Proposito: Desarrollar las herramientas fundamentales del Analisis Harmonico de grupos.

La teoria clasica de Fourier se realiza sobre $\mathbb{R}$ y su grupo dual. Lo que hace Tate es generalizar este analisis a un contexto de teoria de numeros reemplazando $\mathbb{R}$ por el anillo de adeles A_K de un campo global K.

Para poder integrar y definir una transformada de Fourier en este nuevo escenario, necesitamos dos conceptos clave:

- La estructura de grupo y campo topologico localmente compacto y $\mathbb{Q}_p$
- La medida de Haar.

Parte 1: Grupos topologicos

1

Def.-1.- (Grupo topologico)

Un grupo topologico, es un grupo G dotado de una topologia t.q las operaciones del grupo son continuas, i.e, los mapeos

Topologia producto.

$$m: G\times G \to G$$
$$m(g,h) \to gh$$

$$i: G \to G.$$
$$i(g) \to g^{-1}$$

son continuos. Lo denotaremos por $(G, \cdot, \tau_G)$

Ejemplos:-

- Cualquier grupo con la topologia discreta.

Todo subconjunto de X es abierto. I.e, $\tau = \mathcal{P}(X)$

- Los grupos aditivos $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{Z},+)$ con la top. euclideana. Los abiertos son los conjuntos generados por bolas
- El grupo Lineal general $GL(n,\mathbb{R})$ con la top. de subespacio de $\mathbb{R}^{n^2}$

Obs.— Una consecuencia directa de la definición es que si $S \subseteq G$, el conjunto $S^{-1} := \{ x \in G \mid x^{-1} \in S \}$ es abto si S es abierto.

Esto pues $S^{-1} = \{ x \in G \mid i(x) \in S \} = i^{-1}[S]$

Esta observación nos da una definición equivalente para un grupo topologico.

Proposición 1.— Un grupo G es grupo topologico si y solo si, $\forall g, h \in G$ y para cualquier vecindad W de gh^{-1}, existen vecindades U de g y V de h t.q $UV^{-1} \subseteq W$.

~~Obs.~~

Como consecuencia inmediata de la continuidad de las operaciones del grupo, tenemos que este es invariante bajo traslaciones.

Es decir, ~~si $U \in \tau$ (U abto) entonces~~ ~~$\forall g \in G$, gU y Ug~~ son ~~abtos~~ ~~y viceversa~~.

Proposición 2 (Invariante por traslación)

Sea G un grupo topologico, entonces $\forall g \in G$ y $U \subseteq G$ las sig. son equivalentes:

(i) U es abto

(ii) gU es abto

(iii) Ug es abto.

Dem.— Sea $g \in G$ y $U \subseteq G$.

Definimos la "traslación por la izquierda" como la función $L_g : G \to G$, dada por $L_g(h) = gh$ y la " ...... " como $R_g(h) = hg$. Veamos que estas funciones son de hecho homeomorfismos ~~de grupos~~. (en el sentido de topologia) (continua con inversa continua).

1) Como "m" es continua y la función $m(g, \cdot) : G \to G$ dada por $m(g,h) = gh = L_g(h)$ es la composición de "m" con la inclusión de g en la primer coordenada tendremos que L_g es continua (Analogamente R_g)

2) L_g es biyectiva, pues

$$(L_g \circ L_{g^{-1}})(h) = L_g(L_{g^{-1}}(h)) = L_g(g^{-1}h) = gg^{-1}h$$
$$= h$$

∴ $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ y por (1) nuevamente $L_{g^{-1}}$ es continua ∴ L_g es homeomorfismo. Análogamente R_g.

3) Finalmente, como L_g es homeomorfismo manda abtos en abtos ∴ $\forall U \subseteq G$

$$L_g(U) = gU \text{ es abto} \iff U \text{ es abto}$$

igual para R_g. ∴ es inv. bajo traslaciones. ∎

Otro resultado es que el espacio G es Homogéneo bajo el conjunto de traslaciones ~~sí mismo~~

Def.- (Espacio homogéneo) Sea X un esp. top. y sea $S \subseteq Hom(X)$.
Decimos que X es un espacio homogéneo bajo S si $\forall x, y \in X$, existe $f \in S$ t.q. $f(x) = y$.
~~Si $S = Hom(X)$, decimos que X es homogéneo en sí mismo.~~

Proposición 3.- Sea G grupo top. entonces G es homogéneo bajo el conjunto de traslaciones $T = \{L_g : g \in G\} \cup \{R_g$ $\subseteq Hom(G)$

Dem.- Sean $x, y \in G$. y consideremos $L_{yx^{-1}} \in T$, entonces

$$L_{yx^{-1}}(x) = (yx^{-1})x = y$$ ∎

Esto último nos da un resultado fundamental de los grupos topológicos y es que una base local de la identidad del grupo ~~me~~ determina una base local para cualquier $g \in G$.

Recordatorio: Sea X esp. top. y $x \in X$

1) Vecindad:
Un conjunto $V \subset X$ es una vecindad de x si existe un abto $U \subset X$ t.q.

$$x \in U \subset V$$

2) Base local en un punto.
Una familia $B_x = \{E_i\}_{i \in I}$ de vecindades de x se llama Base local en x si cumple:

$$\forall V \text{ vecindad de } x,\ \exists E_i \in B_x \text{ t.q. } E_i \subset V$$

En otras palabras B_x "refina" a todas las vecindades de x.

Ejemplo.- En $\mathbb{R}$ con la top. usual. para $x \in \mathbb{R}$, la familia $B_x = \{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $E_n := (x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n})$ es una base local de x.

Teorema 1.- Sea G grupo top. Toda base local de e determina una base local en cualquier $g \in G$.

