Especies y funciones generatrices

Sabemos que $a = (a_0, a_1, \dots) \rightsquigarrow f(x) = \sum a_n z^n$

o igual $\rightsquigarrow \sum \frac{a_n}{n!} z^n$

Def.- Una especie F consta de dos partes:

(*) 1) Una "función" $V \to F[V]$ t.q a cada conjunto finito le asocia otro conjunto finito

(**) 2) Una "función" $\sigma: V \to W$ biyectiva ← biyectiva

que me define una función $F[\sigma]: F[V] \to F[W]$

Tales que:

1) $F[id_V] = id_{F[V]}$

2) Si tengo $U \xrightarrow{\sigma} V \xrightarrow{\tau} W$ entonces

$F[\tau \circ \sigma] = F[\tau] \circ F[\sigma]$

Ejemplo.- el conjunto de gráficas con vértices algún conjunto de V.

1) (*) $G[V] = \{ (V, E) \mid E \subset \binom{V}{2} \}$

2) (**) σ sería reetiquetar

Def.- Una F estructura en V es un elemento de $F[V]$.

Dos estructuras $S \in F[V]$, $T \in F[W]$ decimos que son isomorfas si existe una biyección $\sigma: V \to W$ t.q $F[\sigma](S) = T$.

Escaneado con CamScanner

Notación.- $F[[n]] := F[n]$

Obs.- A cada especie F le asocio

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} |F[n]| \frac{x^n}{n!}$$

número de F estructuras

$$\tilde{F}(x) = \sum_{n\geq 0} |F[n]/\cong| \, x^n$$

conjunto de clases de isomorfismo

Ejemplo.-

g = especie de gráficas

g^c := especie de gráficas conexas

g^d := " " disconexas

$\Rightarrow \quad g = g^c + g^d$

Def.- Si F y G son especies, entonces

$$(F+G)[V] := F[V] \uplus G[V]$$

lo obligo a que sea ajeno.

y si $\sigma: V \to W$ entonces

$$(F+G)[\sigma](x) = \begin{cases} F[\sigma](x) & \text{si } x \in F[V] \\ G[\sigma](x) & \text{si } x \in G[V] \end{cases}$$

• Proposición.- Se tiene que

*) $(F+G)(x) = F(x)+G(x)$

*) $\widetilde{(F+G)}(x) = \tilde{F}(x)+\tilde{G}(x)$

• E :: conjuntos

Así $E[V] = \{V\}$, entonces

$$E(x) = e^x \quad , \quad \tilde{E}(x) = \frac{1}{1-x}$$

• $\mathcal{X}$ :: singuletes

$$\Rightarrow \quad \mathcal{X}[V] = \begin{cases} \{V\} & \text{si } |V|=1 \\ \emptyset & \text{si } |V|\neq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{X}(x) = x \quad , \quad \tilde{\mathcal{X}}(x) = x$$

Multiplicación y composición de especies

Dadas especies F y G entonces

• Def.- Una FG-estructura en V:

$$(FG)[V] = \{ (U, x, y) : U \subseteq V, x \in F[U], y \in G[V \setminus U] \}$$

con $\tilde{\sigma} : FG[V] \to FG[W]$ dada por

$$\tilde{\sigma}(U, x, y) = (\sigma(U), F[\sigma|_U](x), G[\sigma|_{V\setminus U}](y))$$

• Proposición.-

⊛ $(F\cdot G)(x) = F(x)\,G(x)$

⊛ $\widetilde{(F\cdot G)}(x) = \tilde{F}(x)\cdot\tilde{G}(x)$

Def.- Dados especies F y G con $G[\emptyset] = \emptyset$

definimos $F \circ G$ estructura en V como:

$F \circ G[V] = \{(\pi, X, \{Y_p\}_{p \in \pi})$

con $\pi \in \mathcal{P}[V] = part[V]$ (particiones de V)

$X \in F[\pi]$, $Y_p \in G[p]$ $(p \in \pi)$

Obs.- $F \circ G[V] = \biguplus_{\pi \in part[V]} F[\pi] \times \prod_{p \in \pi} G[p]$

con $\sigma : V \to W$

$part[\sigma](\pi) = \{\sigma(p) \mid p \in \pi\} \in part[W]$ # de ciclos de longitud i

Def.- Definimos $Z_F(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} fix\ F[\sigma] \prod_{i=1}^{\infty} x_i^{c_i}$

Obs.- $\widetilde{F \circ G}(x) \neq \tilde{F}(\tilde{G}(x))$ en general.

Teorema.-

$$\widetilde{F \circ G}(x) = Z_F(\tilde{G}(x), \tilde{G}(x^2), \ldots)$$

$$Z_{F \circ G}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = Z_F(Z_G(x_1, x_2, \ldots), Z_G(x_2, x_4, \ldots), \ldots, Z_G(x_3, x_6, \ldots), \ldots)$$

Teorema.- $F(x) = Z_F(x, 0, \ldots)$

$$\tilde{F}(x) = Z_F(x, x^2, x^3, \ldots)$$

Dem.-

• $Z_F(x, 0, \ldots)$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{fix} F(\sigma)\, x_1^{c_1(\sigma)} \cdot x_2^{c_2(\sigma)} \cdots$$

$$\downarrow\ \underbrace{x_1^{c_1(\sigma)}\ 0^{c_2(\sigma)} \cdots}_{x^{c_1(\sigma)}} \quad [c_2(\sigma) = c_3(\sigma) = \cdots = 0]$$

$=$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \operatorname{fix} F[id]\, x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} |F[n]|\, x^n = F(x)$$

• $Z_F(x, x^2, \ldots)$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{fix} F[\sigma]\, x^{c_1(\sigma)}\, x^{2c_2(\sigma)} \cdots$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{fix} F[\sigma]\, x^{c_1(\sigma) + 2c_2(\sigma) + 3c_3(\sigma) + \cdots}$$

$$= \cancel{\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n \left(\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{fix} F[\sigma]\right)}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{fix} F[\sigma]\right) x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} |F[n]/\sim|\, x^n = \tilde{F}(x)$$

Lema de Burnside:

Sea G grupo finito que actua sobre el grupo finito X, entonces

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} fix(g)$$

con $fix(g) = \# \{ x \in X \mid g \cdot x = x \}$

Teorema de Faà di Bruno:

Recordamos que

$$(F \circ G)(x) = F(G(x))$$

$$\widetilde{F \circ G}(x) = Z_F(\tilde{G}(x), \tilde{G}(x^2), \dots)$$

$$Z_{F \circ G}(x_1, x_2, \dots) = Z_F(Z_G(x_1, x_2, \dots), Z_G(x_2, x_4, \dots), Z_G(x_3, x_6, x_9, \dots), \dots)$$

- $F(x) = Z_F(x, 0, 0, \dots)$
- $\tilde{F}(x) = Z_F(x, x^2, x^3, \dots)$

Obs: si $f(x) = \sum a_n x^n$, $g(x) = \sum b_n x^n$

$\Rightarrow f(g(x)) = \sum a_n g(x)^n$

$= \sum_{n \geq 0} a_n \left(\sum_{m \geq 0} b_m x^m \right)^n$

Teo multinomial

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{i_1 + \dots + i_k = n} \binom{n}{i_1, i_2, \dots, i_k} x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k}$$

$$\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right)^2 = b_0 + 2b_0b_1 + (2b_0b_2 + b_1^2)x^2 \ldots$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i+j=n} b_i b_j\right) x^n =$$

$$f(g(x)) = \left(\sum a_n b_0^n\right) + \ldots \longrightarrow = f(b_0)$$

!!!

