consecutivas sea menor a $d$

$\Rightarrow Suc(a) \left( b\, Suc_{<d}(a) \right)^{K-1} b\, Suc(a)$

$\Rightarrow L(z) = \frac{1}{1-z} \cdot \left( z \cdot \frac{z^{d}-1}{z-1} \right)^{K-1} \cdot z \cdot \frac{1}{1-z}$

$$= z^k \cdot \frac{1}{(1-z)^{k+1}} \cdot (1-z^d)^{k+1}$$

$$\Rightarrow [z^n]\, L(z) = [z^{n-k}] \frac{1}{(1-z)^{k+1}} (1-z^d)^{k+1}$$

tarea.- pruebe que $[z^n]\, L(z) = \sum_j (-1)^j \binom{k-1}{j} \binom{n-\ldots}{k}$

~~Ejemplo.- Sea A un alfabeto y $p = p_1 \cdots p_k$~~ $\in A$

y

Def.- Los patrones los separaremos en

2 { subpatrones: pan, tos, es, ... subpatron de la palabra patron
Factor: ron, tron, ... factor de la palabra patron → todo pegado

Ejemplo.- Sea A un alfabeto y $P = p_1 \cdots p_k \in A$ un patron, y sea con $|A| = m$

$\mathcal{L}$ = Lenguaje de palabras que contienen a P como subpatron de primeras ocurrencias.

$$\Rightarrow \mathcal{L} = Suc(A \setminus p_1) \times p_1 \times Suc(A \setminus p_2) \times \cdots \times p_k \times Suc(A)$$

$$\Rightarrow L(z) = z^k \cdot \left(\frac{1}{1-(m-1)z}\right)^k \cdot \frac{1}{1-mz}$$

Escaneado con CamScanner

~~Automata~~

$\Theta$ = ~~#~~ oc. subpatron (no necesariamente primeras ocurrencias)

$\Rightarrow \Theta = Su(A) \times p_1 \times Su(A) \times p_2 \times \cdots \times Su(A) \times p_k \times Su(A)$

$\Rightarrow \Theta(z) = \dfrac{z^k}{(1-mz)^{k+1}}$

## Automatas

Es una grafica dirigida

Los vertices $\equiv$ Estados $Q$

El estado inicial es $q_0 \in Q$

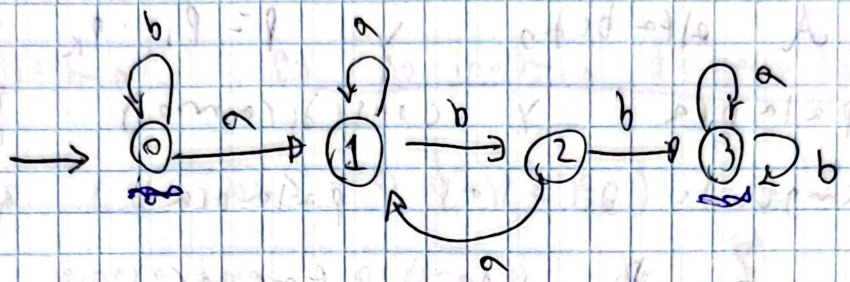
y hay $\tilde{Q} \subseteq Q$ de estados finales

con alfabeto $A$ y aristas etiquetadas con $A$

Un automata es **Determinista** si

$\forall (q, \alpha) \in Q \times A$ existe a lo mas una arista que sale de $q$ etiquetada con $\alpha$.

Sea $\mathcal{L} \subseteq A^*$ "aceptadas" por el automata.




¿ Función generadora de los automatos?

Teorema [Chomsky - Schützenberger]

$$L(z) = \bar{u}\,(I - zT)^{-1}\,\bar{v}$$

donde $T$ = matriz de transición

$\bar{u} = (1, 0, \dots, 0)$

$\bar{v} = (v_0, \dots, v_s)^T$

con $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_s\}$ y $\bar{Q} = \{q_{i_1}, \dots, q_{i_f}\}$

donde $v_j = [\![ q_j \in \bar{Q} ]\!] = \begin{cases} 1 & \text{si } q_j \in \bar{Q} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

Con
$$T = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

← Esta es en el ejemplo de arriba

Regresamos con factores

Sea $A$ alfabeto y $p = p_1 \cdots p_k \in A^*$ una palabra y consideramos el lenguaje de las palabras que **NO** tienen a $p$ como factor

Obs.- $\forall p$ existe un automata determinista finito cuyo lenguaje son las palabras que tienen a $p$ como factor. (Automata de Knutt-Morris-Pratt)

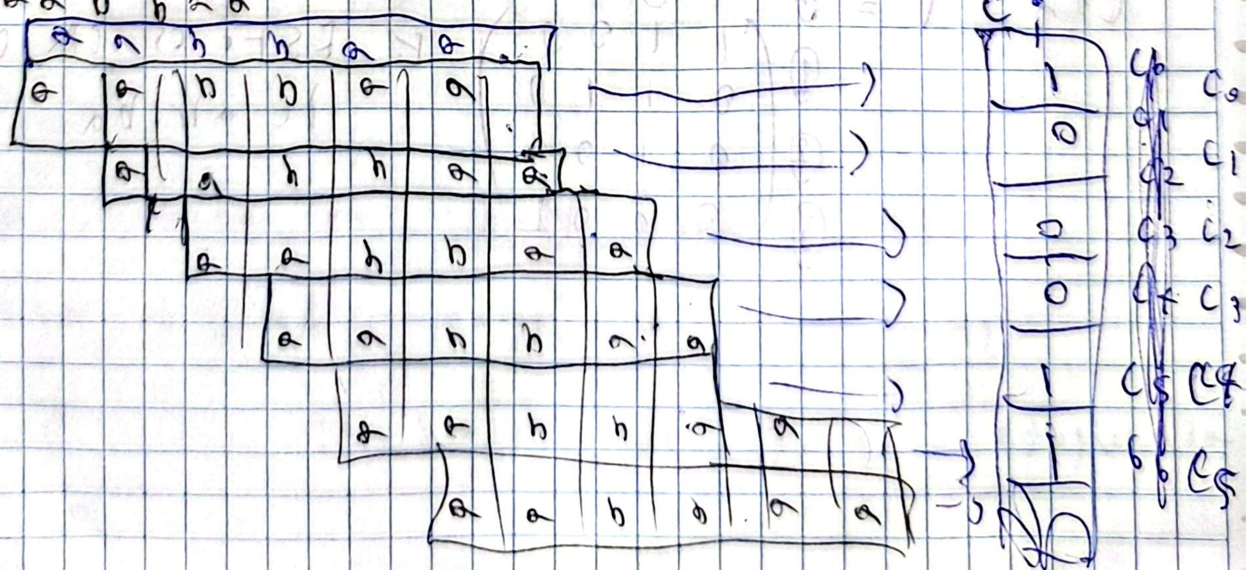
## Autocorrelación

Sea $C = (c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}) \in \{0,1\}^k$ — 1 si se cumple, 0 si no

donde $c_i = [\![ p_{i+1} \cdots p_k = p_1 \cdots p_{k-i} ]\!]$

Ejemplo.-

$p = aabbaa$



$\Rightarrow \quad C(z) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j z^j$

Se le llama el polinomio de autocorrelación

Teorema: (Guibas - Odlyzko) La función generadora ordinaria de $\mathcal{S}$ es

$$\mathcal{S}(z) = \frac{C(z)}{z^k + (1-mz)C(z)} \quad \text{con } m = |A|$$

Dem:

Sea $\mathcal{T}$ = Lenguaje en el que ocurre p solo al final

Si agregamos un símbolo al final de una palabra de $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} + \mathcal{T} = \{\varepsilon\} + \mathcal{S} \times A \qquad (I)$$

no sale p — sí sale p. ← Si agregamos un símbolo

Además si a $\mathcal{S}$ le pegamos p

$$\Rightarrow \quad \mathcal{S} \times p = \mathcal{T} \times \sum_{c_i \neq 0} p_{k-i+1} \cdots p_k \qquad (II)$$

∴ de (I)

$$S(z) + T(z) = 1 + S(z)\, m z$$

Y de (II)

$$S(z) \cdot z^k = T(z) \times C(z)$$

polinomio de correlación

I
$\Rightarrow \quad T(z) = 1 + S(z)(mz - 1)$

sust. en II
$\Rightarrow \quad S(z)\, z^k = [1 + S(z)(mz-1)]\, C(z)$

$$\Rightarrow \quad S(z) = \frac{C(z)}{z^k + (1-mz)C(z)}$$

---

## particiones de conjuntos

Sea $D = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ ¿como lo podemos particionar?

$\boxed{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ $\quad$ $\boxed{\alpha}\boxed{\beta, \gamma, \delta}$

$\boxed{\beta}\boxed{\alpha, \gamma, \delta}$ $\quad$ $\boxed{\gamma}\boxed{\alpha, \beta, \delta}$

$\boxed{\delta}\boxed{\alpha, \beta, \gamma}$ $\quad$ $\boxed{\alpha, \beta}\boxed{\gamma, \delta}$

$\boxed{\alpha, \gamma}\boxed{\beta, \delta}$ $\quad$ $\boxed{\alpha, \delta}\boxed{\beta, \gamma}$

$\boxed{\alpha}\boxed{\beta}\boxed{\gamma, \delta}$ $\quad$ $\boxed{\alpha}\boxed{\gamma}\boxed{\beta, \delta}$

$\boxed{\alpha}\boxed{\delta}\boxed{\beta, \gamma}$ $\quad$ $\boxed{\alpha}\boxed{\beta}\boxed{\gamma}\boxed{\delta}$

$\boxed{\beta}\boxed{\delta}\boxed{\alpha, \gamma}$ $\quad$ $\boxed{\gamma}\boxed{\delta}\boxed{\alpha, \beta}$

# Particiones de conjuntos

Sea $S_n^{(r)}$ = # particiones de un conjunto de tamaño $n$ en $r$ partes no vacía

Idea: usar lenguajes.

Sea $A = \{1, \dots, r\}$, elementos de $A^n$

¿codifica elementos de $S_n^{(r)}$? Es ambiguo

Ejemplo: $n = 8$, $r = 3$ una palabra de tamaño 8 con 3 letras

$\{\{7,3,8\}, \{6,4\}, \{2,1,5\}\} = X$

① ② ③

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ W = & 3 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

El numero esta en el conjunto #

$\in A^n$

Esta representación depende de como enumere los elementos de la partición ¿como lo hacemos para que sea de forma unica?

Lo hacemos con el orden lexicografico tomando el elemento mas pequeño de cada elemento y comparandolos

$\Rightarrow X = \{\{1,2,5\}, \{3,7,8\}, \{4,6\}\}$
a b c

$\Rightarrow W = aabcacbb$ Es unica

Las palabras que cumplan esta construcción serán subconjunto de $A^n$.

Notemos que siempre se empieza con el primer símbolo y cada símbolo precede al siguiente o es igual

$\Rightarrow$

Sup $A = \{b_1, \dots, b_r\}$ entonces

todos los particiones de tamaño r

$$S^{(r)} = Suc_{\geq 1}(b_1) \times b_2 \times Suc(b_1+b_2) \times b_3 \times Suc((b_1+b_2+b_3)$$

$$\dots \times b_r\, Suc(b_1+\dots+b_r)$$

$$\Rightarrow S^{(r)}(z) = \frac{z}{1-z} \cdot z^{r-1} \cdot \frac{1}{1-2z} \cdots \frac{1}{1-rz}$$

$$= z^r \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{1-jz}$$

entonces $[z^n]\, S^{(r)}(z) = S^{(r)}_{(n)}$

$$\Rightarrow S^{(r)}_n = [z^n]\, z^r \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{1-jz}$$

Teorema.- Se tiene que

$$S_n^{(r)} = \frac{1}{r!}\sum_{j=1}^{r} (-1)^{r-j}\binom{r}{j} j^n$$

Dem.- Tenemos que $S^{(r)}(z) = z^r \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{1-jz}$

$$\Rightarrow S_n^{(r)} = [z^n]\, z^r \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{1-jz} = [z^{n-r}]\, \frac{(-1)^r}{j!} \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{z-1/j}$$

Ahora, sea $p(z) = \prod_{j=1}^{r} (z - 1/j)$

$$\Rightarrow p(z) = \sum_{j=1}^{r} \frac{1/p'(1/j)}{z-1/j}$$

Pero
$$p'(z) = \sum_{k=1}^{r} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{r} \left(z - \frac{1}{i}\right) = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{z-1/k} \prod_{i=1}^{r} (z - 1/i)$$

$$= \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{r} (\ ) + \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} (z - 1/i)$$

$$\Rightarrow p'(1/j) = 0 + \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{j^{r-1}\frac{r!}{j}} \prod_{i=1}^{j-1} (i-j) \prod_{i=j+1}^{r} (i \cdots$$

$$= \frac{(-1)^{j-1}(j-1)!}{j^{r-2}\, r!}(r-j)! = \frac{(-1)^{j-1}}{j^{r-1}\binom{r}{j}} =$$

$$\therefore S_n^{(r)} = [z^{n-r}]\, \frac{(-1)^r}{r!} \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^{j-1} j^{r-1}\binom{r}{j}}{z - 1/j}$$

$$= [z^{n-r}] \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^j j^r \binom{r}{j}}{1-jz} \quad \cancel{= [z] \sum_{j=1}^{r} (-1)^j j^r \binom{r}{j}}$$

$$= [z^{n-r}]\, \frac{(-1)^r}{r!} \sum_{j=1}^{r} (-1)^j j^r \binom{r}{j} \sum_{m=0}^{\infty} j^m z^m$$

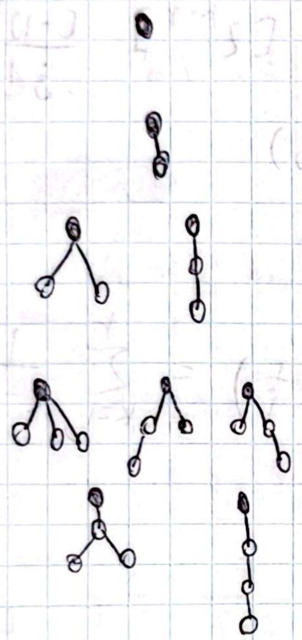
$$= [z^{n-r}] \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^r}{r!} \sum_{j=1}^{r} (-1)^j j^r \binom{r}{j} j^m \right) z^m$$

Se termina sustituyendo el termino $n-r$ en $v(z)$

# Arboles

Arboles planos.

| $n$ | $\tau_n$ | $T_n$ |
| --- | --- | --- |
| 0 | NA | 0 |
| 1 | | 1 |
| 2 | | 1 |
| 3 | | 2 |
| 4 | | 5 |



$$\Rightarrow \quad \tau = Z * Suc(\tau)$$

$$\Rightarrow \quad T(z) = z \cdot \frac{1}{1-T(z)} \quad \Rightarrow T(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{z}$$

Hay una forma que hace Lagrange para calcular los coeficientes de las FG sin usarlas explícitamente.