Dem.- Sea $B = \{E_i\}_{i \in I}$ una base local de "e". Y sea $g \in G$. Consideremos la familia

$$B_g := \{ g E_i \, ; \, i \in I \}$$

y veamos que esta es una base local para g.

Sea $V \subset G$ vecindad de g P.D. $\exists B \in B_g$ t.q $B_g \subset V$. Notemos lo sig:

1) $g^{-1}V$ es vecindad de e.
Esto pues al ser V vecindad de g existe U abto t.q $g \in U \subset V$
$\Rightarrow e = g^{-1}g \in g^{-1}U = L_{g^{-1}}[U] \subset L_{g^{-1}}[V] = g^{-1}V$
y al ser $L_{g^{-1}}$ homeo, $g^{-1}U$ es abto.
$\therefore$ $g^{-1}V$ es vecindad de e.

2) Como $g^{-1}V$ es vecindad de e y B es base local de e $\Rightarrow$ existe un $E_{i_0} \in B$ t.q $E_{i_0} \subset g^{-1}V$.
$\Rightarrow L_g[E_{i_0}] \subset L_g[g^{-1}V]$
$\Rightarrow g E_{i_0} \subset V$

Entender la top. del anillo de Adeles A_K solo necesitamos estudiar los entornos de 0.

$\therefore$ B_g es base local de g. $\forall$ ■

Esto ayuda a que la top. de todo el grupo basta con entender la top. en torno a identidad.

Finalmente veremos las propiedades elementales de un grupo topologico.

Recordemos que un conjunto $S \subset G$ se dice simetrico si $S^{-1} = S$.

Teorema 2.- (propiedades) Sea G grup. top. Entonces los sig. suceden:

(i) Cada vecindad U de "e" contiene una vecindad de "e" t.q $VV \subset U$
(ii) Cada vecindad U de "e" contiene a una vecindad simetrica de "e"
(iii) Si $H \leq G$, entonces $\overline{H} \leq G$
(iv) Todo subgrupo abto de G tambien es cerrado
(v) Si $K_1, K_2 \subset G$ compactos entonces $K_1 K_2$ tambien es compacto.

Obs.- Los incisos (i) y (ii) nos muestran que las vecindades de la identidad pueden elegirse con una buena estructura (cerradas bajo productos, simétricas).

Con esto podemos trabajar con la estructura que nos interesa, para ello recordaremos lo que son los espacios T_1 y T_2 (Hausdorff)

Def.- Sea X esp. top. Decimos que X es T_1 si $\forall x \neq y \in X$, existe un abto $U \subset X$ t.q $x \in U$ y $y \notin U$.

Def.- Sea X esp. top. Decimos que X es Hausdorff (o T_2) si:

$\forall x, y$ con $x \neq y$, existen U y V abtos en X t.q $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Significa que puntos distintos se pueden separar por abtos disjuntos

Obs.- $T_2 \Rightarrow T_1$

Obs.- La propiedad T_2 será importante para que todo funcione bien al definir una medida

Lema 1.- Sea G grup. top.

G es T_1 si y solo si $\forall g, h \in G$ con $g \neq h$, existe $U \subset G$ abto t.q $e \in U$ y $gh^{-1} \notin U$.

Dem.- Como G es T_1, para g y h existirá un abto W t.q $g \in W$ y $h \notin W$.

Ahora, como la traslación $L_{g^{-1}}$ es homeomorfismo tendremos que el conjunto

$$W' := L_{g^{-1}}[W] = g^{-1}W$$

es abto y t.q $h^{-1}g \in W'$ y no contiene a "e" (pues $h \notin W$)

$\Rightarrow$ Tomando el complemento $U = G \setminus W'$ terminamos $\blacksquare$

Teorema 3.- Sea G grupo top. Las sig. son equivalentes:

(i) G es T_1

(ii) G es Hausdorff

(iii) $\{e\}$ es cerrado en G

(iv) Todo punto en G es cerrado.

6

Dem:-

(i) ⇒ (ii) Sup. que G es T_1. Sean $g, h \in G$ con $g \neq h$ P.D] puedo separar a g y h por abtos disjuntos. Por el Lema 1 como G es T_1 existe un abto U t.q $e \in U$ y $gh^{-1} \notin U$.

Por otro lado dado el Teorema 2 existe V abto, $e \in V$ y simétrico t.q $VV \subset U$.

Veamos que los conjuntos Vg y Vh son los buscados.

Por lo que sabimos son abtos y como $e \in V \Rightarrow e \cdot g = g \in Vg \wedge e \cdot h = h \in Vh$.

Sup. que existe $x \in Vg \cap Vh \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V$ t.q $x = \underbrace{v_1 g = v_2 h}$ entonces

$$gh^{-1} = v_1^{-1} v_2 \in V^{-1}V \underset{\text{simétrico}}{=} VV \subset U \quad !$$

$\therefore$ Vg y Vh son disjuntos $\therefore$ es Hausdorff.

(ii) ⇒ (iii) Se tiene de top.

(iii) ⇒ (iv) Sea $x \in G$. Como L_x es Homeo. $\Rightarrow L_x[\{e\}] = \{x\}$ es cerrado.

(iv) ⇒ (i) Sup. que todo punto es cerrado. Sean $g, h \in G$ con $g \neq h$. Como $\{g\}$ es cerrado $\Rightarrow G \setminus \{g\}$ es abto. Así $h \in G \setminus \{g\}$ y $g \notin G \setminus \{g\}$ ■

Así podemos definir el objeto que nos garantizara la existencia de una medida de Har.