esto podría divergir

$$[x]\, f(g(x)) = \sum_{n\geq 0} a_n\, n\, b_0^{n-1} b_1 = f'(b_0)\, b_1$$

Es por esto que pedimos $b_0 = 0$ ∨ $G(0)=0$

$$\Rightarrow [x^0]\, f(g(x)) = a_0$$

$$[x^1]\, f(g(x)) = a_1 b_1$$

$$[x^2]\, f(g(x)) = a_1 b_2 + a_2 b_1^2$$

$$[x^3]\, f(g(x)) = a_1 b_3 + a_2(2b_1b_2) + a_3 b_1^3$$

Son particiones en las b's

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n x^n \left(\sum_{m\geq 1} b_m x^{m-1}\right)^n$$

$$\Rightarrow [x^n]\, f(g(x)) = \sum_{m_1+2m_2+\cdots+nm_n = n} a_{m_1+\cdots+m_n} \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i^{m_i} \binom{m_1+m_2+\cdots+m_n}{m_1,\ldots,m_n}$$

partición de m con m_i = # de sumandos i

Así si $F(x) = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!}$ con $f(n) = |F[n]|$

y $G(x) = \sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!}$

$\Rightarrow$

$[x^n]\ F(G(x)) = \sum_{m_1+2m_2+\dots+ = n} \binom{\sum m_i}{m_1, \dots, m_n} \frac{f_{\sum m_i}}{(\sum m_i)!} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{g_i}{i!}\right)^{m_i}$

$= \sum_{\sum i m_i = n} \frac{1}{(\prod m_i!)(\prod i!^{m_i})} f_{\sum m_i} \prod g_i^{m_i}$

$\Rightarrow$ obs:

$(f \circ g)^{(n)} = \sum_{\sum i m_i} \frac{n!}{(\prod m_i!)(\prod i!^{m_i})} \left(f^{(\sum m_i)} \circ g\right) \prod (g^{(i)})^{m_i}$

Ahora $[x^n]\ (F \circ G)(x) = \frac{|F \circ G[n]|}{n!}$

pero $F \circ G[n] = \biguplus_{\pi \in part[n]} F[\pi] \times \prod_{p \in \pi} G[p]$

conjunto de permutaciones ciclos ajenos

Ejemplo. $\mathcal{P} = E \circ \mathcal{C}$

- $\Rightarrow \frac{1}{1-x} = \mathcal{P}(x) = e^{\mathcal{C}(x)} \Rightarrow \mathcal{C}(x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right)$

- Desarreglos

$Des = E \circ (\mathcal{C}_{\geq 2})$

pero $\mathcal{C}_{\geq 2}(x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right) - \frac{x}{1!}$

$\Rightarrow D(x) = e^{\log\left(\frac{1}{1-x}\right) - x} = \frac{1}{1-x} \cdot e^{-x}$

$\Rightarrow$ ~~D(x)~~ $D_n = n! [x^n] D(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

- Otra forma de desarreglos

Tenemos que una permutación se ve como:

$\mathcal{P} = E \circ Des \Rightarrow \mathcal{P}(x) = E(x) \cdot D(x)$

$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = e^x D(x) \Rightarrow D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$

$\widetilde{Des}(x) = \widetilde{E}(x)^{-1}\, \widetilde{\mathcal{P}}(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{-1} \prod_{j\geq 1} \frac{1}{1-x^j} = \prod_{j\geq 2} \frac{1}{1-x^j}$

Def.-

$F'[V] : F[V_+]$ ← agregar un punto.

(Notación $V_+ := V \cup \{*\}$)

- $E' = E$

con la def. $(F)'(x) = F'(x)$.

- $\mathcal{C}' = \mathcal{L}$

$\mathcal{C}$: ciclos ; $\mathcal{L}$: orden lineal

- $\mathcal{L}' = \mathcal{L}^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$ ✓

Def.-

$F^\circ[V] = F[V] \times V$

$\downarrow \sigma \qquad F(\sigma) \times \downarrow \sigma$

$F^\circ[W] = F[W] \times V$

$\Rightarrow F(x) = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!} \Rightarrow F^\circ(x) = \sum_{n \geq 0} n f_n \frac{x^n}{n!}$

$= \sum_{n \geq 1} f_n \frac{x^n}{(n-1)!} = x F'(x)$

- $F^\circ = x \cdot F'$

particiones de conjuntos — conjunto de conjuntos no vacíos

$\boxed{\cancel{E \circ} E_{\geq 1}}$

- $part = E \circ E_{\geq 1}$

$$\Rightarrow p(x) = e^{e^x - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!} \quad \text{donde } B_n = \text{numero de Bell}$$

- $$\widetilde{part}(x) = Z_E(\tilde{E}_{\geq 1}(x), \tilde{E}_{\geq}(x^2), \ldots)$$

Antes

$$Z_E(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} fix F(\sigma) \, x_1^{c_1(\sigma)} x_2^{c_2(\sigma)} \ldots$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_1^{c_1(\sigma)} x_2^{c_2(\sigma)} \ldots$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sum i n_i = n} \frac{n!}{\prod n_i! \, \prod i^{n_i}} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots$$

$$= \sum_{n \geq 0} \sum_{\sum i n_i = n} \prod_i \frac{1}{n_i!} \left(\frac{x_i}{i}\right)^{n_i}$$

$$= e^{x_1/1} e^{x_2/2} e^{x_3/3} \ldots = e^{\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \ldots}$$

$$\Rightarrow E(x) = Z_E(x, 0, \ldots) = e^{\frac{x}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0}{3} + \ldots} = e^x$$

$$\Rightarrow \tilde{E}(x) = Z_E(x, x^2, \ldots) = e^{\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots} = e^{-\log(1-x)}$$

$$= \frac{1}{1-x}$$

- $$\widetilde{par}(x) = Z_E(\tilde{E}_{\geq 1}(x), \tilde{E}_{\geq 1}(x^2), \ldots)$$

$$= Z_E\left(\frac{x}{1-x}, \frac{x^2}{1-x^2}, \frac{x^3}{1-x^3}, \ldots\right)$$

$$= \exp\left(\frac{\frac{x}{1-x}}{1} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{1-x^3} + \ldots\right)$$

Escaneado con CamScanner

$$= \exp\left(\sum_{r\geq 1} \frac{1}{r} \sum_{j\geq 1} x^{rj}\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{j\geq 1} \sum_{r\geq 1} \frac{(x^j)^r}{r}\right) = \exp\left(\sum_{j\geq 1} \log\left(\frac{1}{1-x^j}\right)\right)$$

$$= \prod_{j\geq 1} \frac{1}{1-x^j}$$

Arboles enraizados

A = arboles con raiz (enraizados)

a = arboles sin raiz

$\Rightarrow A = a^{\bullet}$

$|a[n]| = n^{n-2}$

$\Updownarrow$

$|a^{\bullet}[n]| = n^{n-1}$

$\Updownarrow$

$|a^{\bullet\bullet}[n]| = n^{n}$

Formula de Cayley

$$F_k[V] = \begin{cases} F[V] & \text{si } |V| = k \\ \emptyset & \text{si } |V| \neq k \end{cases}$$

$X = E_1$

$1 = E_0$

$X^2 = \mathcal{L}_2 \neq E_2$

$X(X \cdot F')' = F^{\bullet\bullet}$ ← permite repetir

$E_2 \cdot F''$ ← No repetes dos puntos distintos no ordenados

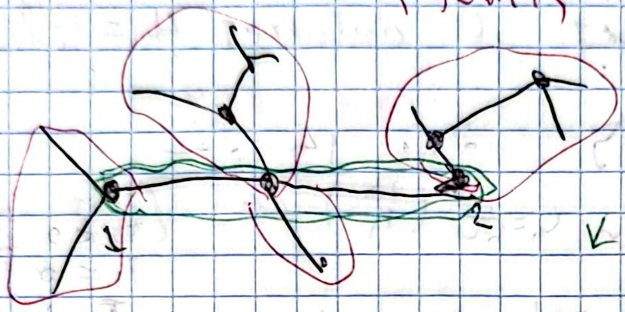
$X^2 \cdot F''$ a dos puntos distintos ordenado

dos pun… tal vez no or…

Endomorfismo

Probaremos que $\sigma^{\bullet\prime}(X) = End(X)$.