Formula de inversión de Lagrange

Sea $\phi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k u^k$ con $\phi_0 \neq 0$ y $\phi_k \in \mathbb{C}$

entonces existe una única solución

a la ecuación funcional

$$y(z) = z \cdot \phi(y(z))$$

en series y sus coeficientes de dicha

solución $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n$ ~~...~~ cumplen

$$y_n = \frac{1}{n}\left\{[u^{n-1}]\, \phi(u)^n\right\}$$

llamada Forma de Lagrange y

también se cumple la Forma de Bürmann

$$[z^n]\, y^k(z) = \frac{k}{n}\left\{[u^{n-k}]\, \phi(u)^n\right\}$$

Dem: sabemos que

$n y_n = [z^{n-1}]\, y'(z)$ por lo que usando

el teorema de Cauchy

$$\Rightarrow n y_n = n \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{y'(z)}{z^n}\, dz$$

pero por hip. $y(z) = z \cdot \phi(y(z))$

~~$\Rightarrow y'(z) = \phi(y(z)) + z\, \phi'(y(z))\, y'(z)$~~

~~$\Rightarrow n y_n = \frac{n}{2\pi i} \oint \frac{\phi(y(z)) + z \cdot \phi'(y(z))\, y'(z)}{z^n}\, dz$~~

$$\cancel{\Rightarrow y'(z) = \frac{\phi(y(z))}{1 - z\,\phi'(y(z))}}$$

$$\cancel{\Rightarrow n \cdot y_n = \frac{n}{2\pi i} \oint \frac{\frac{\phi(y(z))}{1 - z\,\phi'(y(z))}}{z^n}\, dz}$$

$$\cancel{= \frac{n}{2\pi i} \oint \frac{\phi(y(z))}{z^n - z^{n+1}\,\phi'(y(z))}}$$

$$\Rightarrow z = \frac{y(z)}{\phi(y(z))}$$

$$\Rightarrow n y_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{y'(z)}{y(z)^n}\, \phi(y(z))^n \, dz$$

Sea $w = y(z) \Rightarrow dw = y'(z)\, dz$

$$\Rightarrow n y_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{dw}{w^n} \cdot \phi(w)^n$$

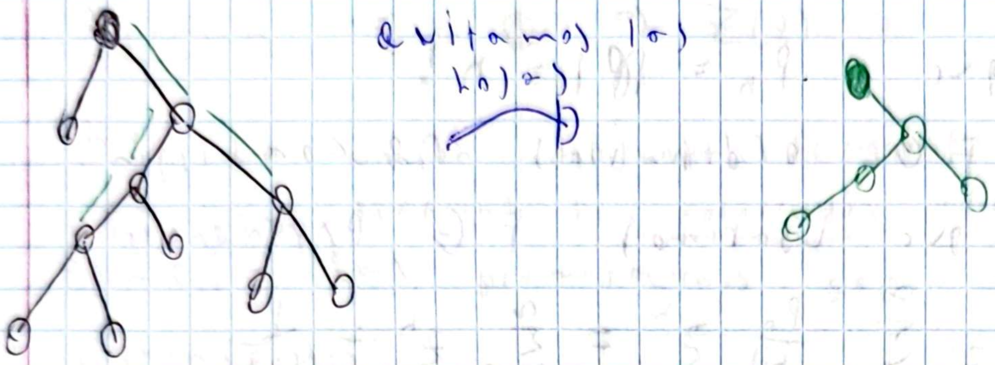
Si $I(\gamma', 0) = 1 \Rightarrow n y_n = [u^{n-1}]\, \phi(u)^n$

Pero $I(\gamma', 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{du}{u} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{y'(z)}{y(z)}\, dz$

$=$ principio del argumento $= C - P$

pero solo tiene como cero a $z = 0$ (por la ec. funcional) y es analítica $\therefore C = 1$ y $P = 0$

# Árboles planos binarios podados




$$\Rightarrow \quad \bar{B} = Z + Z \times \bar{B} + \bar{B} \times Z + Z \times \bar{B} \times \bar{B}$$

$$\Rightarrow \quad B(z) = z + 2zB(z) + zB(z)^2$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{zB(z)^2 + 2zB(z) + z = 0}$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{B(z)^2 + B(z)}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{B}(z) = z \cdot \phi(\bar{B}(z))$$

con $\phi(u) = 1 + 2u + u^2$ con $\phi_0 \neq 0$ $(\phi_0 = 1)$

$$\Rightarrow \quad \bar{B}_n = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\,\phi(u)^n$$

$$= \frac{1}{n}[u^{n-1}]\,(1+2u+u^2)^n$$

$$= \frac{1}{n}[u^{n-1}]\,(1+u)^{2n}$$

$$= \frac{1}{n}[u^{n-1}]\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}u^k$$

$$= \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1}$$

## Permutaciones

Tenemos que $P_n = |P| = n!$
y las FG ordinarias no convergen.
Así ~~~~ que usaremos FG exponenciales

$$\Rightarrow \quad P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

## Estructuras etiquetadas

Siempre pensaremos que los objetos son gráficas y sus vértices están etiquetados con $\mathbb{Z}$ de forma inyectiva (no hay dos vértices con el mismo número)

Diremos que la etiquetación de una gráfica es "buena" si la gráfica tiene "n" vértices entonces la etiquetamos con los números del 1 al n.

Tamaño = # vértices := orden

Si $A$ es una clase coloreada entonces le asociamos $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} z^n$

La función generadora exponencial

**Neutro** $\mathcal{E} = \emptyset \Rightarrow E(z) = 1$

**Atómica** $\mathcal{Z} = ① \Rightarrow Z(z) = z$

+ : La unión disjunta de gráficas ~~sin aristas~~

× : Las gráficas bien coloreadas dirigidas

Ejemplo.- Las permutaciones son caminos dirigidos (enraizados)

$\Rightarrow \mathcal{P} = \{ \emptyset, ①, \begin{matrix} ① \to ② \\ ② \to ① \end{matrix}, \begin{matrix} ① - ② - ③ \\ ① - ③ - ② \\ ② - ① - ③ \\ ② - ③ - ① \\ ③ - ① - ② \\ ③ - ② - ① \end{matrix}, \ldots \}$

$\Rightarrow P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Urnas

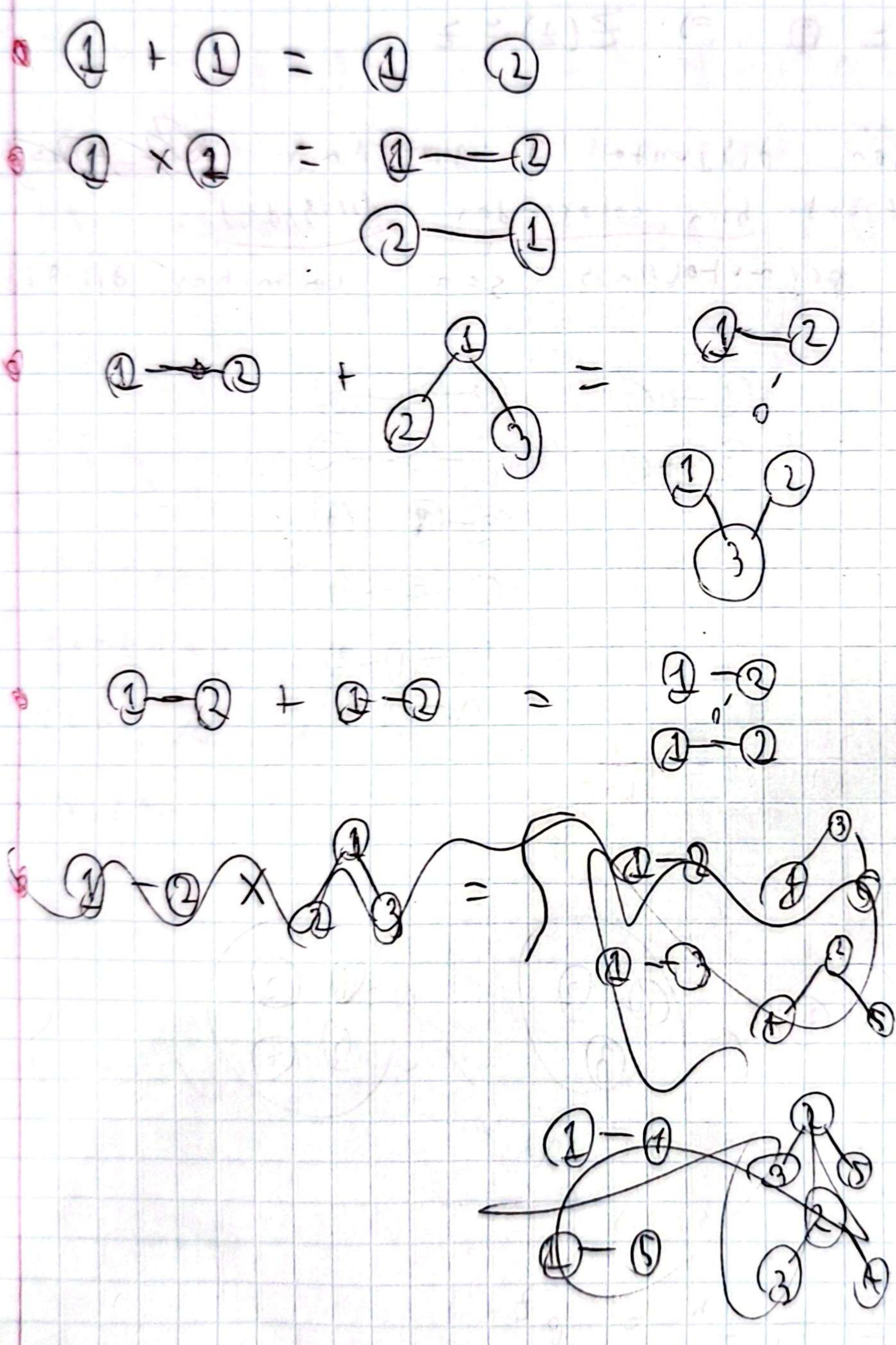
$\mathcal{U} = \{ \emptyset, ①, (① ②), (① ② ③), (① ② ③ ④), \ldots \}$

"una bolsa con pelotas"

"gráficas sin aristas"

$\Rightarrow U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^z$.

Ejemplo:



Podemos pasar de una gráfica mal etiquetada a bien etiquetada

$\langle 23, 2, 7, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, 3, 2 \rangle$

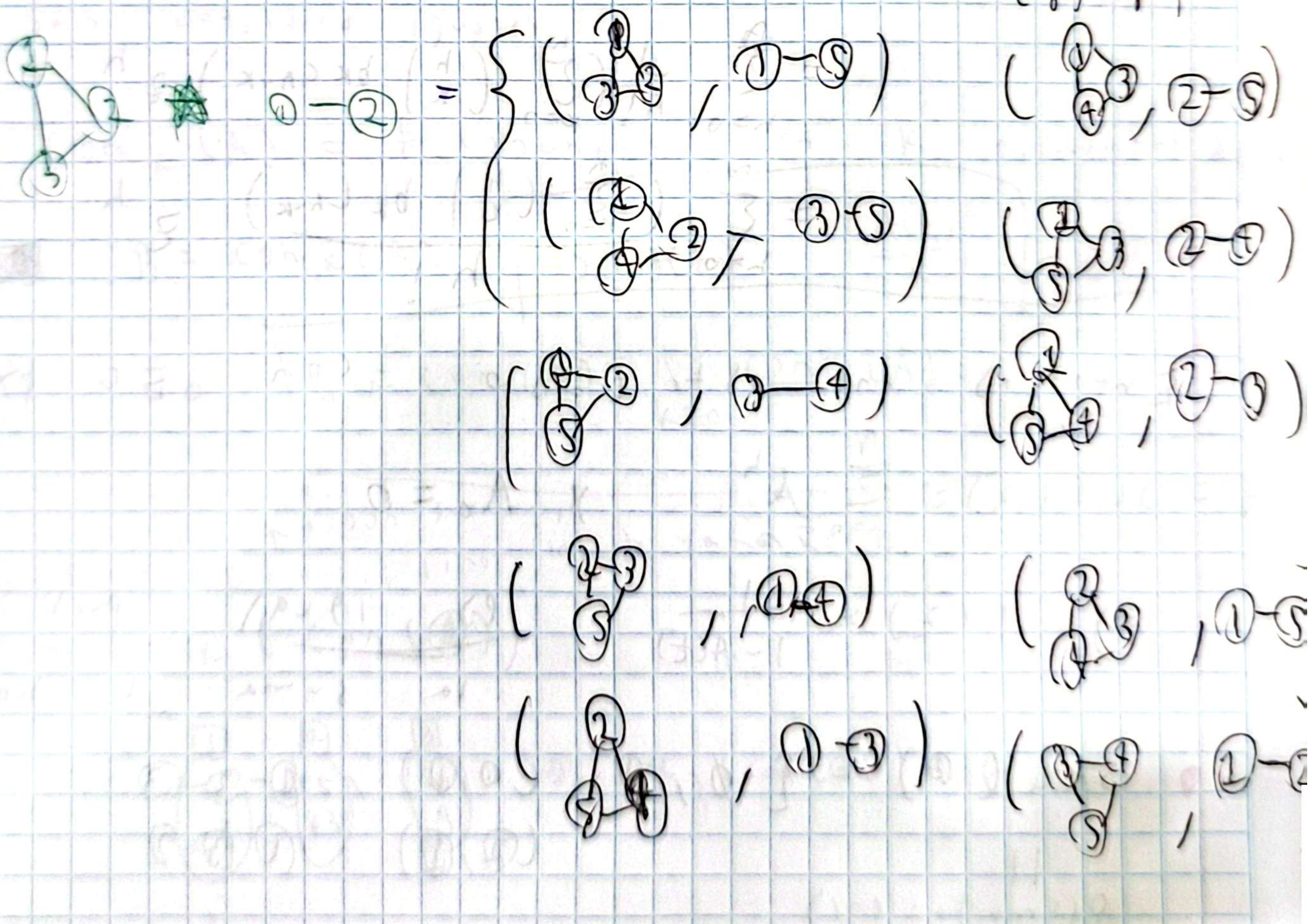
"Reducción"

y al revez también

$\langle 4, 1, 3, 2 \rangle \rightarrow \langle 7, 2, 6, 4 \rangle$

"Expansión"