Def:- (Localmente compacto)
Sea X esp. top. Decimos que $\mathcal{X}$ es localmente compacto en $x \in \mathcal{X}$ si existe una vecindad U de x cuyo cierre $\overline{U}$ es compacto.

Decimos que $\mathcal{X}$ es localmente compacto si es loc. comp. en todo punto $x \in \mathcal{X}$.

Def:- Sea G grup. top. Decimos que G es localmente compacto si es loc. comp. en el sentido anterior y además es Hausdorff.

Aquí nos preguntaremos dos cosas: si G es loc. comp. y $H \leq G$

¿cuándo H es loc. compacto?

¿cuándo G/H es loc. compacto?

Proposición 4.- Sea G grupo top. loc. compacto y $H \leq G$. Entonces H es loc. compacto $\Leftrightarrow$ H es cerrado.
En particular cualquier subgrupo discreto de G es cerrado.

Pero sobre todo nos interesará saber qué pasa con el cociente G/H.

¿cuándo es esp. top?

¿cuándo es grupo top?

¿cuándo es grup. top loc. compacto?

Teorema 4.- Sea G grupo top. y $H \leq G$. Entonces

(i) G/H es esp. top. con la top. cociente.

(ii) El cociente G/H es grupo top. $\Leftrightarrow$ $H \trianglelefteq G$ y H es cerrado en G.

(iii) Si G es loc. comp., $H \trianglelefteq G$ y H es cerrado $\Rightarrow$ G/H es grup. top loc. compacto.

Este resultado tiene especial relevancia pues en la tesis de Tate se trabaja sobre grupos cociente de los Adeles e Ideles $\mathbb{A}_K/K$, $\mathbb{I}_K/K^*$ y nos ayudarán a ver que estos son espacios bien comportados, más aún el sig. resultado nos garantizará que los grupos de Adeles e Ideles son loc. compactos (junto con la prop. 4)

Teorema 5.- Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos top. loc. compactos t.q. G_i es compacto para todos excepto una cantidad finita de $i \in I$, entonces

$$\prod_{i\in I} G_i$$

es loc. compacto.

~~Proposición 5.- En un espacio Hausdorff todo subgrupo discreto es cerrado.~~

Parte 2°: campos topologicos y $\mathbb{Q}_p$

Aunque gran parte del analisis se realiza en los grupos aditivos $(F,+)$ y multiplicativos $(F^*,\cdot)$ por separado, la estructura de campo es lo que los une y le da propiedades especiales y sera de suma importancia para dar una conexión entre la medida aditiva y la estructura multiplicativa de un campo.

Def.- (campo top) un campo topologico es un campo F t.q los grupos aditivo $(F,+)$ y multiplicativo $(F^*,\cdot)$ son grupos topologicos.

Obs.- un campo topologico es localmente compacto si lo es en el sentido de espacio y es Hausdorff.

Ejemplos de campos topologicos son $\mathbb{R}$ y los numeros p-adicos.

Def.- Sea $x \in \mathbb{Q}^*$ y p-primo.

Como $x \in \mathbb{Q}^*$ podemos escribir $x = \frac{m}{n}$

ademas podemos factorizar la mayor potencia de p para n y m que los divida, por lo que

$x = p^k \frac{a}{b}$ con $(a,p)=1$, $(b,p)=1$

entonces definimos a la valuación p-adica de x como $v_p(x) = k$.

Ejemplo.- $v_2\left(\frac{9}{8}\right) = -3$, $v_3\left(\frac{9}{8}\right) = 2$

Def.- Sea $x \in \mathbb{Q}$ y p-primo. Definimos el valor absoluto p-adico de x como:

$|0|_p = 0$ y $|x|_p := p^{-v_p(x)}$

$\boxed{\text{Obs.- } |xy|_p = |x|_p|y|_p}$

Sea p-primo, entonces

Teorema 6.- $(\mathbb{Q}, d_p)$ con $d: \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dada por $d_p(x,y) = |x-y|_p$ es esp. metrico

Dem.-

1) $d_p(x,x) = |x-x|_p = |0|_p = 0$.
2) Si $x \neq y \Rightarrow d_p(x,y) = |x-y|_p = p^{-v_p(x-y)} > 0$.
3) $d_p(x,y) = p^{-v_p(x-y)} = p^{-v_p(y-x)} = d_p(y,x)$
4) Sea $x = p^a \frac{m}{n}$, $y = p^b \frac{r}{s}$. Sin. p. de generalidad sup. que $a \leq b$

Entonces

$$x+y = p^a \frac{m}{n} + p^b \frac{r}{s} = p^a\left[\frac{m}{n} + p^{b-a}\frac{r}{s}\right]$$

$$= p^a \left[\frac{ms + p^{b-a} rn}{ns}\right]$$

como $p \nmid n$ y $p \nmid s \Rightarrow p \nmid ns$ y como el numerador es un entero $\Rightarrow$

$$v_p(x+y) \geq a = \min\{v_p(x), v_p(y)\}.$$

$\Rightarrow |x+y|_p = p^{-v_p(x+y)} \leq p^{-a} = \max\{|x|_p, |y|_p\}$

$\therefore |x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\} \leq |x|_p + |y|_p$

$\therefore (\mathbb{Q}, d_p)$ es esp. métrico ■

Obs: De hecho $|\cdot|_p$ es una norma para $\mathbb{Q}$, y la llamaremos norma p-ádica

Def: Definimos al campo de los ~~...~~ Números p-ádicos como $\mathbb{Q}_p$ la completación del espacio $(\mathbb{Q}, d_p)$.