un árbol que tiene dos vértices distinguidos posiblemente iguales

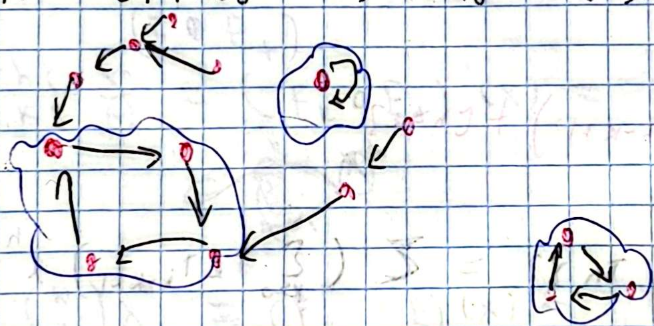


un orden lineal donde tengo árboles enraizados en la línea

$\Rightarrow \quad \sigma^{\bullet\bullet} = \mathcal{L} \circ \sigma^{\bullet}$ Es lo mismo la generadora de lineales que de permutaciones

$\Rightarrow \quad \sigma^{\bullet\bullet}(x) = L(\sigma^{\bullet}(x)) = \mathcal{S}(\sigma^{\bullet}(x))$

pero esto último es una endofunción

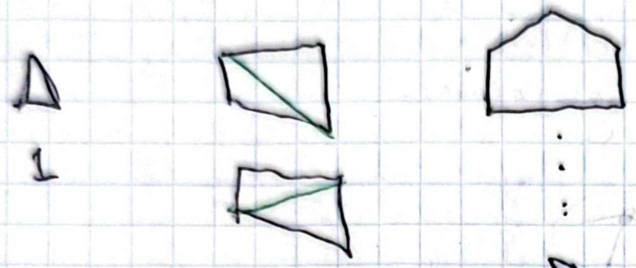


Los endomorfismos son permutaciones (azul) con árboles enraizados pegados

$\Rightarrow \quad End = \mathcal{S} \circ \sigma^{\bullet}$

$\Rightarrow \quad \sigma^{\bullet\bullet}(x) = End(X)$ □

¿Cuantas triangulaciones hay de un poligono convexo de n vertices usando sus diagonales?



1 2 5 ... 14 ...

Numeros de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

$T_0 = 0$
$T_1 = 0$
Def. convenientemente. $T_2 = 1$

$$T_n = \sum_{k=2}^{n-1} T_k \cdot T_{n-k+1}, \quad n \geq 3$$

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n \quad \cancel{\Rightarrow T^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} T_k T_{n-k} \right) x^n}$$

$$\Rightarrow T_n = \left(\sum_{k=0}^{n} T_k T_{n-k+1} \right) + [n=2]$$

$$\Rightarrow T(x) = \sum T_n x^n = \sum \left(\sum_{k=0}^{n} T_k T_{n-k+1} \right) x^n + \sum_{n \geq 0} [n=2] x^n$$

$$\Rightarrow x(T(x) - x^2) = \sum_{n \geq 0} T_{n+1} x^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow x T(x) - x^3 = T^2(x)$$

$$\Rightarrow T^2(x) - x T(x) + x^3 = 0$$

$$\Rightarrow T(x) = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4x^3}}{2}$$

$$\Rightarrow T(x) = x \, \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2} \quad \Rightarrow T_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$$

$$= C_{n-2}$$

Stirling

- $\left[{n \atop k}\right] = \#\{\pi \in S_n \mid \pi$ tiene k ciclos$\}$

"primer tipo sin signo"

- $\left\{{n \atop k}\right\} = \#$ particiones de $[n]$ en k partes.

"2do tipo"

- $\sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] = n!$

- $\sum_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\} = B_n \in$ Numeros de Bell

- $\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n = \underset{\displaystyle (E \circ E_+)}{\underset{\parallel}{\mathrm{part}(x)}} = e^{e^x - 1}$

$\Rightarrow$ *) $\sum_{n\geq 0} \left\{{n \atop k}\right\} \frac{x^n}{n!} = (E_k \circ E_+)(x) = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}$

*) $\sum_{n\geq 0} \binom{n}{k} \frac{x^n}{n!} = (E_k \cdot E)(x) = \frac{x^k}{k!} \cdot e^x$

* $\sum_{n\geq 0} \left[{n \atop k}\right] \frac{x^n}{n!} = (E_k \circ \mathcal{C})(x) = \frac{\left[\log\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]^k}{k!}$

sabemos que $\mathcal{S} = E \circ \mathcal{C}$

$* \sum_{n\geq 0} \binom{n}{k} x^n = ((\mathcal{L}^+)^k \cdot \mathcal{G})(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^k \frac{1}{1-x}$

$* \sum_{n\geq 0} \left\{ {n \atop k} \right\} x^n = \sum_{n\geq 0} \left\{ {n \atop k} \right\} n! \frac{x^n}{n!}$

$= \mathcal{L}_+^{(1)} \cdot \mathcal{L}_+^{(2)} \cdots \mathcal{L}_+^{(k)}$ con $\mathcal{L}_+^{(j)} = \mathcal{L}_+ \circ (\underbrace{x + x + \cdots + x}_{j})$

$= \cancel{\frac{1}{1+x} \cdot x \cdot \frac{1}{1-x} \cdot 2x \cdots \frac{1}{1-x} \cdot kx}$

$= \frac{1}{k!} \frac{x}{1-x} \cdot \frac{2x}{1-2x} \cdots \frac{kx}{1-kx} = \prod_{j=1}^{k} \frac{x}{1-jx}$

$* \sum_{n\geq 0} \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m$

$* \sum_{n\geq 0} \left[{m \atop n} \right] x^n = x^{\overline{m}}$

Sea $S_m = \sum_{n\geq 0} \left[{m \atop n} \right] a^n$

$\Rightarrow \sum S_m \frac{x^m}{m!} = \sum_{m\geq 0} \left(\sum_{n\geq 0} \left[{m \atop n} \right] a^n \right) \frac{x^m}{m!}$

$= \sum_{n\geq 0} a^n \sum_{m\geq 0} \left[{m \atop n} \right] \frac{x^m}{m!} = \sum_{n\geq 0} a^n \left(\frac{\log\left(\frac{1}{1-x}\right)^n}{n!} \right)$

$= \frac{1}{(1-x)^a} \Rightarrow S_m = m! [x^m] \frac{1}{(1-x)^a}$

$= m! \binom{m+a-1}{a-1} = (a+m-1)(a+m-2)\cdots(a)$

$= a^{\overline{m}}$

$x^{\overline{m}} = x(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1)$

$x^{\underline{m}} = x(x-1)\cdots(x-m+1)$

$x^{\overline{m}} = \sum_{n\geq 0} \left[{m \atop n}\right] x^n$

$\#([m]\to[n]) = n^m$

$\#([m]\to[n]) = n^{\underline{m}}$
inyectivas

$\#([m]\to[n]) = \left\{{m \atop n}\right\} n!$
sobreyectivas

$\#([m]\to[n]) = n!$ (para $n=m$)
Biyectivas

sobreyectivas

$\sum_{n\geq 0} \left\{{m \atop n}\right\} x^{\underline{n}} = \sum_{n\geq 0} \left\{{m \atop n}\right\} n! \frac{x^{\underline{n}}}{n!} = \sum_{n\geq 0} \#([m]\to[n]) \binom{x}{n}$

$= x^m$

$\sum_{n\geq 0} \left\{{m \atop n}\right\} (-1)^{m-n} x^{\overline{n}} = x^m$

Sea $S_m = \sum_{n\geq 0} \left\{{m \atop n}\right\} (-1)^{m-n} a^{\overline{n}}$

$\Rightarrow \sum_{m\geq 0} S_m \frac{x^m}{m!} = \sum_{n\geq 0} a^{\overline{n}} \left(\sum_{m\geq 0} \left\{{m \atop n}\right\} \frac{(-1)^m x^m}{m!} \right)$

$= \sum_{n\geq 0} a^{\overline{n}} (-1)^n \frac{1}{n!} (e^{-x}-1)^n = \sum_{n\geq 0} \binom{a+n-1}{n} (1-e^{-x})^n$