¿Se define? $\beta \star \gamma = \left\{ (\bar{\beta}, \bar{\gamma}) \;\; \begin{array}{l} \text{bien coloreado} \\ \text{reducción}(\bar{\beta}) = \beta \\ \text{reducción}(\bar{\gamma}) = \gamma \end{array} \right\}$



∴ si $\beta \in B$ y $\gamma \in \mathcal{C}$,

y $\alpha \in \beta \star \gamma$ con $|\beta| = k$, $|\gamma| = n-k$

$\Rightarrow |\alpha| = n$

$$\Rightarrow a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k c_{n-k}$$

sean $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$ y $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$

$$\Rightarrow B(z) \cdot C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} \cdot \frac{c_{n-k}}{(n-k)!} \right) z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k c_{n-k} \right) z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k c_{n-k} \right)}{n!} z^n \quad \blacksquare$$

Entonces en este caso con FG exp.

$B = \text{SEC}(A) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ y $A_0 = 0$

$\Rightarrow B(z) = \frac{1}{1 - A(z)}$ es igual para la suma ordinal

• $\text{SEC}(①) = \{ \emptyset, ①, (①,②), ①-②-③$
$(②,①)$ ①③②
⋮

||
permutaciones

$\Rightarrow$

## Notación

El análogo a los multiconjuntos lo llamaremos con(A) en vez de MuCon(A) cuando usamos FG-Exponenciales.

$$\text{con}(A) = \text{suc}(A)/\sim$$

Solo es un elemento

- $\text{con}(①) = \{ \emptyset, ①, \boxed{①②}, \boxed{①②③}, \boxed{①②③④}, \ldots \}$

Todas las permutaciones de cada gráfica las considero iguales.

- $\text{con}_k(A) =$ conjuntos con $k$ elementos de $A$

Si $B = \text{con}_k(A) \Rightarrow B(z) = \dfrac{A(z)^k}{k!}$

Y $\therefore$ $\mathcal{C} = \text{con}(A) = \bigcup_{k \geq 0} \text{con}_k(A) = e^{A(z)}$

- Ejemplo: $A = \text{suc}_k(\text{con}(①))$

no son sucesiones sino los de tamaño $k$.

$\Rightarrow$ $\boxed{1}$ 2 3 7, $\boxed{2}$ 5 4 3, $\boxed{3}$ 6 9 $\to \text{suc}_3(\text{con}(①)) \in A_9$

$\Rightarrow A_9 = |A_9| = \#\{ = |\{ f : \{1, \ldots, 9\} \to \{1, 2, 3\}\}|$

$\therefore A_n = |\{ f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}\}|$

y si usamos lo anterior

$A(z) = e^{rz}$

~~$A = Cic_k(B) = Suc_k(B)/\delta_k$~~

~~$\Rightarrow A(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B(z)^k}{k} = \log \frac{1}{1-B(z)}$~~

Recordamos:

- $Suc(\mathbb{1})$ = permutaciones $\frac{1}{1-z}$
- $Con(\mathbb{1})$ = Urnas $e^z$
- $Cic(\mathbb{1})$ = permutaciones cíclicas $\log \frac{1}{1-z}$
  (collares con pelotas todas distintas
- Suprayecciones de un conjunto de tamaño $n$ sobre un conjunto de tamaño $r$.

$R = Suc(Con_{\geq 1}(\mathbb{1}))$

$\Rightarrow R(z) = \frac{1}{1-(e^z-1)} = \frac{1}{2-e^z}$

$[z^n]R(z)$ = # funciones suprayectivas de un conjunto de tamaño $n$ a cualquier conjunto de tamaño finito

$\# \{ f : [n] \to [r] \mid r \in \mathbb{N}, f \text{ supra} \}$

Las cantidad, ahora sí, de funciones suprayectivas de un conjunto de tamaño "n" a un conjunto de tamaño "r" serán:

$$R^{\langle r \rangle} = SUC_r(CON_{\geq 1}(\mathbb{1}))$$

$$\Rightarrow R^{\langle r \rangle}(z) = (e^z - 1)^r.$$

particiones.-

$$S = CON(CON_{\geq 1}(\mathbb{1}))$$ "son particiones de conjuntos" de tamaño n

$$\Rightarrow y\ S^{\langle k \rangle} = CON_k(CON_{\geq 1}(\mathbb{1}))$$ "son particiones de conjuntos en k partes"

$$\Rightarrow S^{\langle k \rangle}(z) = \frac{(e^z - 1)^k}{k!}.$$

$$\therefore S(z) = e^{e^z - 1}$$

palabras.-

$$W = SUC_r(CON(\mathbb{1}))$$ "palabras con alfabeto de ~~tamaño~~ r"

$$\Rightarrow W(z) = (e^z)^r = e^{rz}$$

$$\Rightarrow W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} z^n$$

$Cic(B)$:

$A = Cic_K(B) := Suc_K(B)/S_K$

donde $(B_0, \dots, B_{K-1}) \overset{S_K}{\sim} (\gamma_0, \dots, \gamma_{K-1})$

$\Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z}$ t.q. $\beta_j = \gamma_{j+n} \pmod{K} \quad \forall j$

$\Rightarrow A(z) = \dfrac{B(z)^K}{K}$

$\therefore \quad A = Cic_{\geq 1}(B) \Rightarrow A(z) = \sum_{K=1}^{\infty} \dfrac{B(z)^K}{K} = \log \dfrac{1}{1-B(z)}$

$B_0 = 0$

Ejemplo:

$\star\ A = Suc(Cic_{\geq 1}(\mathcal{A}))$ Alineaciones

$\Rightarrow A(z) = \dfrac{1}{1 - \log \frac{1}{1-z}}$

$\star\ B = Con(Cic_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$ permutaciones

$\Rightarrow B(z) = \exp\left(\log \dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1}{1-z}$

~~Sabemos que~~

Permutaciones que se descomponen en "r" ciclos.

$\Rightarrow$ $P^{\langle r \rangle} = \text{Con}_r(\text{Cic}_{\geq 1}(\textcircled{1}))$

$\Rightarrow$ $P(z) = \dfrac{\left(\log \frac{1}{1-z}\right)^r}{r!}$

Involuciones:-

ciclos que son involuciones

osea permutaciones t.q. $\sigma^2 = Id.$

$\therefore$ son unión de ciclos de tamaño 1 ó 2

$I = \text{Con}(\text{Cic}_{\{1,2\}}(\textcircled{1}))$

$\Rightarrow$ $I(z) = \exp\left(\frac{z^1}{1} + \frac{z^2}{2}\right) = e^{z + \frac{z^2}{2}}$

Recursiones:-

Arboles planos ~~coloreados~~ enraizados (etiquetados)

$\Rightarrow$ $A = Z * \text{Suc}(A)$ ~~Atomo~~ atomo seguido de una sucesión de arboles.

$\Rightarrow$ $A(z) = z\dfrac{1}{1-A(z)}$

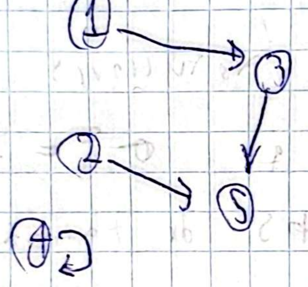
* Mapeos y graficas funcionales. $\{1,\dots,n\}$

Pensamos en funciones $\mathcal{F} := \{ f : [1,n] \to [1,n] \}$

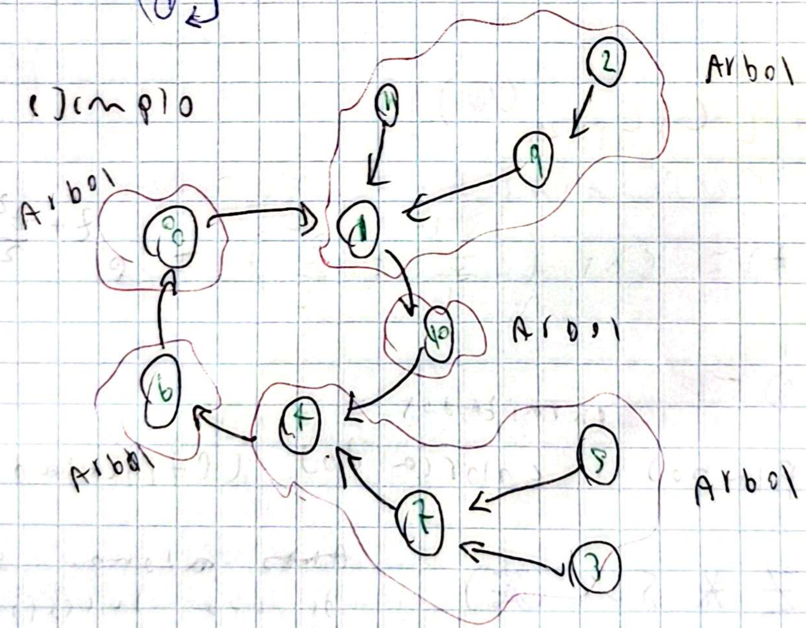
la grafica funcional sera la sig.

$f$ t.q. $f(1)=3$, $f(2)=5$, $f(3)=5$, $f(4)=4$

$\Rightarrow$



otro ejemplo




Conjunto de ciclos de Arboles

$$\mathcal{F} = Con_{\geq 1}(Cic(\overset{\text{Arboles}}{A}))$$

$$\Rightarrow F(z) = \exp\left(\log \frac{1}{1-A(z)}\right) - 1$$

$$= \exp\left(\log \frac{1}{1-\left(\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}\right)}\right) - 1$$

- Árboles de Cayley

Árboles no planos etiquetados enraizados

$\Rightarrow \mathcal{T} = \mathcal{Z} \times Con(\mathcal{T})$

$\Rightarrow T(z) = z \cdot e^{T(z)}$

Usamos Lagrange $\Rightarrow T(z) = z\, \phi(T(z))$

con $\phi(w) = e^{w}$

$\Rightarrow \frac{T_n}{n!} = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\, \phi(u)^n$

$= \frac{1}{n}[u^{n-1}]\, e^{nu} = \frac{1}{n}[u^{n-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} u^k$

$= \frac{1}{n} \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{n!}$

$\Rightarrow T_n = n^{n-1}$

- Bosques de árboles de Cayley

Un bosque es un conjunto de árboles

En este caso queremos que hay

$\underline{k}$ árboles

$\Rightarrow \mathcal{B} = Con_k(\mathcal{T})$

$\Rightarrow B(z) = \frac{T(z)^k}{k!}$

$\Rightarrow \frac{B_n}{n!} = [z^n] \frac{T(z)^k}{k!}$

$= \frac{1}{k!} [z^n]\, T(z)^k$

Escaneado con CamScanner

y usando la formula de Bourman

$$\Rightarrow \frac{B_n}{n!} = \frac{1}{k!}\frac{k}{n}[u^{n-k}]\,\phi(u)^n$$

$$\Rightarrow \frac{B_n}{n!} = \frac{1}{k!}\frac{k}{n}[u^{n-k}]\,e^{un}$$

$$= \frac{1}{k!}\frac{k}{n}[\,]\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n^m}{m!}u^m$$

$$= \frac{1}{k!}\frac{k}{n}\frac{n^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{n^{n-k-1}}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}n^{n-k} = \binom{n-1}{k-1}n^{n-k}$$

- mapeos binarios

es mismo que los mapeos funcionales pero que los arboles sean binarios, ademas ~~Los arboles sean~~