Tendremos pues que $\mathbb{Q}_p$ cumple ~~tres~~ propiedades importantes

⊛ $\mathbb{Q}_p$ es no Arquimediano

Un campo F con norma $|\cdot|_F$ se dice Arquimediano si $\forall x \in F,\ x \neq 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ t.q.

$$|\underbrace{x+\dots+x}_{n\text{-veces}}|_F > 1$$

⊛ $\mathbb{Q}_p$ es campo topológico con la ~~$\mathbb{Q}_p$ es campo y además con la~~ ~~...~~ topología inducida por la métrica $d_p(x,y) = |x-y|_p$.

$(\mathbb{Q}_p, +)$ es grupo top. abeliano.

pues dados $a, b, c, d \in \mathbb{Q}_p$ se tiene que

$|(a+b)-(c+d)|_p \leq \max\{|a-c|_p, |b-d|_p\}$

y entonces para $|a-c|_p < \varepsilon$ y $|b-d|_p < \varepsilon$

$\Rightarrow |(a+b)-(c+d)| < \varepsilon$ $\therefore$ $+$: es continua

y $|-a+(-b)| < \varepsilon$ cuando $|a+b|_p < \varepsilon$

$\therefore$ la inversión de la suma es continua ✓

$(\mathbb{Q}_p, \cdot)$ es grupo top. pues dados $x, y, a, b \in \mathbb{Q}_p$

$|xy - ab|_p = |xy - ay + ay - ab|_p \leq$

$\max\{|y(x-a)|_p, |a(y-b)|_p\} = \max\{|y|_p|x-a|_p, |a|_p|y-b|_p\}$

⊛ $\mathbb{Q}_p$ es homogéneo

Para definir a los adicos nos sera de suma utilidad trabajar con un sub anillo de $\mathbb{Q}_p$

Def.- Se definen a los enteros p-adicos como el conjunto

$$\mathbb{Z}_p := \{ x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1 \}$$

Obs.- $\mathbb{Z}_p$ es subanillo de $\mathbb{Q}_p$

$\mathbb{Z}_p$ es un anillo top. con la top. de subespacio

~~Teorema~~

Lema.- Un conjunto $K \subset \mathbb{Q}_p$ es compacto si y solo si: es cerrado y acotado

Teorema 7.- ~~Consideremos a $\mathbb{Z}_p$,~~ ~~entonces~~ Se cumplen las sig:

(i) $\mathbb{Z}_p$ es abto y compacto en $\mathbb{Q}_p$

(ii) El conjunto $\{x \in \mathbb{Q}_p : |x| < 1\}$ es el unico ideal maximal de $\mathbb{Z}_p$

(iii) $\mathbb{Q}_p$ es localmente compacto.

Dem.-

(i)

$\mathbb{Z}_p$ es abto: Sea $a \in \mathbb{Z}_p$ P.D. $\exists B_r(a) \subset \mathbb{Z}_p$.

Sea la bola $B_1(a) := \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x-a|_p < 1\}$.

Entonces para cualquier $x \in B_1(a)$ se tendra que

$$|x|_p = |(x-a)+a|_p \leq \max\{|x-a|_p, |a|_p\}.$$

pero como $a \in \mathbb{Z}_p \Rightarrow |a|_p \leq 1$ y $|x-a| < 1$

$\Rightarrow |x|_p \leq 1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}_p \therefore B_1(a) \subset \mathbb{Z}_p$.

$\therefore$ es abto.

$\mathbb{Z}_p$ es compacto:

$\mathbb{Z}_p$ es acotado por definicion, Ademas $|\cdot|_p$ es continua y $\mathbb{Z}_p$ es preimagen de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, por lo que es cerrado

$\therefore$ por el Lema es compacto.

(ii) —

(iii) Sea $x \in \mathbb{Q}_p$ P.D. existe una vecindad de x cuyo cierre es compacto.

Por lo anterior sabemos que $\mathbb{Z}_p$ es abto y compacto, ademas $0 \in \mathbb{Z}_p$ por lo que es una vecindad del 0 con cierre compacto

y dado que $\mathbb{Q}_p$ es homogeneo
y la traslaciones son homeomorfismos
$\Rightarrow$ $a+\mathbb{Z}_p$ es una vecindad de "a" buscada
$\therefore$ $\mathbb{Q}_p$ es localmente compacto. $\blacksquare$

Finalmente terminamos con una clasificación de los extensiones de $\mathbb{Q}$.

Teorema (Ostrowski)
Toda completación no trivial de $\mathbb{Q}$ es isomorfa topologicamente a $\mathbb{R}$ o a un campo p-adico para algun primo p

Obs.- Este resultado justificara la construcción del anillo de Adeles

Teorema. (Clasificación de campos locales)
Sea K campo global entonces cualquier ~~todo campo topologico localmente compacto no discreto~~ campo local K_v es isomorfo a uno de los sig.

(1) Si v es ~~Caso~~ Arquimediano: $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$
(2) Si v ~~Caso~~ No Arqui. una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$. (si la caracteristica es 0) o un campo de series de Laurent $\mathbb{F}_q(t)$ (si la caracteristica es $p>0$).

11

siguientes pasos:
~~* Recordar los nociones de medida~~
~~* Definir a los Adeles e Ideles y justificar sus propiedades~~
~~* Definir la medida de Haar existencia y unicidad.~~

* Recordar la noción de campo global K, que es una extensión finita de $\mathbb{Q}$ o una extensión finita de $\mathbb{F}_q(t)$.

* Una completación K_v (completación local) es el campo que se obtiene al completar K con el ~~metrica~~ "valor absoluto" llamado campo local

¿ Podemos construir un unico objeto matematico que contenga toda la información ~~local~~ de todas las completaciones locales simultaneamente de tal forma que respete la estructura global de K?