$= \cancel{(1+(1-e^{-x}))} = \sum_{n\geq 1} \binom{n+a-1}{a-1} (1-e^{-x})^n$

$= \frac{1}{[1-(1-e^{-x})]^a} = e^{ax}$ (por $\sum_{n\geq 0} \binom{n+r}{r} x^n = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$

$$= \sum_{n \geq 0} a^n \frac{x^n}{n!}$$

- $\sum_{n \geq 0} \left[{m \atop n} \right] (-1)^{m-n} x^n = x^{\underline{m}}$

- $\sum_{n \geq 0} \left[{m \atop n} \right] \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{m-n} = [m = k]$

- $\sum_{n \geq 0} \left\{ {m \atop n} \right\} \left[{n \atop k} \right] (-1)^{m-n} = [m = k]$

- $\left\{ {n \atop 0} \right\} = [n = 0]$

- $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$

- $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1, \; n \geq 1.$

- $\left\{ {n \atop 3} \right\} = \dfrac{3^n - 3 - 3(2^n - 2)}{3!}$

- $\left\{ {n \atop n} \right\}$

- $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$

- $\left\{ {n \atop n-2} \right\} = \binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$
$$= \binom{n}{3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$$

- $\left[{n \atop 0} \right] = [n = 0]$; $\left[{n \atop n} \right] = 1$
- $\left[{n \atop 1} \right] = (n-1)!$

- $\left[{n \atop n-1}\right] = \binom{n}{2}$

- $\left[{n \atop 2}\right] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (k-1)!\,(n-k-1)!$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{k(n-k)} = \frac{(n-1)!}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}$$

$$= (n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = (n-1)!\, H_{n-1}$$

- $x^{\bar{n}} = \sum_{k=0} \left[{n \atop k}\right] x^k$

Dem:

Def la acción $S_n \curvearrowright ([n] \to [x])$

t.q. si $\sigma \in S_n$ y $f:[n] \to [x]$ en

$\sigma \cdot f = f \circ \sigma^{-1}$

$\Rightarrow \left| [x]^{[n]} / S_n \right| = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{fix}(\sigma)$

$= \frac{1}{n!}$

$\mathrm{fix}(\sigma) = x^{\#\text{ciclos en } \sigma}$

$\Rightarrow \left| \quad \right| = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x^{\#\text{ciclos en } \sigma} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k$

y $\left| [x]^{[n]} / S_n \right| = \left| \{ (c_1, \dots, c_x) : c_i \geq 0, \sum c_i = n \} \right|$

$= \binom{n+x-1}{n} = \frac{x^{\bar{n}}}{n!}$ $\quad\therefore\quad x^{\bar{n}} = \sum_{k=1}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k$.

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$$

y $\displaystyle\sum_{n\geq 0} B_n \frac{x^n}{n!} = e^{e^x - 1}$

$$= e^{-1} e^{e^x} = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^x)^k}{k!}$$

$$= e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!}$$

$$= e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} = e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k\geq 0} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow B_n = e^{-1} \sum_{k\geq 0} \frac{k^n}{k!}$$

Formula de Inclusion - Exclusion

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

si $A, B, C \subseteq X$

$$\Rightarrow |X \setminus (A \cup B \cup C)| = |X| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| -$$

$A_1, \dots, A_n \subseteq X$

$$\left| X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Escaneado con CamScanner

Si $\exists\, a_k$ t.q. $\forall I \in \binom{[n]}{k}$ t.q. $\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = a_n$

$$\Rightarrow \left| X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a_k$$

Ejemplo.- Desarreglos (De nuevo)

Sea $X = S_n$, $A_i = \{\sigma \in S_n : \sigma(i) = i\}$

Tener a "i" como punto fijo

$$\Rightarrow \mathrm{Des}[n] = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$\Rightarrow |\mathrm{Des}[n]| = \left| X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

$$= \sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|} (n-|I|)!$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)! = \boxed{n! \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{k!}}$$

Ejemplo:

Recordemos que $\left\{ {n \atop k} \right\} k! = \#\{[n] \to [k] \text{ suryectivas}\}$

Sea $X = ([n] \to [k])$, $A_i = \{f : i \notin \mathrm{im}(f)\}$

$$\Rightarrow ([n] \to [k] \text{ suryec}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$\Rightarrow \left\{ {n \atop k} \right\} k! = \#(\sim) = \left| X \setminus \bigcup A_i \right| = \sum_{I\subseteq[k]} (-1)^{|I|} \underbrace{\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|}_{\Downarrow}$$

$[n] \to ([k]\setminus I)$

$$= \sum_{I\subseteq[k]} (-1)^{|I|} (k-|I|)^n$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j (k-j)^n$$

Escaneado con CamScanner

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j (k-j)^n$$

Ejemplo.

$\#([n] \to [k]) = k^{\underline{n}}$ inyectivas

Sea $X = ([n] \to [k])$, A:

$\varphi(n) = \#\{m \in [n] \mid (m,n)=1\}$, $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$

Sea $X = [n]$, $A_i = \{k \mid p_i \mid k\}$

$\Rightarrow \varphi(n) = \left| X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right| = \sum_{I \subseteq [k]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$

$= \sum (-1)^{|I|} \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i} = n \sum_{I \subseteq [k]} \frac{(-1)^{|I|}}{\prod_{i \in I} p_i}$

$= n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$

Generalización:

Sea $f : \mathcal{P}([n]) \to \mathbb{R}$ y $g(I) = \sum_{I \subseteq J} f(J)$

Es un sistema cuadrado de $2^n \times 2^n$ la cual tiene por solución

$$f(I) = \sum_{I \subseteq J} (-1)^{|J \setminus I|} g(J)$$

¿De donde sale inclusión - exclusión?

Sean $A_1, \dots, A_n \in X$

para cada $x \in X \rightsquigarrow I_x = \{ i \in [n] \mid x \in A_i \}$

Def. $f(I) = |\{ x \in X \mid I_x = I \}|$

$\Rightarrow g(I) = \sum_{J \supseteq I} f(J) = |\{ x \in X \mid I_x \supseteq I \}|$

$= \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$

Por otro lado $f(I) = \left| \bigcap_{i \in I} A_i \setminus \bigcup_{j \notin I} A_j \right|$

pero por el teo.

$$f(I) = \sum_{J \supseteq I} (-1)^{|J \setminus I|} g(J)$$

$$\Rightarrow f(\emptyset) = \sum_{J} (-1)^{|J|} g(J)$$

$T_b(a_n) = b_n$ con $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$

¿Cómo recupero a_k? $a_n = \sum_{k} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$

Recordamos el Lema de Burnside

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} fix(\sigma_g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} fix(g)$$

(en A)

Def: Un conjunto ponderado es una pareja $(X, w: X \to A)$, (A es anillo conmutativo)

- para $Y \subseteq X$ definimos

$$|Y|_w = \sum_{y \in Y} w(y)$$

- Un morfismo de conjuntos ponderados $(X, w) \to (X', w')$ es una función $f: X \to X'$ t.q. $\forall x \in X$, $w(x) = w'(f(x))$

- Una acción de G en un conjunto ponderado (X, w) es una acción de G en X t.q. $w(g \cdot x) = w(x)$

- $Aut(X, w)$ (morfismos en sí mismos que tienen inversos).