$\hat{\tau} = z \times \mathrm{Con}_{\{0,1,2\}}(\tau)$

~~$\tau = z + z \times \tau$~~

~~$\tau = z + z \times \mathrm{Con}_2(\tau)$~~

~~$\tau = z + z \times \tau + z \times \tau$~~

- Los arboles binarios son que tienen uno o dos hijos

~~$\hat{\tau} = z + z \times \tau$~~ $\quad \hat{\tau} = z \times \tau$

- Los arboles que yo quiero son

← mapeos binarios

$$\Rightarrow \mathcal{C} = \mathrm{CiC}(\hat{\tau}) \Rightarrow B = \mathrm{CON}(\mathcal{C})$$

$$\Rightarrow T(z) = z\cdot\left(1 + \frac{T(z)^2}{2}\right) \Rightarrow T(z) = \frac{2 - \sqrt{4 - 8z^2}}{2z}$$

$$\Rightarrow \hat{T}(z) = 1 - \sqrt{1 - 2z^2}$$

$$\Rightarrow C(z) = \log\frac{1}{\sqrt{1-2z^2}}$$

$$\therefore B(z) = \exp\left(\log\frac{1}{\sqrt{1-2z^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-2z^2}}$$

$$\Rightarrow \quad B_n = \frac{((2n)!)^2}{2^n (n!)^2}$$

~~Def:~~

(a p . 3) Parametros y FG Bivariadas

$\chi : \mathcal{C} \to \mathbb{N}$ función parametro

- $f(z,u) = \sum_{n,k \geq 0} f_{n,k} \, z^n u^k$

donde $f_{n,k} = \# \{ \alpha \in \mathcal{C} : |\alpha|_{\mathcal{C}} = n, \ \chi(\alpha) = k \}$

Funciones generadoras Bivariadas

- parametros
- Distribución de probabilidad

Sea $\xi$ clase combinatoria con función de tamaño $|\cdot|_\xi : \xi \to \mathbb{N}$ con

$C_n = \#\{\alpha \in \xi \mid |\alpha|_\xi = n\} < \infty$

~~Un parametro sera una función~~

$\xi$ hereda una función de ~~probabilidad~~ distribución

una

Recordatorio: Distribución de probabilidad en un conjunto finito $\mathcal{F}$ es una función $p : \mathcal{F} \to [0,1]$ t.q. $\sum_{\alpha \in \mathcal{F}} p(\alpha) = 1$ donde $p(\alpha)$ es la probabilidad de que ocurra alfa.

la cual es la uniforme.

$$\forall \alpha \in \mathcal{F}, \quad p(\alpha) = \frac{1}{|\mathcal{F}|}$$

Un parametro es una función

$$\chi : \xi_n \to \mathbb{N}$$

que no es más que una variable aleatoria en el esp. de probabilidad $(\xi_n, P_{uniforme})$

y le asociamos la FG bivariada

$$(\xi, \chi) \to C(z, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{n,k} z^n u^k$$

con $C_{n,k} = \#\{\alpha \in \xi_n \mid |\alpha| = n \text{ y } \chi(\alpha) = k\}$

Escaneado con CamScanner

Ejemplo:

Arboles generales planos, sabemos que

$\mathcal{T} = \mathcal{Z} \times \mathcal{T}^* \Rightarrow T(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$

y sea $\chi: \mathcal{T} \to \mathbb{N}$ dada por

$\chi(\alpha) = \#$ hojas de $\alpha$

para encontrar la FG bivariada hacemos uso de ~~Marcadores~~

otro ejemplo de parametro en este caso es

$\chi^{k es}(\alpha) = \#$ nodos con $k$ descendientes

$\Rightarrow$ sabemos que (reescribiendo)

$$\mathcal{T} = \mathcal{Z} \times (\mathcal{E} + \mathcal{T} + \mathcal{T}^2 + \mathcal{T}^3 + \cdots)$$

sea $\mathcal{M}$ una clase neutra (marcador)

entonces def (Ejemplo con $k=2$)

$$\bar{\mathcal{T}} = \mathcal{Z} \times (\mathcal{E} + \bar{\mathcal{T}} + \mathcal{M} \times \bar{\mathcal{T}}^2 + \bar{\mathcal{T}}^3 + \cdots)$$

$$\Rightarrow \bar{T}(z,u) = z\,(1 + \bar{T}(z,u) + u\,\bar{T}(z,u)^2 + \bar{T}(z,u)^3 + \cdots)$$

$$= z \cdot \left( \frac{1}{1-T(z,u)} - T(z,u)^2 + u \cdot T(z,u)^2 \right)$$

$$\Rightarrow \bar{T}(z,u) = \frac{z}{1-\bar{T}(z,u)} - z\,T(z,u)^2 (1-u)$$

$\Rightarrow \bar{T} - \bar{T}^2 = z - z\bar{T}^2(1-u)(1-\bar{T})$

En general para $k$

$z(1-u)\bar{T}^{k+1} - z(1-u)\bar{T}^k + \bar{T}^2 - \bar{T} + z = 0$

con $k=1$

$\Rightarrow (z(1-u)+1)\bar{T}^2 - (z(1-u)+1)\bar{T} + z = 0$

$$\Rightarrow T(z,u) = \frac{z(1-u)+1 - \sqrt{(z(1-u)+1)^2 - 4(z(1-u)+1)z}}{2(z(1-u)+1)}$$

---

Dada la clase $(\mathcal{E}, |\cdot|_{\mathcal{E}})$ se le asocia el esp. de probabilidad $(\mathcal{E}_n, P_n)$ con $\mathcal{E}_n = \{\alpha \in \mathcal{E} \mid |\alpha| = n\}$ y $P_n(x) = \frac{1}{|\mathcal{E}_n|} = \frac{1}{C_n}$ la probabilidad uniforme, entonces un parámetro $\chi : \mathcal{E} \to \mathbb{N}$ es una variable aleatoria en $(\mathcal{E}_n, P_n)$

Esperanza.- $\mathbb{E}_{\mathcal{E}_n}(\chi) = \sum_{x \in \mathcal{E}_n} P_n(x)\chi(x)$

$= \sum_{x \in \mathcal{E}_n} \frac{\chi(x)}{C_n} = \frac{1}{C_n} \sum_{x \in \mathcal{E}_n} \chi(x)$

m-momento $\mathbb{E}_{\mathcal{E}_n}(\chi^m) = \sum_{x \in \mathcal{E}_n} P_n(x)\chi(x)^m$

$= \frac{1}{C_n} \sum_{x \in \mathcal{E}_n} \chi(x)^m$

Varianza.-

$$\mathbb{V}_{\xi_n}(X) = \mathbb{E}((X - E_{\xi_n}(X))^2)$$

Desviación Estandar.-

$$\sigma_{\xi_n}(X) = \sqrt{\mathbb{V}_{\xi_n}(X)}$$

Recordamos)

$\xi_{n,k} = \{ x \in \xi_n \mid X(x) = k \}$ y $C_{n,k} = \# \xi_{n,k}$

$$\Rightarrow \quad C(z,u) = \sum_{n\geq 0} \sum_{k\geq 0} C_{n,k} z^n u^k$$

$$\Rightarrow \quad C(z,1) = \sum_{n\geq 0} \sum_{k\geq 0} C_{n,k} z^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} z^n \underbrace{\sum_{k\geq 0} C_{n,k}}_{C_n}$$

$$\Rightarrow \quad C(z,1) = \sum_{n\geq 0} C_n z^n$$

Tenemos que $\mathbb{E}_{\xi_n}(\mathcal{X}) = \frac{1}{C_n} \sum_{x \in \xi_n} \mathcal{X}(x)$

pero $\sum_{x \in \xi_n} \mathcal{X}(x) = 0 \cdot C_{n,0} + 1 \cdot C_{n,1} + 2 \cdot C_{n,2} + \cdots$

por otro lado

$C(z,u) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} C_{n,k} z^n u^k$

$\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial u} = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 1} k \cdot C_{n,k} z^n u^{k-1} := \Omega(z,u)$

$\Rightarrow \Omega(z) := \Omega(z,1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k \geq 1}^{\infty} k\, C_{n,k} \right) z^n \leftarrow$ FG cumulativa de $\mathcal{X}$

$\therefore \sum_{x \in \xi_n} \mathcal{X}(x) = [z^n]\, \Omega(z,1)$

$\therefore \mathbb{E}_{\xi_n}(\mathcal{X}) = \frac{1}{[z^n]C(z,1)} \cdot [z^n] \left. \frac{\partial C(z,u)}{\partial u} \right|_{u=1}$

$= \frac{[z^n]\, \Omega(z)}{[z^n]\, C(z)}$

Ejemplo.-

Sea $A = \{a, b, c\}$ alfabeto y $\xi = A^* = \mathrm{SEC}(A)$

y sea $\mathcal{X} : \xi \to \mathbb{N}$ t.q. $\forall w \in \xi$

$\mathcal{X}(w) = \#$ a's en $w$

$\Rightarrow \mathbb{E}_{\xi_n}(\mathcal{X}) = \frac{n}{3}$ "esto empíricamente"

Ahora, $\xi = \mathrm{SEC}(A) = \mathrm{SEC}(a + b + c)$

~~$= \mathrm{SEQ}($~~

$\Rightarrow \quad \overline{\xi} = \mathrm{Suc}(n \cdot a + b + c)$

$\Rightarrow \quad C(z,u) = \dfrac{1}{1-(uz+2z)} = \dfrac{1}{1-2z-uz}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\partial C}{\partial u} = -\dfrac{1}{(1-2z-uz)^2} \circ (-z)$

$= \dfrac{z}{(1-2z-uz)^2}$

$\Rightarrow \quad \Omega(z) = \Omega(z,1) = \left.\dfrac{\partial C}{\partial u}\right|_{u=1} = \dfrac{z}{(1-3z)^2}$

$\cancel{= \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, 3^{n-1} z^n$

$\Rightarrow \quad [z^n]\, \Omega(z) = n\, 3^{n-1}$

$\cancel{\Rightarrow \quad \gamma \quad C(z,1) = \dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n}$

$\Rightarrow \quad \#_{\xi_n}(z) = \dfrac{1}{C_n} \cdot [z^n]\, \Omega(z)$

$= \dfrac{1}{3^n} \cdot n \cdot 3^{n-1} = \dfrac{n}{3}$

Ahora,

$$\sum_{x \in \mathcal{E}_n} \mathcal{X}(x)^m = 0^m \cdot C_{n,0} + 1^m \cdot C_{n,1} + 2^m C_{n,2} + \cdots$$

Para esto se hace uso del m-momento factorial

$\Rightarrow$ m-momento factorial $:= \mathbb{E}(\mathcal{X}(\mathcal{X}-1)\cdots(\mathcal{X}-n+1))$

$\mathcal{X}$

Cero momento fac $= \mathbb{E}(\mathcal{X})$

1er mom. fac: $\mathbb{E}(\mathcal{X}(\mathcal{X}-1)) = \mathbb{E}(\mathcal{X}^2) - \mathbb{E}(\mathcal{X})$

Notemos que

$$\frac{\partial C}{\partial u} = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 1} k \, C_{n,k} \, z^n u^{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=2} k(k-1) C_{n,k} z^n u^{k-2}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}\right|_{u=1} = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) C_{n,k} \right) z^n$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}_{\mathcal{E}_n}(\mathcal{X}(\mathcal{X}-1)) = \frac{1}{C_n} [z^n] \left.\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}\right|_{u=1}}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^m C(z,u)}{\partial u^m}\right|_{u=1} := \Omega^{(m)}(z)$$

$$\Rightarrow \frac{[z^n] \, \Omega^{(m)}(z)}{[z^n] \, C(z)} = \mathbb{E}_{\mathcal{E}_n}(\mathcal{X}(\mathcal{X}-1)\cdots(\mathcal{X}-m+1))$$

Con esto

$$\mathbb{V}_{\xi_n}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$\mathbb{E}$ ~~(h)~~

$$\therefore \mathbb{V}_{\xi_n}(X) = \frac{1}{[z^n]C(z)}\left(\frac{\partial^2 C(z,u)}{\partial u^2}\bigg|_{u=1} + \frac{\partial C(z,u)}{\partial u}\bigg|_{u=1} - \frac{1}{C_n}\left(\frac{\partial C(z,u)}{\partial u}\right)^2\right)$$

---

Corolario: Se tiene que

- $\mathbb{E}_{\xi_n}(X) = \dfrac{[z^n]\,\Omega^{(1)}(z)}{[z^n]\,C(z)}$

- $\mathbb{E}_{\xi_n}(X) = \dfrac{[z^n]\,\Omega^{(2)}(z)}{[z^n]\,C(z)} + \mathbb{E}_{\xi_n}(X)$

- $\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$

Ejemplo.- # ciclos en permutaciones aleatorias

"universo etiquetado"

Recordemos que las permutaciones:

$$P = \begin{cases} Suc(\mathcal{Z}) \\ \text{ó} \\ Con(Cic(\mathcal{Z})) \end{cases}$$ ← Esta si me identifica los ciclos

Ahora marquemos los ciclos.

$$\bar{P} = Con(\mathcal{U} * Cic(\mathcal{Z}))$$

$$\Rightarrow \bar{P}(z,u) = \exp\left(u \cdot \log\left(\frac{1}{1-z}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \bar{P}(z,u) = \frac{1}{(1-z)^u} \Rightarrow P(z) = \bar{P}(z,1) = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^k$$

Así $$\Omega^{(1)}(z) = \frac{\partial \bar{P}}{\partial u}\Big|_{u=1} = \left(\frac{1}{1-z}\right)^u \cdot \log\left(\frac{1}{1-z}\right)\Big|_{u=1}$$

$$= \frac{1}{1-z} \log\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

$$\Omega^{(2)}(z) = \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial u^2}\Big|_{u=1} = \left(\frac{1}{1-z}\right)^u \log^2\left(\frac{1}{1-z}\right)\Big|_{u=1}$$

$$= \frac{1}{1-z} \log^2\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

$$\Rightarrow \Omega^{(1)}(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}\right) z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} H_k z^k$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{[z^n]\, \Omega^{(1)}(z)}{[z^n]\, P(z)} = \frac{H_n}{1} = H_n$$

Universo fondo cromatico

Ejemplo.- Composiciones de enteros.