La ~~[illegible]~~ respuesta es sí pero usar el producto cartesiano $\prod_{v} K_v$ no serviría. Es por ello que se debe definir el producto directo restringido

¿Qué sigue?

- Definir el prod. direc. restringido
- Probar que el P.D.R de loc. comp. es loc. compac.
- Definir el anillo de Adeles y el grupo de Ideles y sus propiedades sobre todo que A_K y $\mathbb{I}_K$ son loc. compactos y A_K/K y C_K son compactos.
- Recordatorio de medida y medida de Haar (existencia y unicidad)

Recordatorio:

Ya vimos como definir una medida en los grupos top. localmente compactos.

La prueba clásica de la ecuación funcional de Riemann usa el análisis de Fourier en $\mathbb{R}$ (que se basa en la medida de Lebesgue) Tate generaliza esto:

- Reemplaza $\mathbb{R}$ por $\mathbb{A}_K$ adeles
- Reemplaza $\mathbb{Z}$ por el cuerpo K.

Entonces para poder desarrollar esta analogía necesitamos definir una nueva "transformada de Fourier" en $\mathbb{A}_K$

1) Dualidad de Pontryagin

2) Análisis de Fourier Local

obs.- "Usaremos grupos abelianos pues simplifica al dual de pontryagin, además la medida izq. y derecha serán iguales"

Parte 1) Dualidad de Pontryagin

Def 1. (caracter) Sea G un grupo topológico abeliano. Decimos que una función $\chi : G \to S^1$ es un caracter si

i) χ es homomorfismo de grupos

ii) χ como función es continua.

Ejemplos.-

a) Si $G = (\mathbb{R}, +)$. $\chi(x) = e^{\pi i x}$ es caracter.

i) $\chi(x+y) = e^{\pi i (x+y)} = \chi(x)\chi(y)$

ii) Es continua.

b) Si $G = (\mathbb{Z}, +)$. $\chi(n) = i^n$ es caracter

i) ✓

ii) Consideramos a $\mathbb{Z}$ con la top. discreta $\therefore$ toda función es continua.

c) Si $G = (S^1, \cdot)$. $\chi(z) = z^2$ es caracter

i) ✓

ii) El producto ~~en~~ es ~~agrega~~ continua en S^1

d) Si $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, $\chi(m) = e^{2\pi i \frac{m}{n}}$ es caracter.

i) ✓

ii) Como G es finito se le da la top. discreta

Obs.- Los caracteres no son unicos

Def 2 (Dual de Pontryagin) Sea G grup. top. abeliano. El Dual de Pontryagin de G, denotado por $\hat{G}$ es el conjunto de todos sus caracteres.

Proposición 1.- El dual de Pontryagin $\hat{G}$ forma un grupo abeliano con la multiplicación de funciones

Dem.-

(i) La operación esta bien definida (Es decir la función $\psi := \chi_1 \chi_2$ es caracter)

(ii) La operación es conmutativa ya que S^1 es abeliano

(iii) El elemento identidad es $\chi_0(g) = 1$ $\forall g \in G$ pues $(\chi \chi_0)(g) = \chi(g)\chi_0(g) = \chi(g)$

(iv) El inverso de $\chi \in \hat{G}$ es $\bar{\chi} : G \to S^1$ dada por $\bar{\chi}(g) = \overline{\chi(g)}$, pues
$$(\chi \cdot \bar{\chi})(g) = \chi(g)\overline{\chi(g)} = |\chi(g)|^2 \overset{\in S^1}{=} 1 = \chi_0(g)$$

$\therefore$ es grupo abeliano.

Ejemplos.-

a) Si $G = (\mathbb{R}, +)$, entonces
$$\hat{G} = \{ \chi_\xi(x) = e^{2\pi i \xi x} \mid \xi \in \mathbb{R} \}$$
$\therefore$ $\hat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$ grupos

b) Si $G = (\mathbb{Z}, +)$, sup. que $\chi \in \hat{G}$ $\Rightarrow$ $\chi(1) = \alpha$ p.a $\alpha \in S^1$ pero $\chi(n) = \chi(1 + \cdots + 1) = \chi(1)\cdots\chi(1) = \alpha^n$ $\therefore$ todo caracter esta determinado por $\chi(1)$

Entonces $\hat{G} = \{ \chi_\alpha(n) = \alpha^n \mid \alpha \in S^1 \}$
$\Rightarrow$ $\hat{\mathbb{Z}} \cong S^1$

c) Si $G = (S^1, \cdot)$ $\Rightarrow$ $\hat{G} = \{ \chi_n(z) = z^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$
$\Rightarrow$ $\hat{S^1} \cong \mathbb{Z}$.

d) Si $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Igual que b), $\chi(1) = e^{2\pi i \frac{1}{n}}$ $\Rightarrow$ $\chi^n(1) = e^{2\pi i \frac{n}{n}} = 1$
$\therefore$ $\chi(1)$ es raiz n-esima de 1.
$\Rightarrow$ $\chi(1) = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ p.a $k = 0, 1, \ldots, n-1$
$\therefore$ Hay exactamente n caracteres
$$\hat{G} = \{ \chi_k(m) = e^{2\pi i \frac{km}{n}} \mid k = 0, 1, \ldots, n-1 \}$$
$\Rightarrow$ $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Resultará que $\hat{\tau}$ también será un grupo top.

Recordatorio

Def. una colección $\mathcal{B} \subseteq \tau$ de conjuntos abtos se llama una **Base** para la top. τ si todo conjunto abto $U \in \tau$ se puede expresar como una unión (posiblemente infinita) de elementos de $\mathcal{B}$.