- Si tengo (X, w) y (Y, v) entonces a $X \times Y$ le puedo asociar $u(x,y) = w(x)v(y)$

Así $|X \times Y|_u = |X|_w |Y|_v$

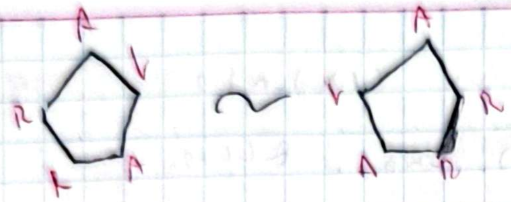
Lema de Burnside (ponderado)

Sea $R \subseteq X$ con 1 representante de cada órbita entonces

$$|R|_w = |R'|_w$$ si R' es otro conjunto de representantes de órbitas

$$\overset{\text{def}}{=} |X/G|_w$$

$\therefore$ $$|X/G|_w = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|_w$$



¿Qué pasa si ahora quiero contar coloraciones no equivalentes las cuales tienen una cierta cantidad de cada color?

$$\sum \binom{\#\text{col con}}{i\ A's,\ j\ R's,\ k\ V's} A^i R^j V^k \leftarrow \text{Inventario de coloraciones}$$

El conjunto de coloraciones son $\{A,R,V\}^{[5]}$

defino $w: \{A,R,V\}^{[5]} \to \mathbb{Z}[A,R,V]$

$$c \to \prod_{i\in[5]} c(i) = A^{\#A's} R^{\#R's} V^{\#V's}$$

$$\therefore \left| \{A,R,V\}^{[5]} / C_5 \right| = \frac{1}{5} \sum_{g \in C_5} |Fix(g)|_w$$

$$= \frac{1}{5}\left[\left|\{A,R,V\}^{[5]}\right|_w + 4(A^5+R^5+V^5)\right]$$

pero $\left|\{A,R,V\}^{[5]}\right|_w = \sum_{c:[5]\to\{A,R,V\}} w(c) = \sum_c \prod_{i=1}^{5} c(i)$

$$= \prod_{i=1}^{5} (A+R+V)$$

$$\therefore |\sim| = \frac{1}{5}\left[(A+R+V)^5 + 4(A^5+R^5+V^5)\right]$$

$= I(A,R,V)$ $\therefore$ $[A^2R^2V]I = \frac{1}{5}\binom{5}{2,2,1} = \frac{1}{5}\frac{5!}{2!2!} = 6$

Escaneado con CamScanner

Teorema de coloración de Poyla

Tengo $G \curvearrowright X$ y $\tilde{C}$ un conjunto de colores

Una coloración es una función de $X \to C$.

Inventario de coloraciones

$\Rightarrow \quad |C^X/G|_w = P_\alpha(\sum c, \sum c^2, \sum c^3, \dots) = \sum \prod_{x \in X} f(x)$

$w: C^X \to \mathbb{Z}[\tilde{C}]$

con $P_\alpha(x_1, x_2, x_3, \dots) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{c_1(g)} x_2^{c_2(g)} \cdots$

Recordatorio:

Sea A anillo conmutativo, $G \curvearrowright X$ acción

$\Rightarrow \quad P_{G \curvearrowright X}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^{\infty} x_i^{c_i(g)}$

donde $c_i(g) = \#$ ciclos de longitud i en la permutación g.

Consideramos $C_p \curvearrowright C_p$ grupo cíclico de orden p

$\Rightarrow \quad P_{C_p \curvearrowright C_p}(x_1, x_2, \dots)$

$= \frac{1}{p}[x_1^p + (p-1)x_p]$

$\Rightarrow$ # collares no equivalentes $= \frac{1}{p}[|C|^p + (p-1)|C|]$

¿Ciclos en general?

C_n, si φ es una rotación ent. si $d|n$

$\Rightarrow \varphi^d \mapsto X_{n/d}^d$

Ejemplo $C_6 \curvearrowright C_6$

$\Rightarrow \varphi^0 = \varphi^6 = X_1^6$

$\varphi^1 \to X_6$

$\varphi^2 \to X_3^2$

$\varphi^3 \to X_2^3$

$\varphi^4 \to X_3^2$

$\varphi^5 \to X_6$

$X_{\frac{n}{(k,n)}}^{(k,n)}$

$\Rightarrow P_{C_n \curvearrowright C_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_{\frac{n}{(k,n)}}^{(k,n)} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) X_{n/d}^{d}$

$= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) X_d^{n/d}$

Sea $k = |C|$ numero de colores

$\Rightarrow P_{C_n \curvearrowright C_n}(k, k, \ldots) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) k^{n/d}$

$$P_{S_n \to [n]}(k, k, \dots) = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

por otro lado

$$P_{S_n \to [n]}(x_1, x_2, \dots)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \prod x_i^{c_i(\sigma)} = \frac{1}{n!} \sum_{\sum i n_i = n} \frac{n!}{\prod n_i! \, \prod i^{n_i}} \prod x_i^{n_i}$$

$$= \sum_{\sum i n_i = n} \prod \frac{x_i^{n_i}}{(n_i)! \, (i)^{n_i}} = [t^n] \prod_{i \geq 1} e^{t^i x_i / i}$$

$$\therefore \sum_n P_{S_n \to [n]}(x_1, x_2, \dots) \, t^n = \prod_{i \geq 1} e^{t^i x_i / i} = e^{\sum \frac{t^i x_i}{i}}$$

$$\Rightarrow P_{S_n \to [n]}(k, \dots) = [t^n] \prod_{i \geq 1} \exp\left(\frac{t^i k}{i}\right)$$

$$= [t^n] \exp\left(\sum_i \frac{t^i k}{i}\right) = [t^n] \left(\frac{1}{1-t}\right)^k$$

$$= \binom{n+k-1}{k-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0} P_{S_n \to [n]}\left(\sum c, \sum c^2, \dots\right) t^n$$

$$= \exp\left(\sum_{i \geq 1} \frac{t^i \left(\sum c^i\right)}{i}\right) = \exp\left(\sum_{c \in C} \log\left(\frac{1}{1-tc}\right)\right)$$

$$= \prod_{c \in C} \frac{1}{1-tc}$$

Recordemos que:

2) $Z_{F\circ G}(x_1, x_2, \ldots) = Z_F(Z_G(x_1, x_2, \ldots), Z_G(x_2, x_4, x_6, \ldots)$

$, Z_G(x_3, x_6, x_9, \ldots), \ldots)$

1) $\widetilde{(F\circ G)}(x) = Z_F(\tilde{G}(x), \tilde{G}(x^2), \tilde{G}(x^3), \ldots)$

Dem.-

$\cancel{\widetilde{(F\circ G)}}(x)$

Teorema Burnside ponderado

Si $G \curvearrowright (X, w)$ entonces

$$|X/G|_{\bar{w}} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|_w$$

Teorema (Polya): Dados $G \curvearrowright X$ y conjunto de colores C, definimos $G \curvearrowright (C^X, w)$ como sigue:

$g \circ f := f \circ (g^{-1} \cdot -)$; $w(f) = \prod_{x \in X} f(x)$

(aquí $w : C^X \to \mathbb{Z}[c ; c \in C]$)

$\Rightarrow |C^X/G|_w = P_{G \curvearrowright X}(\sum c, \sum c^2, \sum c^3, \dots)$

Teorema (Polya ponderado): Como antes, pero el conj. de colores es ponderado, digamos (C, v) y tomamos $W_v(f) = \prod_{x \in X} v(f(x))$

$\Rightarrow |C^X/G|_{W_v} = P_{G \curvearrowright X}(|C|_v, |C|_{v^2}, |C|_{v^3}, \dots)$

Proposición: Si $f \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots)$ cumple que

$\tilde{F} \circ G(x) = f(Z_G(x_1, x_2, \dots), Z_G(x_2, x_4, x_6, \dots), \dots)$

$\Rightarrow f = Z_F$

Cuadrados latinos y el teorema de Hall

Def.- Un cuadrado latino de orden "n" es una matriz de $n \times n$ con entradas en $[n]$ t.q. cada $i \in [n]$ aparece exactamente una vez en cada renglon y cada columna

De orden 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es la tabla de multiplicar de $\mathbb{Z}/3$

La tabla de multiplicar de un grupo es un cuadrado latino.

Propo.- Hay al menos $\prod_{k=1}^{n} k!$ cuadrados latinos de orden n.