Formas de sumar "n" donde el orden importa

$\mathcal{C} = SEQ(SEQ_{\geq 1}(Z))$

$\Rightarrow C(z) = \frac{1-z}{1-2z} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{n-1} z^{k}$

$\Rightarrow$ sea $\bar{X} = (X_1, X_2)$ con

$X_1 = \#$ sumandos iguales a 1

$X_2 = \#$ sumandos iguales a 2

Ejem: $10 = \underbrace{\overset{\frown}{1+1}+\bar{2}+3+3}_{x} \in \mathcal{C}_{10}$

$\Rightarrow X_1(x) = 2$ y $X_2(x) = 1$

¿ promedio de $X_1$ y $X_2$ ?

$\Rightarrow$ Tenemos que $\mathcal{C} = SEQ(z + z^2 + \dots)$

$\Rightarrow \tilde{\mathcal{C}} = SEQ(M_1 \times z + M_2 \times z^2 + z^3 + z^4 + \dots)$

$\Rightarrow C(z, u_1, u_2) = \frac{1}{1 - \left(u_1 z + u_2 z^2 + \frac{z^3}{1-z}\right)}$

$= 1 + u_1 z + (u_1^2 + u_2) z^2 + (1 + u_1^3 + 2 u_1 u_2) z^3$

Recordemos los <u>ciclos</u>

Sea $\zeta$ una clase sin elementos neutros

$\Rightarrow A = \text{cic}(\zeta) = \bigcup_{k\geq 1} \text{suc}_k(\zeta)/\alpha_k$

con la relación, $(x_0, \dots, x_{k-1}) \underset{\alpha_k}{\sim} (y_0, \dots, y_{k-1})$

$\Leftrightarrow \exists n$ t.q $x_{j+n \,(\text{mod}\, k)} = y_j \quad \forall j = 0, \dots, k-1$

Ahora sí probaremos la formula de los ciclos $A(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} \log\left(\frac{1}{1-C(z^k)}\right)$

Funciones generadoras de Dirichlet

$a_n \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$

Cosas que ya sé: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}}$

- Formula de inversión: si $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ~~multiplicativas~~)

t.q $f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d)$

- Producto de Dirichlet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n * b_n)}{n^s} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}\right)$$

convolución de Dirichlet

## Dem Cic(b)

Tenemos que $\mathcal{C} = Cic(A) = \bigcup_{k\geq 1} Suc_k(A)/\sigma_k$

Ahora sea $S = Suc_{\geq 1}(A)$ y vamos a marcar las partes. Sabemos que

$S(z) = \frac{A(z)}{1-A(z)}$ con ello entonces

$\overline{S} = Suc_{\geq 1}(\mu \times A)$

$\Rightarrow \overline{S}(z,u) = \frac{u\,A(z)}{1-u\,A(z)}$

una sucesión en $S$ es $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_i \in A$

pero podemos separarla en pequeñas ciclos

$(\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_d}, \alpha_1, \dots, \alpha_d, \dots, \underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_d}_{\sigma})$

$\Rightarrow (\sim) = (\underbrace{\sigma, \dots, \sigma}_{\frac{n}{d}})$

entonces una sucesión es primitiva si $\nexists$ $\sigma$ t.q. $\alpha = (\sigma, \dots, \sigma)$

Consideremos $PS = \{\alpha \in S \mid \alpha \text{ es primitivo}\}$

Con ello tenemos la nueva especificación

$\overline{S}(z,u) = \sum_{k\geq 1} PS(z^k, u^k)$

$\Rightarrow S_n = \sum_{d|n} (PS)_d \overset{\text{inversión}}{\Rightarrow} (PS)_n = \sum_{d|n} \mu(d)\, S_{\frac{n}{d}}$

Escaneado con CamScanner

$$PS(z,u) = \sum_{k\geq 1} \mu(k)\, S(z^k, u^k)$$

Ahora definamos los ciclos primitivos

$PC$ = ciclos primitivos y la podemos

obtener a partir de las sucesiones primitivas

$$PC \xleftarrow{u^d \to} PS(z,u) \xrightarrow{u^d \to \frac{1}{d} u^d} PC(z,u)$$

$$PC(z,u) = \sum_{n,s\geq 1} (PC)_{n,s}\, z^n u^s$$

$$= \sum_{n,s\geq 1} \frac{(PS)_{n,s}}{s} z^n u^s$$

$$= \sum (PS)_{n,s}\, z^n \int u^{s-1}\, du$$

$$= \int \frac{1}{u} \sum (PS)_{n,s}\, z^n u^s\, du$$

$$= \int \frac{1}{u} PS(z,u)\, du$$

$$= \int \frac{1}{u} \sum_{k\geq 1} \mu(k) \frac{u^k A(z^k)}{1-u^k A(z^k)}\, du$$

$$= \sum_{k\geq 1} \mu(k) \cancel{\sum_{n\geq 1}} \int \frac{u^k A(z^k)}{1-u^k (A(z^k)}$$

serie geo.

$$= \sum_{k\geq 1} \mu(k) \sum_{n\geq 1} \int \frac{(u^k A(z^k))^n}{u}\, du$$

$$= \sum_{k\geq 1} \mu(k) \sum_{n\geq 1} A(z^k)^n \frac{(u^k)^n}{nk} = \sum_{k\geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \sum_{n\geq 1} \frac{[A(z^k)u^k]^n}{n}$$

$$= \sum_{k\geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \log\left(\frac{1}{1-u^k A(z^k)}\right)$$

$\therefore$ Finalmente, los ciclos no son más que ciclos primitivos unidos

$$\Rightarrow C(z,u) = \sum_{k\geq 1} PC(z^k, u^k)$$

$$\Rightarrow C(z,u) = \sum_{k\geq 1} \sum_{r\geq 1} \frac{\mu(r)}{r} \log\left(\frac{1}{1-u^{kr} A(z^{kr})}\right)$$

$n = rk$

$$= \sum_{k\geq 1} \left(\sum_{d\mid k} \frac{\mu(d)}{d}\right) \log\left(\frac{1}{1-u^k A(z^k)}\right)$$

$$= \sum_{k\geq 1} \frac{\varphi(k)}{k} \log\left(\frac{1}{1-u^k A(z^k)}\right)$$

$$\therefore \; C(z) \underset{u=1}{=} \sum_{k\geq 1} \frac{\varphi(k)}{k} \log\left(\frac{1}{1-A(z^k)}\right)$$

Escaneado con CamScanner

# Análisis Asintótico

muchas veces no podemos calcular de forma explícita el valor de una sucesión pero si conocemos su función generadora (ejemplo partículas) es por ello que se analizan las propiedades analíticas de la FG para determinar comportamientos de la sucesión.

Habrá dos principios del análisis asintótico

I. La posición de las singularidades dicta el crecimiento exponencial

II. La naturaleza de las singularidades dicta el crecimiento sub exponencial

Notación:

Sean $\phi, g : \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, decimos que

- $\phi(s) = O(g(s))$ si $\exists K$ t.q. $|\phi(s)| \leq K\,|g(s)|$ $\forall s \in V$ vecindad de $s_0 \in \mathbb{C}$
  $s \to s_0$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{\phi(s)}{g(s)}$ es acotado si $s \to s_0$

y se dice

" $\phi$ es de orden a lo más $g$ cuando $s \to s_0$ "

Decimos que

* $\phi(s) = o(g(s))$ si $\dfrac{\phi(s)}{g(s)} \underset{s \to s_0}{\longrightarrow} 0$
  $s \to s_0$

y decimos

" $\phi$ es de orden menor que $g$ "

* $\phi(s) \sim g(s)$ si $\displaystyle\lim_{s \to s_0} \frac{\phi(s)}{g(s)} = 1$
  $s \to s_0$

" $\phi$ es de ~~orden exactamente igual~~ asintoticamente equivalente a $g$ "

* $\phi(s) = \Omega(g(s))$ si $\exists\, c > 0$ y $V$ vecindad
  $s \to s_0$

de $s_0$ t.q $|\phi(s)| > c \cdot |g(s)|$ $\forall s \in V$

" $\phi$ es de orden al menos $g$ "

* $\phi(s) = \Theta(g(s))$ si $\phi(s) = O(g(s))$
  y $\phi(s) = \Omega(g(s))$

" $\phi$ es de orden exactamente $g$ "

$\iff 0 < c_1 < \left| \dfrac{\phi(s)}{g(s)} \right| < c_2$

Nos interesan sucesiones $\{f_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{N}$

y sobre todo trabajaremos $\delta_0 = \infty$

**Def.-** Decimos que $\theta(n)$ es subexponencial si

$$\lim_{n\to\infty} \theta(n)^{1/n} = 1$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \frac{\log \theta(n)}{n} = 0$$

**Ejemplos.-** $\theta(n) = p(n)$, $\theta(n) = \log n + 3$

$\theta(n) = \sin(n)$ pero $\theta(n) = 2^n$ no lo es.

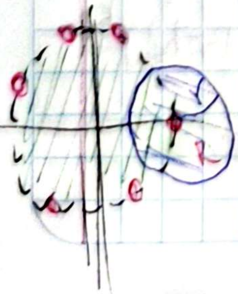
**Def.-** ~~Decimos~~ Dada una sucesión $\{f_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{N}$ se tiene que si existe $\theta$ subexponencial y $\lambda > 0$ t.q. $f_n = \theta(n)\lambda^n$ escribimos $f_n \bowtie \lambda^n$

$\lambda$ es el crecimiento exponencial

**Lema de Pringsheim**

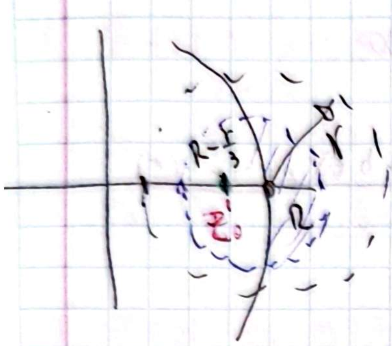
Supongamos que $F(z) = \sum_{n\geq 0} F_n z^n$ con $F_n \in \mathbb{R}^+$ y sea $R>0$ el radio de convergencia entonces $R$ es singularidad de $F$.

**Dem.-** Por contradicción. Supongamos que $F$ es analítica en $R$ $\therefore$ existe $r>0$ t.q. $F$ es analítica en ~~[illegible]~~ $B(r, R)$



Ahora sea ~~[illegible]~~ $0 < h < \frac{r}{3}$

y sea $z_0 = R - h$




~~Entonces puedo considerar la serie de F alrededor de $z_0$~~

~~$\Rightarrow F(z) = \sum_{k\geq 0} g_k (z-z_0)^k$~~

Así consideremos $D(z_0, 2h)$, ~~[illegible]~~

por otro lado consideremos la serie de $F$ en $z_0$,

$$F(z) = \sum_{k\geq 0} g_k (z-z_0)^k$$

$$\Rightarrow g_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \sum_{n=k} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} f_n z_0^{n-k}$$

$$\Rightarrow g_k = \sum_{n\geq 0} \binom{n}{k} f_n z_0^{n-k}$$

$\therefore g_k \geq 0$.

$$\Rightarrow F(z) = \sum_{k\geq 0} \sum_{n\geq 0} \binom{n}{k} f_n z_0^{n-k} (z-z_0)^k$$

pero por suposición $F$ converge en $R+h$

Como todo es positivo conv. absolutamente las series

$z_0 = R-h$

$$\Rightarrow F(R+h) = \sum_{k\geq 0} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} f_n z_0^{n-k} [R+h-(R-h)]^k$$

$$= \sum_{k\geq 0} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} f_n z_0^{n-k} (2h)^k$$

$$= \sum_{n\geq 0} f_n \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} z_0^{n-k} (2h)^k$$

$$= \sum_{n\geq 0} f_n (z_0+2h)^n$$

Para esto tendríamos que converja !.

F conv. en $z_0+2h$ ! pero esto contradice que el radio de convergencia es $R$. ■

**Corolario.-** con las hip. anteriores $f_n \bowtie \left(\frac{1}{R}\right)^n$

**Teorema.-** (Expansión de fracciones racionales)

Si $f$ es racional, analítica en $z=0$ con polos $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in \mathbb{C}$ entonces sus coeficientes (de $f$) son sumas de exponenciales-polinomiales, es decir, existen $\{\Pi_j(x)\}_{j=1}^{m}$ $m$ polinomios tales que si $n$ es suficientemente grande ($\exists N_0$ t.q. $\forall n \geq N_0$) se tiene que

$$f_n := [z^n] f(z) = \sum_{j=1}^{m} \Pi_j(n)\, \alpha_j^{-n}$$

Además $\operatorname{grad}(\Pi_j(x)) = \operatorname{orden}(\alpha_j) - 1$

Dem por fracciones parciales sabemos que

$$f(z) = \frac{P(z)}{q(z)} = Q(z) + \sum_{(\alpha,r)} \frac{c_{\alpha,r}}{(z-\alpha)^r}$$

con $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, $1 \leq r \leq \operatorname{ord}(\alpha)$

con $\operatorname{gr} Q = \operatorname{gr} p - \operatorname{gr} q$

$$\Rightarrow [z^n] f(z) = [z^n]\left(Q(z) + \sum -\right)$$

$$\underset{\text{si } n > \operatorname{gr} Q}{=} [z^n] \sum_{(\alpha,r)} \frac{c_{\alpha,r}}{(z-\alpha)^r}$$

$$= \sum_{(\alpha,r)} c_{\alpha,r} \frac{(-1)^r}{\alpha^r} [z^n] \frac{1}{\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^r}$$

$$= \sum_{(\alpha,r)} c_{\alpha,r} \frac{(-1)^r}{\alpha^r} \underbrace{\binom{n+r-1}{r-1}}_{\substack{\text{polinomio en } n \\ \text{de grado } r-1}} \alpha^{-n}$$

$\blacksquare$

Escaneado con CamScanner

Ejemplo:

Sea $F(z) = \dfrac{1}{1-z-z^2}$ la generadora de los números de Fibonacci.