Ejemplo.-

- En $\mathbb{R}$, $\tau = \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U \}$

Y una base es

$$\mathcal{B} = \{ (a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, a < b \}.$$

- En $\mathbb{Z}$ con la top. discreta $\tau = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ $\Rightarrow$ $\mathcal{B} = \{ \{n\} \mid n \in \mathbb{Z} \}$ es base.

Def.- ~~una subbase $S \subseteq \tau$ es una colección de conjuntos~~ Una colección $S \subseteq \tau$ de conjuntos abtos es una subbase de τ si la intersección finita de elementos de S forman una base de τ.

¿De qué nos sirven?

Proposición.- Sea $f: X \to Y$ función. X, Y esp. top.

(i) Si $\mathcal{B}_Y$ es una base para la top. de Y, entonces f es continua si y solo si $\forall B \in \mathcal{B}_Y$, $f^{-1}[B]$ es abto en X.

(ii) Si S_Y es subbase - - - - - $f^{-1}[S]$ es abto en X.

$\therefore$ basta checar con los subbásicos.

Teorema.- Sea X ~~esp. top.~~ conjunto y $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. Entonces existe una única topología $\tau(S)$ t.q.

(i) $S \subseteq \tau(S)$

(2) si τ es una top. con $S \subseteq \tau \Rightarrow \tau(S) \subseteq \tau$

A $\tau(S)$ se le llama la topología generada por S.

Def 3.- (Top. compacto-abierta) Sea G grupo top. abeliano. Para cada compacto $K \subset G$ y cada abto $V \subset S^1$ definimos

$$W(K,V) = \{\chi \in \hat{G} \mid \chi[K] \subseteq V\}$$

Es decir, $W(K,V)$ es la colección de todos los caracteres que mapean el conjunto compacto K dentro del conjunto abto V.

Entonces definimos la top. compacto-abierta en $\hat{G}$ como la topología generada por $S = \{W(K,V) \mid K \subset G$ compacto y $V \subset S^1$ abto$\}$

Obs:- Por construcción, $S = \{W(K,V)\}$ será subbase de la top.

Teorema 1.- Con la topología compacto abierta, el dual $\hat{G}$ es un grupo topológico abeliano y, además, es Hausdorff.

Dem:- Ya probamos que es grupo abeliano y esp. topológico.

P.D) Las operaciones son continuas

⊛ Multiplicación:- Queremos ver que $m: \hat{G} \times \hat{G} \to \hat{G}$ dada por $m(\chi_1, \chi_2) = \chi_1 \chi_2$ es continua.

Sean $(\chi_1, \chi_2) \in \hat{G} \times \hat{G}$ y sea W vecindad subbásica de $\chi_1 \chi_2$. Basta probar que $m^{-1}[W]$ es abto en $\hat{G} \times \hat{G}$.

Sea $W = W(K,V)$ con $K \subset G$ compacto y $V \subset S^1$ abto. Por definición $\chi_1(k)\chi_2(k) \in V \ \forall k \in K$.

Nuestro objetivo será encontrar vecindades U_1 de χ_1 y U_2 de χ_2 t.q. $U_1 \times U_2 \subseteq m^{-1}[W(K,V)]$. ~~Esto significa que si $\psi_1 \in U_1, \psi_2 \in U_2 \Rightarrow (\psi_1, \psi_2) \in m^{-1}[W(K,V)]$ $\Rightarrow$ ... $\psi_1[K]\psi_2[K] \subseteq V$~~

Sabemos que S^1 es un grupo top. ⑨

con el producto, por lo que $m: S^1 \times S^1 \to S^1$

es continua. Ahora, por lo anterior

sabemos que $\chi_1(k)\chi_2(k) \in V \quad \forall k \in K$

$\Rightarrow \quad m(\chi_1(k), \chi_2(k)) \in V \quad \forall k \in K$

$\Rightarrow$ por la continuidad de m y

la def. de la top producto en $S^1 \times S^1$

existiran vecindades abiertas $V_{1,k}$

$V_{2,k}$ de $\chi_1(k)$ y $\chi_2(k)$ resp. en S^1

t.q. $V_{1,k} \cdot V_{2,k} \subset V$

~~Lema de Wallace o Lema del Tubo~~

$\Rightarrow$ Lema de Wallace o Lema del tubo

con este argumento sera posible encontrar

vecindades subbasicas $U_1 = W[K, N_1]$

$U_2 = W(K, N_2)$ (con N_1, N_2 abtos de S^1)

t.q. $N_1 \cdot N_2 \subseteq V$.

$\therefore$ si $\psi_1 \in U_1$ y $\psi_2 \in U_2 \Rightarrow$

$\psi_1[K] \subseteq N_1$ y $\psi_2[K] \subseteq N_2$ entonces

$m(\psi_1, \psi_2)[K] = \psi_1[K]\psi_2[K] \subseteq N_1 \cdot N_2 \subseteq V$

⑩

$\Rightarrow U_1 \times U_2$ es una vecindad abta de

$(\chi_1, \chi_2) \in \hat{G} \times \hat{G}$ que esta contenida

en $m^{-1}[W(K,V)]$. $\therefore$ m es continua.

⊛ Inversión P.D. $I: \hat{G} \to \hat{G}$ dada por

$I(\chi) = \chi^{-1} = \bar{\chi}$ es continua.

Sea $\chi \in \hat{G}$ y sea $W(K,V)$ vecindad

subbasica de χ^{-1}. Basta probar que

$I^{-1}[W(K,V)]$ es abto en $\hat{G}$.

Sea $\psi \in I^{-1}[W(K,V)]$ P.D. $\exists\, U$ ~~abto~~ subbasico t.q.