Usaremos el teo. de Hall:

Dada una familia $(A_1, A_2, \dots, A_i)$ A_i conjunto finito

Una transversal (o sistema de representantes distintos) es $(x_1, \dots, x_n)$ t.q. $x_i \in A_i$ y $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$

Teo (Hall) $(A_1, \dots, A_n)$ tiene una transversal si y solo si $\forall J \subseteq [n]$

$$\left|\bigcup_{j \in J} A_j\right| \geq |J|$$

Dem:

$\Rightarrow)$ ✓ si existe transversal entonces cada A_j tiene al x_j y cada uno es distinto entonces tiene al menos $|J|$ de elementos.

$\Leftarrow)$ por inducción en n

$n=1$ ✓

Caso 1: sup. que hay $J \neq \emptyset$, $J \subsetneq [n]$ t.q. $\left|\bigcup_{j \in J} A_j\right| = |J|$ por H.I. hay $x_j \in A_j$ $(j \in J)$ distintos.

si $A_i' = A_i \setminus \bigcup_{j \in J} A_j$ para $i \notin J$

pero $\bigcup_{i \in I} A_i' = \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \setminus \left(\bigcup_{j \in J} A_j\right)$

$= \left(\bigcup_{i \in I \cup J} A_i\right) \setminus \left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) \Rightarrow \left|\bigcup_{i \in I} A_i'\right| \geq |I \cup J| - |J| =$

$\therefore$ por hip. inductiva $\{A_i'\}$ tiene transversal (y la transversal total es la unión de las dos encontradas).

Caso 2: $\forall J \neq \emptyset,\ J \neq [n]$ $\quad \left|\bigcup_{j\in J} A_j\right| \geq |J|+1$

Elegimos $x_n \in A_n$ arbitrariamente y considero

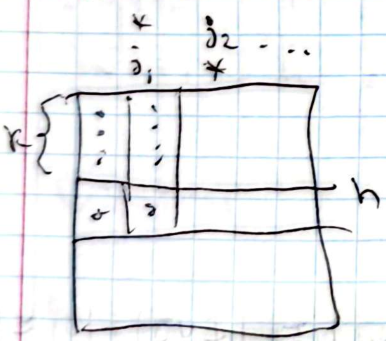
$A_i' = A_i \setminus \{x_n\} \Rightarrow \left|\bigcup_{i\in J} A_i'\right| \geq |J|+1-1 = |J|$

∴ por H.I existe transversal para (A_i')

y pegándole x_n obtenemos para todo. ■

Def.- un rectángulo latino de $\underset{\text{filas}}{k} \times \underset{\text{columnas}}{n}$ $(k<n)$ es una matriz con entradas en $[n]$ t.q. en cada renglón aparecen los números $1,\dots,n$ una vez cada uno y en cada columna aparecen a lo más una vez.

Obs.-



$A_j = [n] \setminus \underbrace{C}_{C_j}$ (columna j del rectángulo)

$|A_j| = n-k$

¿ $\left|\bigcup_{j\in J} A_j\right| \geq |J|$?

$\bigcup_{j\in J} A_j = \bigcup_{j\in J}([n]\setminus C_j)$

$= [n] \setminus \bigcap_{j\in J} C_j$

~~Cuadrados latinos ortogonales~~

Vimos que hay al menos $\prod_{k=1}^{n} k!$ cuadrados latinos de orden n.

Teo.- De hecho hay al menos $(n!)^{2n}/n^{n^2}$

Lema.- Cualquier grupo de orden n se puede generar con $\log_2 n$

Dem.- Sup que $G=\langle g_1,\dots,g_k\rangle$ y podemos suponer que $g_{i+1}\notin G_i=\langle g_1,\dots,g_i\rangle$

$\Rightarrow |G_i|\geq 2^i \Rightarrow |G|\geq 2^k \Leftrightarrow k\leq \log_2|G|$

Prop.- El número de grupos de orden n es $\leq (n!)^{\ell}$

Cuadrados latinos ortogonales

Si tengo dos cuadrados latinos (a_{ij}) (b_{ij}) son ortogonales si $\forall x,y\in[n]$ $\exists!\,(i,j)$ t.q. $a_{ij}=x$, $b_{ij}=y$

Ejemplos:

- No hay ninguno de orden 2 porque solo son dos cuadrados latinos $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ y la pareja (1,2) (1,2) se repiten!

$\mathbb{Z}_3$
$$\begin{matrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{matrix}$$
son ortogonales.

Sea $(G,\cdot)$ un grupo, consideremos

$(G,\cdot)$ y $(G,*)$ son ortogonales (su tabla de multiplicar)

con $a*b = b\cdot a^{-1}$

Obs: $(G,\cdot)$, $(G,*)$ son ortogonales si $\forall a,b \in G$, $\exists!\ (x,y)\in G^2$ t.q. $x\cdot y = a$, $x*y = b$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy = a \\ yx^{-1} = b \end{cases} \Rightarrow y^2 = ba$$

y como a grupo es de orden impar $\exists!\ y$ t.q. $y^2 = ba$

$\Rightarrow$ $x = ay^{-1}$ y es única también.

$Lo(n) =$ max # de cuadrados latinos de orden n ortogonales por parejas.

- probamos que si n impar $Lo(n) \geq 2$
- veremos que $Lo(6) = \underline{1}$

Teo: Si (a_{ij}) (b_{ij}) son ortogonales y $\sigma \in S_n$ $\Rightarrow$ (a_{ij}) y $(\sigma(b_{ij}))$ son ortogonales

Teo.- $LO(n) \leq n-1$.

Proposición.- Si p es primo $\Rightarrow$ $LO(p) = p-1$

Dem: Consideremos $(\mathbb{Z}_p, *_k)$ $k = 1, \dots, p-1$ son casi grupos

con $x *_k y := x + ky$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} x *_i y = a \\ x *_j y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + iy = a \\ x + jy = b \end{cases}$ tiene sol. única

$\therefore$ $(\mathbb{Z}_p, *_k)$ son ort. 2 a 2. $\Rightarrow LO(p) \geq p-1$

$\Rightarrow$ $p-1 \leq LO(p) \leq p-1 \Rightarrow LO(p) = p-1$.

Teo.- $LO(p^k) = p^k - 1$ $\forall p$ primo.

Obs.- Si tengo una ~~gru~~ pareja de casi grupos $(G, \cdot), (G, *)$ y otra pareja distinta $(H, \cdot), (H, *)$ $\Rightarrow$ $(G \times H, \cdot)$ y $(G \times H, *)$ también son ortogonales.

Teo.- $LO(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) \geq \min_i \{ p_i^{\alpha_i} - 1 \}$

Geometrías finitas

Def.- Un plano afín consta de un conjunto de puntos A y una familia de subconjuntos de A llamadas rectas tales que:

- Cualesquiera dos puntos distintos están en una recta
- Por cada punto fuera de una recta hay una única paralela (ajenas)
- Hay 4 puntos, de los cuales no hay 3 colineales

Si $\mathbb{F}_q$ es un campo finito, hay un plano afín con

$$A=\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{F}_q\}$$

Las rectas son los subconjuntos de la forma

$$\{(x,y) \mid ax+by=c\}$$

con $a,b,c \in \mathbb{F}_q$, $(a,b) \neq (0,0)$

Obs.-

- Cada recta tiene q puntos.

- Cada recta es paralela a $\frac{q^2-q}{q} = q-1$

- Cada punto está en $\frac{q^2-1}{q-1} = q+1$ rectas

Def.- un plano afín es de orden n si;

- toda recta tiene n pts
- toda clase de paralelismo tiene n rectas
- cada pto está en $n+1$ rectas
- El plano tiene n^2 puntos
- Hay $n(n+1)$ rectas n^2+n

- Proposición.- Todo plano afín finito tiene algún orden.

Dem.- Sea l_0 una recta y $n = |l_0|$

- Def.- (Plano proyectivo)

- cualesquiera 2 pts están en una única recta
- cualesquiera dos rectas se cortan en un único punto
- Hay 4 pts con no 3 colineales.

- Prop.- Si $\mathbb{P}=(X, R)$ es plano proyectivo entonces si quito una recta obtengo un plano afín.