Sea $\mathcal{F}$ el lenguaje de palabras que no tienen a 11 como factor

| $n$ | $\mathcal{F}_n$ | $F_n$ | Ejemplo de clase que representa |
|---|---|---|---|
| 0 | $\emptyset$ | 1 | |
| 1 | 1, 0 | 2 | |
| 2 | 00, 01, 11 | 2 | |
| 3 | 000, 001, 010, 011, 101, 111, 100 | 5 | |

Los polos de $F$ son $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ y $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (polos simples), $\therefore$ la dominante es $\alpha$ $\therefore$ por el teo. anterior

$F_n \sim C\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$

y por el teo. anterior $[z^n] F_n \sim \dfrac{1}{(\beta-\alpha)} [z^n] \dfrac{1}{z-\alpha}$

$= \dfrac{1}{\beta-\alpha}(-1)\alpha^{-n} = \dfrac{1}{\alpha-\beta}\alpha^{-n-1}$

sepa por que

Asi lo hizo el profesor

$\therefore F_n \sim \dfrac{1}{\alpha-\beta}\alpha^{-n}$

- Teorema.- (Exp. funciones meromorfas)

Sea $f(z)$ meromorfa en $|z| \leq R$, analítica en $|z| = R$. Así sean $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sus polos, entonces

$$f_n = [z^n] f(z) = \left( \sum_{j=1}^{m} \Pi_j(n) \alpha_j^{-n} \right) + O(R^{-n})$$

Dem.- ~~sabemos que~~ $\cancel{f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz}$

Sea la serie de Laurent de $f$ alrededor de $\alpha_j$

$$f(z) = \sum_{k \geq -m_j} C_{\alpha,k} (z - \alpha_j)^k$$

$$= \underbrace{\sum_{k=-m}^{-1} C_{\alpha,k} (z-\alpha)^k}_{S_\alpha(z)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} C_{\alpha,k} (z-\alpha)^k}_{H_\alpha(z)}$$

Ahora sea $S(z) = \sum_{k=1}^{n} S_{\alpha_k}(z)$ y consideramos

$f(z) - S(z)$ se usa exp. de racionales

$$\Rightarrow [z^n] f = [z^n] S(z) + [z^n](f(z) - S(z))$$

pero por el teo. de Cauchy

$$[z^n](f(z) - S(z)) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z) - S(z)}{z^{n+1}} dz \ll \overset{\text{acotado}}{\oint} \frac{|f(z) - S(z)|}{|z^{n+1}|} |dz|$$

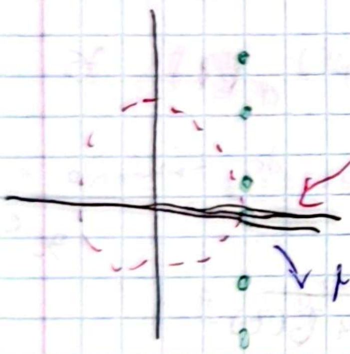
$\varepsilon < C\, 2\pi R \frac{1}{R^{n+1}} \quad \varepsilon < \frac{C}{R^n}$

Ejemplo:

Supranyecciones

$\Rightarrow \quad \mathcal{R} = \mathrm{SUCC}(\mathrm{CON}_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$

$\Rightarrow \quad R(z) = \frac{1}{1-(e^z - 1)} = \frac{1}{2-e^z}$ $\quad 2 - e^z = 0 \Rightarrow z = \log 2$



$\ln 2$ es el dominante

$\log 2$

el residuo en $\ln 2$ es

$\lim_{z \to \ln 2} \frac{z - \ln 2}{2 - e^z} = \lim_{z \to \ln 2} \frac{1}{-e^z} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

como es el universo coloreado

$\Rightarrow \quad \frac{R_n}{n!} \sim [z^n] \frac{1}{(z - \log 2)} \left(-\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{-1}{(\ln 2)} \cdot \binom{n}{0} (\ln 2)^{-n} \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad R_n \sim \frac{1}{2 \ln 2} (\ln 2)^{-n}$

Aplicación funciones meromorfas

Esquemas de sucesiones supercríticas

Dados $\mathcal{G}$ clase combinatoria, con $\mathcal{G}_0 \equiv$ vacía, sea

~~[illegible]~~ $\mathcal{F} = SUC(\mathcal{G})$ ~~sucesión~~ ~~supercrítica~~ $\Rightarrow$ $F(z) = \dfrac{1}{1-G(z)}$ con $G(z) = G_1 z + G_2 z^2 + \dots$

con el parámetro $\chi = \begin{cases} \# \text{ componentes } (1) \; \chi \\ \# \text{ componentes de tamaño } k \; (2) \; \chi^{(k)} \end{cases}$

$\Rightarrow (1)\ \overline{\mathcal{F}} = SUC(u\,\mathcal{G}) \Rightarrow F(z,u) = \dfrac{1}{1-uG(z)}$

$(2)\ \overline{\mathcal{F}} = SUC(u\,\mathcal{G}_k + \mathcal{G}\setminus\mathcal{G}_k)$

$\Rightarrow F(z,u) = \cancel{\dfrac{1}{1-(uG(z))}}$

$= \dfrac{1}{1-(u \cdot G_k \cdot z^k + G(z) - G_k \cdot z^k)}$

$\begin{cases} F_n \geq 0 \\ G_n \geq 0 \end{cases}$

Diremos que $\mathcal{F}$ es supercrítica si para $\sigma > 0$ t.q. $G(\sigma) = 1 \Rightarrow \sigma < \rho$ con $\rho$ el radio de convergencia de $G$.

Teorema.- Sea $\mathcal{F} = \text{suc}(G)$, supercrítico

entonces

$$[z^n] F(z) = \frac{\sigma^{-n}}{\sigma G'(\sigma)} (1 + O(A^n))$$

con $A < 1$

① $\mathbb{E}_n(X) = \frac{1}{\sigma G'(\sigma)} (n+1) - 1 + \frac{G''(\sigma)}{G'(\sigma)^2} + O(A^n)$

$$\mathbb{V}_n(X) = \frac{\sigma G'(\sigma) + G'(\sigma) - \sigma G'(\sigma)^2}{\sigma^2 G'(\sigma)^3} + O(1)$$

Distribución concentrada.

$$\mathbb{E}_n(X^{\langle k \rangle}) = \frac{G_k \sigma^k}{\sigma G'(\sigma)} + O(1)$$

①

Recordatorio desigualdades de Markov y Chebyshev

$X$ v.a $\geq 0$, ent.

- $\mathbb{P}(X \geq t\, \mathbb{E}(X)) \leq \frac{1}{t}$ (Markov)
- $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t\, \sigma(X)) \leq \frac{1}{t^2}$ Cheby.

Def= La dist. de probabilidad de un parámetro $X$ es concentrada si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{\mu_n} = 0 \underset{\text{por Chebyshev}}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(1 - \varepsilon \leq \frac{X_n}{\mu_n} \leq 1 + \varepsilon\right) = 1.$$

i.e $\frac{X_n}{\mu_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ o

que $X_n$ conv. en probabilidad a $\mu_n$

Dem.- como G es FG con términos positivos

$\Rightarrow (1-G(z))'\big|_{z=\sigma} = -G'(z)\big|_{z=\sigma}$ y

como $\sigma > 0 \Rightarrow G'(\sigma) \neq 0$

$\therefore$ $z=\sigma$ es polo simple de F.

Así $\lim_{z\to\sigma} \frac{z-\sigma}{1-G(z)} = \lim_{z\to\sigma} \frac{1}{-G'(z)} = -\frac{1}{G'(\sigma)}$

$\Rightarrow$ aplicando la expansión $\left( F(z) = \frac{1}{1-G(z)} = \frac{1}{z-\sigma} \cdot \frac{z-\sigma}{1-G(z)} \right.$

$[z^n]\frac{1}{z-\sigma} = \frac{(-1)}{\sigma}[z^n]\frac{1}{1-\frac{z}{\sigma}} = -\frac{1}{\sigma}\sigma^{-n}$

$\Rightarrow [z^n]F(z) \approx \left(-\frac{1}{\sigma}\sigma^{-n}\right)\left(-\frac{1}{G'(\sigma)}\right)$

para la esperanza

$\Omega(z,u) = \frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{1-uG(z)} = \frac{G(z)}{(1-uG(z))^2}$

$\Rightarrow \Omega(z) = \frac{G(z)}{(1-G(z))^2}$ meromorfa con polo de orden 2

$\Rightarrow [z^n]\Omega(z) = [z^n]\frac{1}{(z-\sigma)^2} \cdot \frac{(z-\sigma)^2 G(z)}{(1-G(z))^2}$

pero $\lim_{z\to\sigma} \frac{(z-\sigma)^2 G(z)}{(1-G(z))^2} = \lim_{z\to\sigma} \frac{G'(z)(z-\sigma)^2 + G(z)\,2(z-\sigma)}{2(1-G(z))(-G'(z))}$

$= \frac{2G(\sigma)}{2G'(\sigma)^2} = \frac{G(\sigma)}{G'(\sigma)^2}$

$\Rightarrow [z^n]\Omega(z) \sim \left(\frac{1}{\sigma^2}\binom{n+1}{1}\sigma^{-n}\right)\left(\frac{G(\sigma)}{G'(\sigma)^2}\right)$

$\approx \frac{G(\sigma)}{\sigma^2 G'(\sigma)^2} n \sigma^{-n}$

$$\Rightarrow p_n(z) = \frac{[z^n]\, n(t)}{\frac{\sigma^{-n}}{\sigma\, G(\sigma)}} = \frac{\frac{1}{\sigma^2}(n+1)\sigma^{-n}}{\frac{1}{\sigma G'(\sigma)}\sigma^{-n}} = \frac{G(\sigma)}{G'(\sigma)^2}$$ (6.2)

$$= \frac{G'(\sigma)}{\sigma}(n+1)\frac{G(\sigma)^2}{G'(\sigma)^2} = \frac{1}{\sigma G'(\sigma)}(n+1)$$

---

M→) ejemplo)

composiciones | supraycciones | alineaciones

$\mathcal{C} = SUC(SUC_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$ | $\mathbb{R} = SUC(CON_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$ | $\mathcal{O} = SUC(CIC(\mathcal{Z}))$

$$\Rightarrow C(z) = \frac{1}{1-\left(\frac{z}{1-z}\right)} \quad \therefore \quad \text{sea } G(z) = \frac{z}{1-z}$$

$\therefore \quad G(z)=1 \Rightarrow z = \frac{1}{2} = \sigma \quad$ y

$G$ tiene radio de conv. $\rho = 1 \quad \therefore \quad \sigma < \rho$

$$\Rightarrow \text{y además } G'(z) = \left.\frac{1(1-z)+z}{(1-z)^2}\right|_{z=\frac{1}{2}} = 4$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}}{\frac{1}{2}\cdot 4}(1+O(A^n))$$

$$= 2^{n-1}(1+O(A^n))$$

$$* R(z) = \frac{1}{1-(e^z-1)} \quad \text{sea} \quad G(z) = e^z - 1 \Rightarrow G(z)=1$$

$\Rightarrow e^z = 2 \Rightarrow z = \log 2 \quad$ y la más cercana al origen es $\ln 2 = \sigma \quad \therefore \quad \rho = \infty > \sigma = 2$

$$\Rightarrow \quad P_n \sim \frac{1}{2\ln 2}\left(\frac{1}{\log 2}\right)^n$$

$$* \quad Q(z) = \frac{1}{1-\left(\log \frac{1}{1-z}\right)} \quad \text{sea} \quad G(z) = \log \frac{1}{1-z}$$

$$\Rightarrow \quad G(z) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-z} = e \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{e} = 1-z \Rightarrow z = 1-\frac{1}{e}$$

$$\therefore \quad \rho = 1 \quad y \quad \sigma = 1-\frac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad \rho > \sigma$$

$$\therefore \quad \text{como} \quad G'(z)\Big|_{z=1-\frac{1}{e}} = 1-z \cdot \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right) = \frac{1}{1-z}\Big|_{z=1-\frac{1}{e}}$$

$$\Rightarrow \quad G'\left(1-\frac{1}{e}\right) = e$$

$$\Rightarrow \quad Q_n \sim \frac{1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)e} \cdot \left(1-\frac{1}{e}\right)^{-n}$$

consideremos

$$f(z) = (z-w)^{-\alpha}$$

con $w, \alpha \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $[z^n] f(z) = w^{-n} [z^n] f(z \cdot w)$

con $w^{-n} f(z \cdot w) = (1-z)^{-\alpha}$

Teorema de la función de escala estandar

si $f(z) = (1-z)^{-\alpha}$ ent.

$$[z^n] f(z) = \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k(\alpha)}{n^k}\right) \quad \therefore \quad [z^n] f(z) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

con $P_k$ polinomios de grado $2k$.