$\psi \in U \subseteq I^{-1}[W(K,V)]$

Consideremos $U = W(K, V^{-1})$.

o) U ~~es abto pues~~ es subbasico

pues como V es abto en S^1 V^{-1} tambien en S^1.

o) como ~~sea~~ ~~U~~ $\psi \in I^{-1}[W(K,V)]$

$\Rightarrow I(\psi) \in W(K,V) \Rightarrow \psi^{-1} \in W(K,V)$

$\Rightarrow (\psi^{-1})[K] \subseteq V \Rightarrow \psi[K] \subseteq V^{-1}$

$\Rightarrow \psi \in U$.

o) si $\phi \in U \Rightarrow \phi[K] \subseteq V^{-1} \Rightarrow I(\phi)[K]$

$= (\phi^{-1})[K] \subseteq (V^{-1})^{-1} = V \;\therefore\; I(\phi) \in W(K,V)$

$\forall \phi \in U \Rightarrow U \subseteq I^{-1}[W(K,V)] \;\therefore$ es

continua.

P.D) $\hat{G}$ es Hausdorff.

Sean $x_1, x_2 \in \hat{G}$, $x_1 \neq x_2$. P.D) $\exists$ vecindades abiertas U_1 de x_1 y U_2 de x_2 t.q. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Como $x_1 \neq x_2$, $\exists g \in G$ t.q. $x_1(g) \neq x_2(g)$

Ahora como S^1 es Hausdorff existen abiertos disjuntos $V_1, V_2 \subset S^1$ t.q. $x_1(g) \in V_1$, $x_2(g) \in V_2$. Entonces si consideramos el conjunto $K = \{g\}$ ~~res~~ resultara compacto (en un grupo top. todo conjunto finito es compacto)

$\therefore$ Los subbásicos $U_1 = W(\{g\}, V_1)$, $U_2 = W(\{g\}, V_2)$ son los buscados.

En efecto:

i) U_1 y U_2 son abiertos

ii) $x_1 \in U_1$ pues $x_1(g) \in V_1$

$x_2 \in U_2$ pues $x_2(g) \in V_2$

iii) son disjuntos.

Ya vimos que

G grupo top abeliano $\Rightarrow$ $\hat{G}$ grup. top abeliano y Hausdorff.

¿Cuando $\hat{G}$ es localmente compacto?

Teorema 2.- Si G es un grupo top. ~~[illegible]~~ abeliano y localmente compacto, entonces $\hat{G}$ también.

Dem.- Basta probar que $\hat{G}$ es loc. compacto. Como $\hat{G}$ es grupo top. sera homogeneo por traslaciones, entonces basta demostrar que la identidad x_0 tiene al menos una vecindad que es compacta.

Idea: Como G es loc. compacto $\exists K$ vecindad ~~compacta~~ de $e \in G$ t.q. $\bar{K}$ es compacto. Y se toma V abierto en S^1 vecindad del $1 \in S^1$ suficientemente pequeño.

Propuesta: $W = W(\bar{K}, V)$ y se prueba que W es compacto.

A este tipo de grupos los denotamos (13)

LCA (~~Abelian Locally Abelian~~

(Locally compact Abelian topologic group)

Para terminar veamos sus propiedades

Ejemplos: Todos los que vimos.

Los LCA cumplen una relación fundamental entre ser compactos y ser discretos.

Teorema 3: Sea G un LCA.

(i) Si G es compacto, entonces su dual $\hat{G}$ es discreto

(ii) Si G es discreto, entonces su dual $\hat{G}$ es compacto.

Ejemplos:

(i) $\hat{S^1} \cong \mathbb{Z}$, $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

(ii) $\hat{\mathbb{Z}} \cong S^1$, $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

(14)

Esto se usa para unas propiedades de los adeles y el campo global K.

$\mathbb{A}_K$

Parte 2: Analisis de Fourier Local

15

Tate trata el analisis de Fourier en el objeto global, el anillo de Adeles $\mathbb{A}_K$. pero $\mathbb{A}_K$ se define como el producto restringido de todos los campos locales K_v.

Es por ello que la trasformada de Fourier global $\hat{f}$ en $\mathbb{A}_K$ se define como el producto de todos las transformadas locales $\hat{f}_v$ en cada K_v

Es por ello que veremos la trasformada en campos locales. para ello necesitamos un espacio de funciones bien comportados

En esta parte trabajaremos con campos locales

F es un campo completo respecto a una valuación ~~no localmente~~

1) un campo arquimediano: $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

2) una ~~extensión~~ campo No arquimediano: una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$

16

sabemos que:

(1) $(F,+)$ es grupo top. con la top. inducida por sus valuaciones.

(2) Ademas F es LCA.

(3). por lo que sabemos dado que F es LCA existira una unica medida de Haar (izq y derecha iguales) para F. Denotada por dx

Entonces trabajaremos sobre el espacio de medida $(F,+,dx)$

Def + (Funciones Schwartz-Bruhat)

Definimos al conjunto de funciones de Schwartz-Bruhat $S(F)$ de la sig. manera:

- Si F es Arquimediano

$S(F)$ es el espacio de Schwartz usual, es decir $f \in S(F) \Leftrightarrow f$ es C^∞ todas las parciales de f decaen mas rapido que cualquier polinomio en el infinito

- Si F es No Arquimediano:

— $f \in S(F) \Leftrightarrow f$ es localmente constante y de soporte compacto.

- Loc. const: $\forall x \in F$, $\exists U$ abto vecindad de x t.q. f es constante.
- Sop. compacto: f es cero fuera de un conjunto compacto.

Obs.- El espacio $S(F)$ es un esp. vectorial complejo.