Obs.- Si $\mathbb{A} = (X, \mathcal{R})$ es plano afín lo podemos convertir a proyectivo. Si $\mathcal{L} := \mathcal{R}/_{\parallel}$ es la clase de paralelismo de rectas (clase de equivalencia) entonces $\mathbb{P} = (X \cup \mathcal{L}, \{\mathcal{L}\} \cup \mathcal{R}^+)$ es plano proyectivo con

$\mathcal{R}^+ = \{ m \cup \{[m]\} \mid m \in \mathcal{R} \}$ $\quad (m \parallel n \Rightarrow [m] = [n])$

Def.- Un plano proyectivo es de orden n si:

- Cada recta tiene $n+1$ puntos
- Cada punto está $n+1$ rectas
- Hay n^2+n+1 puntos
- Hay n^2+n+1 rectas

Teo.- $n-1$ cuadrados latinos de orden n mutuamente ortogonales $\Leftrightarrow$ un plano afín de orden n.

• Diseños.-

Un $t-(v,k,\lambda)$ diseño un conjunto X y una familia de subconjuntos $\tilde{B} \subseteq P(X)$ con:

- $v = |X|$
- $\forall B \in \tilde{B}$, $|B| = k$
- $\forall T \in \binom{X}{t}$
- $\lambda = \#\{B \in \tilde{B} : T \subseteq B\}$
- $b = |\tilde{B}|$

obs.- Un plano afín de orden n es un $2-(n^2, n, 1)$ diseño.

Un plano proyectivo de orden n es un $2-(n^2+n+1, n+1, 1)$

Def.- Un sistema de ternas de Steiner es un $2-(v, 3, 1)$ diseño

Obs.- $k \leq v$ (si $k = v \Rightarrow \lambda = 1$)

Proposición.- $b = \dfrac{\lambda \binom{v}{t}}{\binom{k}{t}}$

Proposición.- Sea $s \leq t$ y $\tilde{S} \subseteq X$ con $|\tilde{S}| = s$

Entonces $(X \setminus \tilde{S}, B')$ es un $s-(v-s, k-s, \lambda)$ diseño donde $B' = \{B \setminus \tilde{S} : \tilde{S} \subseteq B \in \tilde{B}\}$

Proposición.- sea $s \leq t$. Un $t-(v,k,\lambda)$ diseño también es un $s-(v,k,\lambda_s)$ diseño para:

$$\lambda_s = \lambda \binom{v-s}{t-s} \Big/ \binom{k-s}{t-s}$$

Teo.- Si $t=2 \Rightarrow$, $b \geq v$ (Desigualdad de Fisher)

Más sobre diseños

$v = \#$ puntos

$k =$ Tamaño de los bloques

$b = \#$ bloques

t, λ: cada t puntos están en λ bloques

$$\lambda_s = \lambda \binom{v-s}{t-s} \Big/ \binom{k-s}{t-s}$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_1 = \lambda \frac{v-1}{k-1} \quad (t=2)$$

Def.- Un diseño es simétrico si $v=b$

Un plano proyectivo es un $2-(n^2+n+1, n+1, 1)$ diseño

Teorema Bruck-Ryser-Chowla.- con $b=v$

Si tenemos un $2-(v, k, \lambda)$ sistema, entonces:

- Si v par $\Rightarrow$ $k-\lambda$ es cuadrado perfecto.
- Si v impar $\Rightarrow$ la ecuación diofantina

$$z^2 = (k-\lambda)x^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} y^2$$

tiene solución con $(x,y,z) \neq (0,0,0)$

- **Proposición.-** Si $(X, \mathcal{B})$ es un $t-(v,k,\lambda)$ diseño, entonces $(X, \bar{\mathcal{B}})$ es un $t-(v, v-k, \bar{\lambda})$ es un diseño con $\bar{\mathcal{B}} = \{ X \setminus B \mid B \in \mathcal{B} \}$ y $\bar{\lambda} = \sum_{s=0}^{t} (-1)^s \binom{t}{s} \lambda_s$

- **Def.-** Un $t-(v,k,\lambda)$ diseño es trivial si $\mathcal{B} = \binom{X}{k}$ (en cuyo caso $\lambda = \binom{v-t}{k-t}$)!

- **Proposición.-** Un $t-(v,k,\lambda)$ diseño con $k \geq v-t$ es trivial.

Matrices de Hadamard

- **Teor.-** Si $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ matriz real y $|a_{ij}| \le 1 \ \forall i,j$ entonces

$$|\det A| \le n^{\frac{n}{2}}$$

La igualdad se da $\Leftrightarrow$ las columnas son ortogonales y de norma $\sqrt{n}$
$\Leftrightarrow$ las colum. son ortogonales y las entradas son ± 1.

- **Def.-** Una matriz de Hadamard es una matriz donde sus entradas son 1 o -1 y las colum. son ortogonales $(AA^T = nI = A^T A)$

Obs.- Para $n > 1$ sólo pueden existir matrices de Hadamard si n es par

- **Prop.-** Para $n > 2$ sólo pueden existir si $4 | n$

- **Teo.-** Para $n \ge 4$ las sig. son equivalentes

a) Existe una matriz de Hadamard

b) Existe $3-(n, \frac{1}{2}n, \frac{1}{4}n-1)$ diseño

c) Existe un $2-(n-1, \frac{1}{2}n-1, \frac{1}{4}n-1)$ diseño

Inversión de Lagrange

Consideramos $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ con $a_1 \neq 0$

y sea $g(x) := f^{-1}(x)$ ¿Qué vale es $[x^n]\, g(x)$?

$$[x^n]\, g(x) = \frac{1}{n} [x^{n-1}] \frac{1}{f(x)^n}$$

- **Lema:** $h(x)$ serie de Laurent:

a) $[x^{-1}]\, h'(x) = 0$

b) Si $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$, con $a_1 \neq 0$, entonces $[x^{-1}]\, f(x)^n f'(x) = [n = -1]$

- **Corolario:**

Si $g(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow [x^n]\, h(g(x)) = \frac{1}{n} [x^{-1}] \frac{h'(x)}{f(x)^n}$

- **Corolario:** Si $f(x) = x\, \varphi(f(x))$

$\Rightarrow [x^n]\, f(x) = \frac{1}{n} [x^{n-1}]\, \varphi(x)^n$

y $[x^n]\, h(f(x)) = \frac{1}{n} [x^{n-1}]\, \varphi(x)^n\, h'(x)$

Teoría extremal de conjuntos

Un ejemplo en gráficas

¿Cuál es el max # de aristas de una gráfica de n vértices que no tiene triángulos?

Def.- Sea $F \subseteq \mathcal{P}[n]$. Decimos que F es intersectante si $\forall A, B \in F$, $A \cap B \neq \emptyset$

obs: Si $A \in F \Rightarrow A^c \notin F$ pues en ese caso $A \cap A^c = \emptyset$

$\therefore$ $|F| \leq \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$

Se puede ~~dar~~ la igualdad, por ejemplo

$F = \{A \subseteq [n] \mid 1 \in A\}$ fijar un elemento.

obs: Otro ejemplo sería considerar: Si $n = 2k+1$

$F = \{A : |A| \geq k+1\} = \{A : |A| > \frac{n}{2}\}$

Si $n = 2k$

$F = \{A : |A| > k\} \cup \{$ "la mitad de los subconjuntos de tamaño k" $\}$

$\therefore$ hay al menos $2^{\frac{1}{2}\binom{2k}{k}}$ familias intersectantes que no se obtienen de fijar un elemento

Teorema (Bruijn - Erdös) Sea $F \subseteq \mathcal{P}[n]$ t.q. $\forall A \neq B \in F$, $|A \cap B| = 1$, entonces:

- $|F| \leq n$
- La igualdad solo ocurre en 2 casos:

1) $F = \left\{ \{1,2\}, \{1,3\}, \dots, \{1,n\}, \begin{matrix} \{1\} \\ \vdots \\ \{2,\dots,n\} \end{matrix} \right\}$

2) Las rectas de un plano proyectivo.