Ejemplo:

catalan: $\Rightarrow$ $[z^n] f(z) = \dfrac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$

$\Rightarrow$ $[z^n] f(z) \sim \cancel{[z^n]\sqrt{1-4z} = -\frac{1}{2}[z^n] (1-4z)^{\frac{1}{2}}}$

$$\sim -\frac{1}{2} [z^n] (1-4z)^{1/2}$$

$$\sim -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{-n} [z^n] (1-z)^{1/2} =$$

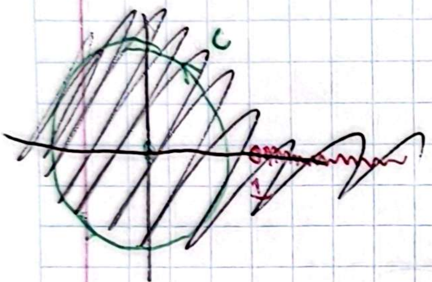
$$\sim -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{-n} \frac{n^{-\frac{1}{2}-1}}{\Gamma(-\frac{1}{2})} = -\frac{1}{2} \cdot 4^{-n} \frac{n^{-3/2}}{-2\sqrt{\pi}}$$

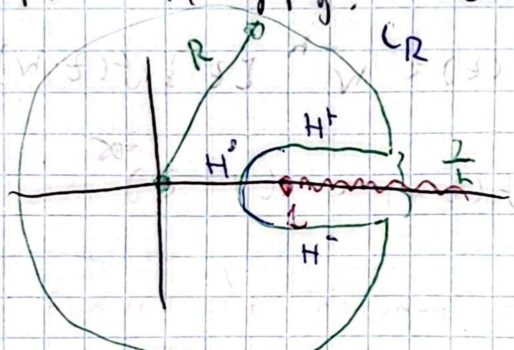
$$= 4^{n+1} n^{-3/2} \pi^{-1/2}$$

Dem.— Tenemos que

$f_n = [z^n] f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(1-z)^{-\alpha}}{z^{n+1}} dz$ , esto sí vale

para el sig. contorno





con ello $\mathcal{H} = H^+ + H^- + H^0 + C_R$

$H^-(n) = \{ z \mid z = x - \frac{i}{n} , x \geq 1 \}$

$H^+(n) = \{ z \mid z = x + \frac{i}{n} , x \geq 1 \}$

$H^0(n) = \{ z = 1 + \frac{1}{n} e^{i\theta} , \theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \}$

sea $z = 1 + \frac{t}{n}$ , $dz = \frac{1}{n} dt$

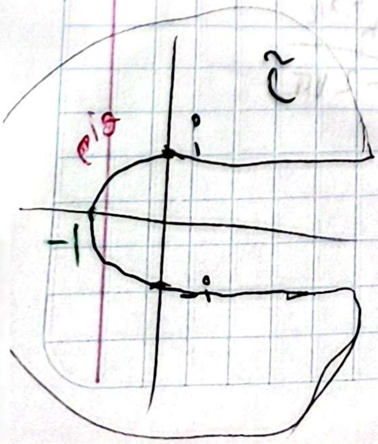
$\Rightarrow t = nz - n$

$\Rightarrow f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{C}} \frac{(t/n)^{-\alpha}}{(1+\frac{t}{n})^{n+1}} \frac{1}{n} dt$

con

Lema

$$\begin{aligned} & \text{Creo } (1+\tfrac{t}{n})^{-(n+1)} \\ &= e^{-(n+1)\log(1+\frac{t}{n})} \\ &= e^{-t}\left[1 + \frac{t^2-2t}{2n} + \frac{3t^4 - 20t^3 + 24t^2}{24n^2} + \cdots\right] \\ &= \ldots \end{aligned}$$



A

$$e^{-t}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-(n+1)} = e^{(n+1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{t}{n}\right)^k}{k}}$$

$$= \exp\left(-\frac{(n+1)}{n}t + \frac{(n+1)t^2}{2n^2} - \frac{(n+1)t^3}{3n^3} + \dots\right)$$

$$= \exp(-t + t + A) = e^{-t}\, e^{t+A} = e^{-t}\left[\sum\right]$$

$$\Rightarrow f_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{C}} \left(1+\frac{t}{n}\right)^{-(n+1)} \left(\frac{-t}{n}\right)^{-\alpha} \frac{1}{n}\,dt$$

$$= \frac{n^{\alpha-1}}{2\pi i}\int_{\hat{C}} e^{-t}(-t)^{-\alpha}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]dt$$

$$= \frac{n^{\alpha-1}}{2\pi i}\int_{\hat{C}} e^{-t}(-t)^{-\alpha}\,dt + \left(\frac{n}{2\pi i}\int_{\hat{C}} e^{-t}\frac{(-t)^{\alpha+1}}{n}\,dt\right.$$

$$\left. + \frac{n^{\alpha-1}}{2\pi i}\int_{\hat{C}} e^{-t}\frac{(-t)^{\alpha+2}}{2n} + \dots\right)$$

¿Falta?

• Teorema (función de escala estándar logaritmo)

Sea $f(z) = (1-z)^{-\alpha} \left( \frac{1}{z} \log\left(\frac{1}{1-z}\right) \right)^{\beta}$

ent.

$$[z^n] f(z) = \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (\log n)^{\beta} \left[ 1 + \frac{C_1}{\log n} + \frac{C_2}{\log^2 n} + \dots \right]$$

con $C_k = \binom{\beta}{k} \Gamma(\alpha) \frac{d^k}{ds^k} \frac{1}{\Gamma(s)} \Big|_{s=\alpha}$

$\therefore \quad [z^n] f(z) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (\log n)^{\beta}$

---

Ejemplos (De nuevo)

Arboles binarios

② ~~triangulaciones~~

sabemos que su función generadora es

$$T(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z^2}}{2z}$$

Función de escala estandar

Tenemos singularidad $\lambda = \frac{1}{2}$ $\therefore$ $T_n \bowtie 2^n$.

Ahora tenemos

$$T(z) = \frac{1}{2z} - \frac{\sqrt{(1+2z)(1-2z)}}{2z}$$

$\sigma_1 = (1-z)^{-(-\frac{1}{2})}$

$\sigma_2 = (1-z)^{-(-\frac{1}{2})}$

• $\sigma_1$

$\Rightarrow [z^n] (1-2z)^{\frac{1}{2}} = [z^n] (1-2z)^{-(-\frac{1}{2})}$. $\alpha = -\frac{1}{2}$.

$= 2^n [z^n] (1-z)^{-(-\frac{1}{2})}$

$\sim 2^n \cdot \frac{n^{(-\frac{1}{2})-1}}{\Gamma(-\frac{1}{2})} = 2^n \frac{n^{-\frac{3}{2}}}{-2\sqrt{\pi}}$

Escaneado con CamScanner

$\oplus_2 \Rightarrow \qquad [z^n](1+2z)^{-(-\frac{1}{2})} = (-2)^n \dfrac{n^{3/2}}{-2\sqrt{\pi}}$

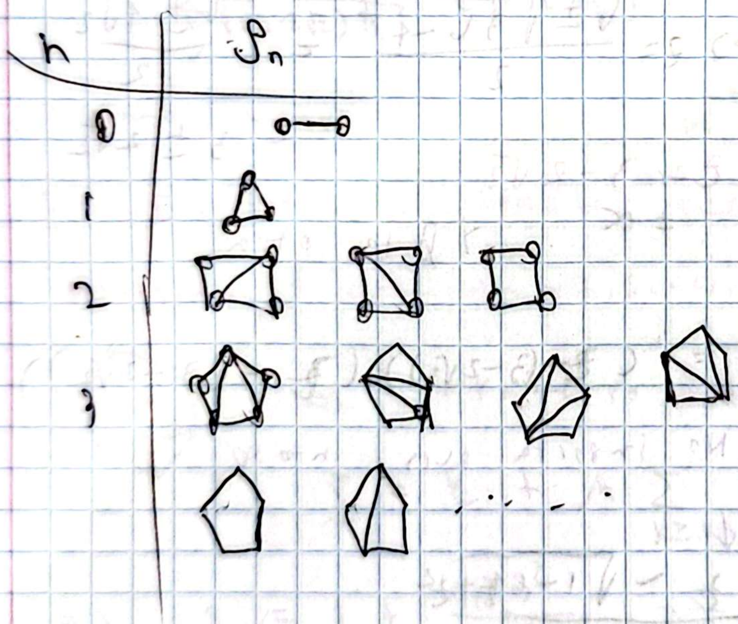
$\Rightarrow [z^n]\, T(z) = [z^{n+1}] \dfrac{1-\sqrt{1+2z}\,\sqrt{1-2z}}{2}$

$= -[z^{n+1}]\left(\dfrac{\sqrt{1+2z}\,\sqrt{1-2(-\frac{1}{2})}}{2} + \dfrac{\sqrt{1+2(\frac{1}{2})}\,\sqrt{1-2z}}{2}\right)$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \dfrac{(-2)^{n+1}(n+1)^{-3/2}}{-2\sqrt{\pi}} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{2^{n+1}(n+1)^{-3/2}}{-2\sqrt{\pi}} = \dfrac{2^{n+1}\,(n+1)^{-3/2}}{\sqrt{2\pi}}.$

---

Disecciones



Son más que las triangulaciones.

$P = (\varepsilon + z + z^2 + z^3 + \dots)$ Los polígonos

entonces

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \times S^{k+1} = \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} z_k \times S^{k+1}$$

$\therefore \quad S = 1 + S \sum_{k=1}^{\infty} (zS)^k = 1 + S \dfrac{zS}{1-zS}$

$3+2\sqrt{2} - 3+2\sqrt{2}$

$4\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad S - zS^2 = 1 - z \cdot S + zS^2$

$\Rightarrow 2zS^2 - (1+z)S + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad S = \dfrac{1+z - \sqrt{(1+z)^2 - 4(2z)(1)}}{4z}$

$\Rightarrow \quad S = \dfrac{1+z - \sqrt{1-6z+z^2}}{4z}$

∴ $z=0$ es removible,

y $1-6z+z^2 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2} = \dfrac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2}$

$= 3 \pm 2\sqrt{2}$.

y la dominante sera $z = 3-2\sqrt{2} = \alpha$ y $\beta$ la otra.
(mas cercana al origen)

con ello $1-6z+z^2 = (z-(3-2\sqrt{2}))(z-(3+2\sqrt{2}))$

No importa pues $n\to\infty$

$\Rightarrow \quad [z^n]S = [z^n]\dfrac{1+z-\sqrt{1-6z+z^2}}{4z}$

$\sim -\frac{1}{4}[z^{n+1}]\sqrt{1-6z+z^2}$

por conveniencia lo escribimos así, pues $\beta - \alpha > 0$

$= -\frac{1}{4}[z^{n+1}](\alpha - z)^{-(-\frac{1}{2})}(\beta - z)^{-(-\frac{1}{2})}$

$\sim -\frac{1}{4}\sqrt{\beta-\alpha}\,[z^{n+1}](\alpha - z)^{-(-\frac{1}{2})}$

$\sim -\dfrac{\sqrt{\beta-\alpha}}{4}\alpha^{\frac{1}{2}}[z^{n+1}]\left(1-\dfrac{z}{\alpha}\right)^{-(-\frac{1}{2})}$

Escaneado con CamScanner

Prescalamiento

$$= -\frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{4}\,\alpha^{1/2}\cdot\alpha^{-(n+1)}\,[z^{n+1}]\,(1-z)^{-(-\frac{1}{2})}$$

$$= -\frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{4}\,\alpha^{1/2}\,\alpha^{-(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^{-\frac{1}{2}-1}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}$$

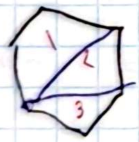
$$\approx -\frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{4}\,\sqrt{\alpha}\,\alpha^{-(n+1)}\,\frac{n^{-3/2}}{-2\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{\sqrt{4\sqrt{2}}}{8}\,\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{n^{3/2}}\,\alpha^{-(n+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{4\sqrt{2}}\;n^{-3/2}}{8\sqrt{(3-2\sqrt{2})\pi}}\,(3-2\sqrt{2})^{-n}$$

Como $3-2\sqrt{2} \approx 0.2 \Rightarrow \alpha^{-n} \to \infty$

¿En cuántas partes queda separado un polígono con una disección?



$\Rightarrow$ parámetro

$$\zeta = \varepsilon + u\sum_{k\geq 1} z^k \times \zeta^{k+1}$$

$$\Rightarrow \zeta = 1 + \frac{uz\zeta^2}{1-z\zeta} \Rightarrow$$

$$(1+u)z\,\zeta^2 - (1+z)\zeta + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \zeta = \frac{1+z-\sqrt{(1+z)^2-4(1+u)z}}{2(1+u)z}$$

$$\Rightarrow \Omega(z) = \frac{d}{du}\zeta\Big|_{u=1} = \frac{1}{2\sqrt{(1+z)^2-8z}} + \frac{1+z-\sqrt{(1+z)^2-8z}}{8z}$$

pero dominará $\frac{1}{2\sqrt{(1+z)^2-8z}}$

$$\Rightarrow [z^n]\,\Omega = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\beta-\alpha}}\,[z^n]\,\frac{1}{\sqrt{\alpha-z}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\beta-\alpha}}\,\frac{1}{\alpha^{1/2}}\,[z^n]\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\beta-\alpha}}\,\frac{1}{\alpha^{1/2}}\,\alpha^{-n}\,[z^n]\,(1-z)^{-1/2}$$

$$\approx \frac{1}{2\sqrt{\beta-\alpha}}\,\frac{1}{\alpha^{1/2}}\cdot\alpha^{-n}\,\frac{n^{\frac{1}{2}-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{\alpha^{-n}}{2\sqrt{(\beta-\alpha)\,\alpha\pi n}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_{S_n}(x) = \frac{[z^n]\,\Omega(z)}{[z^n]\,S(z)} \sim$$

$$\sim \frac{\dfrac{\alpha^{-n}}{2\sqrt{(\beta-\alpha)\,\alpha\pi n}}}{\dfrac{\sqrt{4\sqrt{2}}\;n^{-3/2}}{3\sqrt{\alpha\pi}}\,\alpha^{-n}} =$$

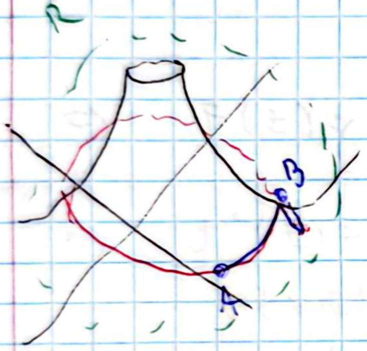
$$= \frac{n}{\sqrt{2}}$$

(Esperanza ~~probabilidad~~ de las partes que tendrán.)

# Metodo del punto silla

Tenemos que si $G(z) = \sum_{n\geq 0} G_n z^n$

ent. $G_n = [z^n] G(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{G(z)}{z^{n+1}} dz$



$\xi = \xi^{(0)} + \xi^{(1)}$

$\xi^{(0)}$ = parte central

$\xi^{(1)}$ = colas

Siempre se considera $F(z) = \frac{G(z)}{z^{n+1}}$

y $F(z) = e^{f(z)}$ con $f(z) = \log F(z)$

~~$f(z) = e^z$ en este caso $f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$~~

$\Rightarrow$ El punto silla sera cuando $F'(z) = 0$

con $z \in \mathbb{R}^+$ $\Rightarrow$ $e^{f(z)} f'(z) = 0$ $\Rightarrow$ $f'(z) = 0$

Queremos ~~saber~~ estimar integrales del tipo

$$I = \int_A^B F(z)\, dz = \int_A^B e^{f(z)}\, dz$$

paso 0: Resolver $f'(z) = 0$, $z \in \mathbb{R}^+$, llamemosle $\xi$

paso 1: (corte de colas)

checar que $\int_{\xi^{(1)}} F(z)\, dz = o\left( \int_{\xi} F(z)\, dz \right)$

paso 2: (Aproximacion central).

$f(z)$ debe aproximarse bien (asintoticamente) por una ~~función~~ función cuadratica.

es decir:

$$f(z) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(z-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2!}(z-\xi)^2 + O(R_n)$$

con $R_n$ función t.q. $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ uniformemente

pero $f'(\xi) = 0 \Rightarrow$

$$f(z) = f(\xi) + \frac{f''(\xi)}{2!} + O(R_n)$$

Dado paso 1 y paso 2

Tenemos una integral Gaussiana incompleta

$$\Rightarrow \int_A^B e^{f(z)} = \int_A^B e^{f(\xi) + \frac{f''(\xi)}{2}(z-\xi)^2 + O(R_n)} dz$$

$$= e^{f(\xi)} \int_A^B e^{\frac{f''(\xi)}{2}(z-\xi)^2 + O(R_n)} dz$$

paso 3 completar las colas

Comprobar que la int. gauss. incompleta de paso 2 es asint. equi. a la int. gauss completa.

es decir,

$$\int_{\gamma(t)} e^{\frac{1}{2}f''(\xi)(z-\xi)^2} dz \sim \delta i e^{-i\theta/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|f''(\xi)|\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \delta i e^{-i\theta/2} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(\xi)|}}$$ con $\delta = \pm 1$ dependiendo la dirección de la curva

$\theta = \arg(f''(\xi))$ pero en nuestro estudio $\arg(f''(\xi)) = 0$.

Escaneado con CamScanner

$\therefore$ P1 + P2 + P3

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_A^B e^{f(z)}\,dz = \frac{e^{f(\xi)}}{\sqrt{2\pi f''(\xi)}}$$

Ejemplo.- $g(z) = e^z \Rightarrow F(z) = \frac{e^z}{z^{n+1}}$

$$\Rightarrow F(z) = e^{\log\left(\frac{e^z}{z^{n+1}}\right)} \Leftarrow f(z)$$

paso 1

$\Rightarrow f'(z) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{e^z}{z^{n+1}}\right)' \quad 1 - \frac{n+1}{z} = 0 \Rightarrow z = n+1$

$(z \in \mathbb{R}^+)$

usamos $n = \xi$ en vez de $n+1$ ya que $n+1 \sim n$

paso 2 nos lo saltamos

paso 3 Tenemos que $f''(z) = \frac{n+1}{z^2}$

$\Rightarrow$ ~~$f''(\xi) = n^3$~~ $= \frac{n}{z^2}$

$$\Rightarrow f''(n) = \frac{1}{n}$$

$$\therefore \frac{1}{n!} \sim \frac{\left(\frac{e^n}{n^{n+1}}\right)}{\sqrt{2\pi \frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{n^{n+1}}\frac{e^n}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\Rightarrow n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

## Heurística de punto silla

si existe $\delta := \delta(n)$ t.q

- $f''(\xi)\,\delta^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$
- $f'''(\xi)\,\delta^3 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

se puede aplicar el método?

---

Involuciones

permutaciones t.q $\sigma^2 = Id.$

Recordemos que

permutaciones : $P = \text{con}(\text{cic}(\mathcal{Z}))$

: Involuciones : $\mathcal{I} = \text{con}(\text{cic}_{1,2}(\mathcal{Z}))$

$= \text{con}(\text{con}_{1,2}(\mathcal{Z}))$

$\Rightarrow I(z) = \exp\left(z + \frac{z^2}{2}\right) = e^{z + z^2/2}$

$\Rightarrow I(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!} z^n$

$\Rightarrow$ ~~$f(z) = \log(I(z)) = e$~~ $f(z)$

$z \in \mathbb{R}^+$ $\Rightarrow f(z) = \log\left(\frac{I(z)}{z^n}\right) = z + \frac{z^2}{2} - n\log z$

$\Rightarrow f'(z) = 1 + z - \frac{n}{z} \Rightarrow f'(z) = 0$

$\Rightarrow z^2 + z - n = 0 \Rightarrow \xi = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4n}}{2}$

tomamos $=+$ pues queremos $\xi > 0$

pero $\xi \sim \sqrt{n} - \frac{1}{2}$

$$y \quad f''(z) = 1 + \frac{n}{z^2}, \quad f'''(z) = -\frac{2n}{z^3}$$

$$\Rightarrow f''(\xi) \simeq 1 + \frac{n}{n} \sim 1$$

$$f'''(\xi) \simeq \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Queremos $\delta(n) = n^{\alpha}$ t.q. $f''(\xi)(n^{\alpha})^2 \to \infty$

$f'''(\xi)(n^{\alpha})^3 \to 0$

$\Rightarrow \alpha > 0$ y

$3\alpha - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \alpha < \frac{1}{6}$

$$\therefore \frac{I_n}{n!} \simeq \frac{\exp(f(\xi))}{\sqrt{2\pi f''(\xi)}} \simeq \frac{\exp(f(\sqrt{n}))}{\sqrt{2\pi f''(\sqrt{n})}}$$

$$= \frac{\exp(\sqrt{n} + \frac{n}{2} - \frac{n}{2}\log n)}{\sqrt{2\pi \left(1 + \frac{n}{(\sqrt{n})^2}\right)}}$$

Nos comimos una potencia en $f(z) = \log \frac{I(z)}{z^n}$

en vez de $\log \frac{I(z)}{z^{n+1}}$

Así que tenemos que dividir sobre $\frac{1}{\sqrt{n}}$

Particiones de conjuntos

Sabemos que su FGE es

$$G(z) = e^{e^z - 1}$$

$\Rightarrow [z^n]\, G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{G(z)}{z^{n+1}}\, dz$

$\left\{ \therefore\ e^{f(z)} = \frac{G(z)}{z^{n+1}} \right.$

y sea $f(z) = \log\left(\frac{G(z)}{z^{n+1}}\right)$

$= \log(G) - n \log z = e^z - 1 - n \log z$

$\therefore f'(z) = e^z - \frac{n}{z} \Rightarrow f'(z) = 0 \Leftrightarrow z e^z = n$

$\Leftrightarrow z = W(n) = \log n - \log(\log n) + \frac{\log\log n}{\log n} + \dots$

y $f''(z) = e^z + \frac{n}{z^2}$

$\Rightarrow c_n = \frac{1}{z} \frac{e^{f(z)}}{\sqrt{2\pi f''(z)}} = \frac{e^{e^{W(n)} - 1}}{W(n)^n \sqrt{2\pi W(n)(W(n)-1)\, e^{W(n)}}}$

esto es porque nos comimos una potencia

$\frac{G(z)}{z^{n+1}} \neq \frac{G(z)}{z^n}$

Escaneado con CamScanner

Cong
(ensy)drems)

$$G(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \log\left(\frac{G(z)}{z^n}\right) = \frac{z}{1-z} - n\log z$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{n}{z}} \quad \therefore \quad f'(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-z)^2 = \frac{1}{n} z \quad \Rightarrow \quad 1 - 2z + z^2 = \frac{1}{n} z$$

$$\Rightarrow \quad z^2 - \left(\frac{1}{n} + 2\right) z + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{(2n+1) \pm \sqrt{4n+1}}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \pm \frac{2\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{4n}}}{2n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2n} \pm \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{1+\frac{1}{4n}} \sim 1 \pm \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Tomamos el "−" pues $G(z)$ tiene singularidad en 1

$$\Rightarrow \quad \boxed{f''(z) = \frac{2}{(1-z)^3} + \frac{n}{z^2}}$$

$$\Rightarrow \quad f''(\varepsilon) = \frac{2}{(1-(1-\frac{1}{\sqrt{n}}))^3} + \frac{n}{(1-\frac{1}{\sqrt{n}})^2} = 2 \cdot n^{3/2} + \frac{n^2}{(\sqrt{n}-1)^2}$$

$$\boxed{f'''(z) = \frac{6}{(1-z)^4} - \frac{2n}{z^3}}$$

$$\Rightarrow \quad G_n \approx \frac{1}{\varepsilon} \frac{e^{f(\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi f''(\varepsilon)}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{\sqrt{n}})} \frac{e^{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}{1-(1-\frac{1}{\sqrt{n}})}} \cdot \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}}{\sqrt{2\pi\left[\frac{2}{(1-(1-\frac{1}{\sqrt{n}}))^3} + \frac{n}{(1-\frac{1}{\sqrt{n}})^2}\right]}}$$

$$= \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n-1} \frac{e^{\sqrt{n}-1}}{\sqrt{2\pi\left[2n^{3/2} + \frac{n^2}{(\sqrt{n}-1)^2}\right]}}$$

transformada de mellin

sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ localmente integrable (continua) ent. la trans. de mellin se define

$$f^*(s) = M[f(x); s] = \int_0^\infty f(x)\, x^{s-1}\, dx$$

Condición.- si $\exists\, \alpha > \beta$ tq

$$\text{si } f(x) = \begin{cases} O(x^{\alpha}) \to 0 , & x \to 0 \\ O(x^{\beta}) \to \infty , & x \to \infty \end{cases}$$

ent. $f^*(s)$ existe y es analítica en $\langle -\alpha, \beta \rangle = \{ z \in \mathbb{C} \mid +\alpha < Re(z) < +\beta \}$

Ej: $M[e^{-x}, s] = \Gamma(s)$

proposición.- $M[x \frac{d}{dx} f(x), s] = s\, [M[f(x), s]]$

Inversa:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s)\, x^{-s}\, ds$$

con $a < c < b$, con $\langle a, b \rangle$ la franja de $f^*(s)$

Metodología

$$f(z) \sim g(z) \sim g_n \sim f_n$$

Mellin      punto silla

Consideremos $p(z) = \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1-z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$

Las particiones.

$$p(z) = \exp\left(\log \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1-z^n}\right) = \exp\left(\sum_{n\geq 1} \log \frac{1}{1-z^n}\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} \frac{z^{nm}}{m}\right)$$

$$\Rightarrow \log(p(z)) = \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} \frac{z^{nm}}{m}$$

Sea $L(t) = \log p(e^{-t})$

Así $L(t) = \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} \frac{e^{-tnm}}{m} = \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}$

$$= \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m} \sum_{n\geq 1} (e^{-mt})^n = \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m} \frac{e^{-mt}}{1-e^{-mt}}$$

$$\Rightarrow L^*(s) = M\left[\sum_{m\geq 1} \frac{1}{m} \frac{e^{-mt}}{1-e^{-mt}}\right]$$

$$= \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m} M\left[\frac{e^{-mt}}{1-e^{-mt}}, s\right]$$

$$= \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m} M[f(mt), s] \quad \text{con} \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

$$\Rightarrow L^*(s) = \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m} m^{-s} M\left[\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}, s\right]$$

$M[f(mt)]$
$= m^{-s} M[f(t)]$

Escaneado con CamScanner

$\Rightarrow \quad L^*(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{s+1}} \Gamma(s)\zeta(s)$

$\therefore \quad L^*(s) = \cancel{\zeta(s+1)}\ \zeta(s+1)\Gamma(s)\zeta(s)$

Notemos que $L^*(s)$ tiene sing. en $s=-1, 0, 1$ (ya hallando el analisis de cuando se anulan)

$$\boxed{f(x) = \sum_{\lambda\in K} \operatorname{Res}[f^*(s)x^{-s}, \lambda] + O(x^{n}) \quad x\to 0}$$

$\operatorname{Res}[L^*(s)x^{-s}, 1] = \frac{\pi^2}{6x}$

$\operatorname{Res}[\quad , 0] = -\frac{1}{2}\log(2\pi) + \frac{1}{2}\log x$

$\operatorname{Res}[\quad -1] = -\frac{x}{24}$

$\therefore \quad L(t) = \frac{\pi^2}{6t} + \frac{1}{2}\log(t) - \frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{t}{24} + O(t^2)$
$t\to 0$

$\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \|$
$\log(P(e^{-t}))$

$\Rightarrow \quad P(z) \sim \exp\left(\frac{\pi^2}{6\log\frac{1}{1-(1-z)}} + \frac{1}{2}\log(\log(\frac{1}{z})) - \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{\log\frac{1}{z}}{24}\right)$

$t=$
$\log\frac{1}{1-(1-z)} \sim 1-z$

$\sim \exp\left(\frac{\pi^2}{6(1-z)}\right.$

... (uso sumo el plato como pase este paso xD)

$\sim \exp\left(\frac{\pi^2}{6(1-z)}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{12}\sqrt{1-z}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$