Anticadenas o Familias de Sperner:

Def.- Una Anticadena es una familia $F \subseteq \mathcal{P}([n])$ t.q. $\forall A \neq B \in F$ se tiene que $A \nsubseteq B$ y $B \nsubseteq A$

Obs.- $\forall k$, tomar $\binom{[n]}{k}$ (subconjuntos de tamaño "k") es una anticadena

$\therefore$ Hay anticadenas de $\# = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

Def.- Una cadena maximal de $[n]$ es una familia $\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \dots \subsetneq A_n = [n]$ donde $|A_{i+1} \setminus A_i| = 1$

Obs.- El número total de cadenas maximales es $n!$.

Si tomo $A \subseteq [n]$, esta estará en $k!(n-k)!$ cadenas donde $k = |A|$

Sea $C_A = \{$cadenas que pasan por $A\}$ entonces $\{C_A : A \in F\}$ son ajenos dos a dos:

$$\sum_{A \in F} |C_A| \leq n! \Rightarrow \sum_{A \in F} |A|!(n-|A|)! \leq n!$$

$$\Rightarrow \sum_{A \in F} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1 \Rightarrow |F| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

$$\text{VI} \qquad |F| \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}$$

¿La igualdad?

Si $n = 2k \Leftrightarrow \forall A \in F, |A| = k$

$\Rightarrow F = \binom{[n]}{k}$

Si $n = 2k+1$ queremos ver que la igualdad ocurre si tomo $F = \binom{[n]}{k}$ ó $\binom{[n]}{k+1}$

Sí es cierto que $\forall A \in F$, $|A| = k$ o $k+1$

Veamos que no puede haber mezclas

Erdős - Ko - Rado:

Si $F \subseteq \binom{[n]}{k}$ es intersectante ¿cuál es el máximo de $|F|$?

Si tomo $F = \{ S \in \binom{[n]}{k} : i \in S \}$ es intersectante y $|F| = \binom{n-1}{k-1}$

si $n \geq 2k$

Teorema (Erdős - Ko - Rado) ① Si $F \subseteq \binom{[n]}{k}$ es intersectante $\Rightarrow |F| \leq \binom{n-1}{k-1}$

② Si $F \in \binom{[n]}{k}$ es t-intersectante (i.e. $\forall A \neq B \in F \; / \; |A \cap B| \geq t$) entonces $|F| \leq \binom{n-t}{k-t}$ para n suficientemente grande y la igualdad ocurre solo cuando $F = \{ S \in \binom{[n]}{k} ; S \supseteq T \}$ p.a $T \in \binom{[n]}{t}$ para n suf. grande.

- Def.- Un $S \subseteq V(G)$ es una cubierta si cualquier arista tiene al menos un extremo en S (equivalentemente $G \setminus S$ es un ela (puntos sueltos))

- Def.- Un ~~conjunto~~ $M \subseteq E(G)$ es un emparejamiento si son ajenas dos a dos.

- Teorema (Konig) Si G es una gráfica bipartita $\Rightarrow$ máx emparejamiento = min cubierta

$$\underset{\text{aristas}}{\text{máx emparejamiento}} = \underset{\text{vertices}}{\text{min cubierta}}$$

Característica de Euler

Recordatorio función de Moebius de un COPO $(P;\leq)$,

- $\mu: P\times P \to \mathbb{Z}$, $\mu(x,y)=0$ si $x\nleq y$

y $\displaystyle\sum_{x\leq z\leq y} \mu(x,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=y \\ 0 & \text{si } x<y \end{cases}$

- Si $C_n^{x,y}(P) := \{(x<z_1<\cdots<z_{n-1}<y)\}$

$\Rightarrow \mu(x,y) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \# C_n^{x,y}(P)$

- $C_n(P) := \{z_0<\cdots<z_n\}$

$\Rightarrow \mu(x,y) = \displaystyle\sum_{n\geq -1} (-1)^n \# C_n((x,y))$

sub-copo de P

$= \left[\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \# C_n((x,y))\right] - 1$

Def.- Definimos la característica de Euler como:

$$\chi(P) := \sum_{n\geq 0} (-1)^n \# C_n(P)$$

Def.- Un complejo simplicial K es una familia de conjuntos finitos no vacíos (llamados símplices) tal que

$$\emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \in K \Rightarrow \tau \in K$$

y el conjunto de vértices es

$$V(K) = \bigcup_{\sigma\in K} \sigma = \{v : \{v\}\in K\}$$

$\dim \sigma = |\sigma| - 1$

$\dim K = \max_{\sigma \in K} \dim \sigma$

- El símplice canónico de dimensión n es

$\Delta^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0, \dots, x_n \geq 0 \wedge x_0 + \dots + x_n = 1\}$

- en general para J finito

$\Delta^J = \{x \in \mathbb{R}^J : \forall j \in J, \ x_j \geq 0, \ \sum_{j \in J} x_j = 1\}$

funciones

$\Rightarrow |K| = \bigcup_{\sigma \in K} \Delta^\sigma \subseteq \Delta^{V(K)}$

- $\tau \subseteq \sigma \Rightarrow \Delta^\tau \hookrightarrow \Delta^\sigma$

- $C_n(K) = \{\sigma \in K \mid \dim \sigma = n\}$

- $\partial : \mathbb{Q}C_n(K) \to \mathbb{Q}C_{n-1}(K)$

si $\sigma \in \mathbb{Q}C_n(K) \to \sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$

$\Rightarrow \partial[x_0, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [x_0, \dots, \hat{x_i}, \dots x_n]$

- Teorema (van der Waerden)

Para todo k, c existe, $n = W(k, c)$ t.q en cualquier coloración, $[n] \to [c]$ hay una ~~[illegible]~~ progresión aritmética monocromática de longitud k.

obs.-

- $W(1, c) = 1$, $W(2, c) = c+1$

¿$W(3, 2)$?

k	c	W(k, c)
3	2	9
4	2	35
5	2	178
6	2	1132
3	3	27
4	3	293
3	4	76

Def.-

Combinatoria Aditiva

La densidad natural para $A \subseteq \mathbb{N}$

$$d(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap [n]|}{n}$$

- Teorema (Szemerédi)

$\forall k>0, \forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q $\forall A \subseteq [n]$, $|A| \geq \varepsilon n$

y A tiene progresión aritmética de longitud k.

- Teorema (Roth) Szemerédi para el caso $k=3$

Def.- G gráfica, V = vértices de G, $X, Y \subseteq V$

y $E[X,Y] = \{xy \in E(G) : x \in X, y \in Y\}$

$$\Rightarrow d(X,Y) = \frac{|E(X,Y)|}{|X||Y|}$$

la densidad de aristas

Def.- $X, Y \subseteq V$, (X,Y) es ε-regular

si $\forall A \subseteq X, B \subseteq Y$ son t.q

$|A| \geq \varepsilon|X|$, $|B| \geq \varepsilon|Y|$

$$\Rightarrow |d(A,B) - d(X,Y)| \leq \varepsilon$$

- Def.- Si $V = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_K$ es ε-regular si

$$\sum_{\substack{(X_i, X_j) \text{ no} \\ \text{es } \varepsilon\text{-regular}}} \frac{|X_i||X_j|}{|V|^2} \leq \varepsilon$$

- Lema (de regularidad de Szemerédi)

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \bar{K}, N$ t.q. $\forall G$ gráfica con $|V(G)| \geq N$ existe una partición $V(G) = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_K$ ε-regular con $K \leq \bar{K}^2$

- Teorema (Borrado de triángulos)

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.q. $\forall$ gráfica G con $|V| = n$ y t.q. $\#\Delta$ en $G \leq \delta n^3$
$\Rightarrow \exists$ un conjunto A de aristas con $|A| \leq \varepsilon n^2$ t.q. $G - A$ no tiene Δ.

- Teorema (de las esquinas)

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0$ t.q. $\forall N \geq N_0$ si $A \subseteq [N]^2$ y $|A| \geq \varepsilon N^2$ entonces A contiene un $\{(x,y), (x+d, y), (x, y+d)\}$ con $d \neq 0$