Ejemplos:

- Para $F = \mathbb{R}$ (Arquimediano) la función $f(x) = e^{-\pi x^2}$ es Schwartz-Bruhat es C^∞ y decae ....
- Para $F = \mathbb{Q}_p$ (No-Arquimediano)

La función característica $f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p} = \mathbb{1}_{\mathcal{O}}$ es Schwartz-Bruhat.

*Tiene sop. compacto pues $\mathcal{O}$ es compacto

* Es loc. constante ~~por para cualquier~~ ~~$x \in \mathcal{O}$ si tomamos~~

para definir la tras. de Fourier necesitamos un equivalente a $e^{-2\pi i x}$ en $\mathbb{R}$.

~~Def. (caracter aditivo estandar)~~

Notemos que la función $f(x) = e^{-2\pi i x}$ es un caracter en $\mathbb{R}$. Por ello tomaremos un caracter "estandar" para cada campo local F.

Def:- (Caracter estandar ψ)

Para cada campo local F (o grupo topo Abeliano F) le asignamos un caracter "aditivo" estandar

1) Si $F = \mathbb{R}$: $\psi(x) = e^{2\pi i x}$

2) Si $F = \mathbb{C}$: $\psi(z) = e^{2\pi i (z + \bar{z})}$

3) Si $F = \mathbb{Q}_p$: $\psi_p(x) = e^{2\pi i \{x\}_p}$

con $\{x\}_p$ la parte fraccionaria de x.

4) Los demas no nos interesaron.

Breve. Para dar en $\mathbb{Q}_p$:

Notemos que el caracter $\psi(x) = e^{2\pi i x}$ en $\mathbb{R}$ cumple que si $x \in \mathbb{Z}$, $\psi(x) = 1$

$\Rightarrow$ si $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \psi(\lfloor x \rfloor + \{x\})$

$= \psi(\lfloor x \rfloor)\psi(\{x\}) = \psi(\{x\})$

Queremos un análogo para $\mathbb{Q}_p$ con $\mathbb{Z}_p$ el anillo de enteros p-ádicos. Entonces ψ_p se construye para que sea trivial en $\mathbb{Z}_p$.

Cualquier $x \in \mathbb{Q}_p$ se puede escribir como

$$x = \sum_{j=-r}^{\infty} a_j p^j \quad \text{donde}$$

$$\{x\}_p := \sum_{j=-r}^{-1} a_j p^j$$ se define como "La parte fraccionaria"

y $[x] = \sum_{j=1}^{\infty} a_j p^j$ como "La parte entera"

$$\Rightarrow \quad \psi(x) := e^{2\pi i \{x\}_p}.$$

Ejemplos.-

- Si $x = 15 \Rightarrow x = 0\cdot 5^0 + 3\cdot 5^1$ $\quad 15 \in \mathbb{Z}_5$

$\therefore \{x\}_5 = 0 \Rightarrow \psi(x) = e^{2\pi i 0} = 1.$

- Si $x = 1/3 \Rightarrow x = 5^0 + 1\cdot 5^1 + 3\cdot 5^2 + \cdots$

$\Rightarrow \{x\}_5 = 0 \Rightarrow \psi(x) = 1.$ $\quad 1/3 \in \mathbb{Z}_5$

- Si $x = \frac{1}{5} \Rightarrow x = 1\cdot 5^{-1} + 0\cdot 5^0 + 0\cdot 5^1 + \cdots$

$\Rightarrow \{x\}_5 = \frac{1}{5} \Rightarrow \psi(x) = e^{2\pi i \frac{1}{5}}$ $\quad \frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}_5$

- Si $x = \frac{8}{5} \Rightarrow x = 3\cdot 5^{-1} + 1\cdot 5^0$ $\quad \frac{8}{5} \notin \mathbb{Z}_5$

$\therefore \{x\}_5 = \frac{3}{5} \Rightarrow \psi(\{x\}_5) = e^{2\pi i \frac{3}{5}}$

Ahora usaremos a ψ para conectar a F con su dual

Teorema 4.- (Auto-Dualidad Local)

Sea F un campo local y ψ un carácter aditivo (no trivial), Entonces F es isomorfo a su dual $\hat{F}$; más específicamente, la función

$$\Phi : F \to \hat{F}, \quad \Phi(a) = \psi_a \quad \text{donde} \quad \psi_a(x) = \psi(ax)$$

es un isomorfismo de grupos topológicos

Dem.- probaremos 5 cosas

1) Φ es homomorfismo de grupos

Sean $a, b \in F$ y $x \in F$

$$\Rightarrow \Phi(a+b)(x) = \psi_{a+b}(x) = \psi((a+b)x) = \psi(ax)\psi(bx)$$
$$= \psi_a(x)\psi_b(x)$$
$$= (\Phi(a)\Phi(b))(x).$$

2) Φ es inyectiva.

Si $\Phi(a)$ fuera trivial $\Rightarrow \Phi = \chi_0$ ent. como

$\Phi(a) = \chi_a(x) = \psi(ax) = \chi_0(a) = 1 \quad \forall x \in F$

$\Rightarrow \psi(ax) = 1 \quad \forall x \in F \underset{\text{si } a \neq 0}{\Rightarrow} \psi(y) = 1 \quad \forall y \in F$

$\Rightarrow \psi$ es trivial! $\Rightarrow a = 0.$

3) Φ es continua

P.D. $\Phi : F \to \hat F$ es continua con $\hat F$ con la top. compacto-abierta.

Sea $x_0 \in \hat F$ (identidad) y $W(K,V)$ vecindad abierta de x_0, basta probar que $\Phi^{-1}[W(K,V)]$ es vecindad abta de 0 en F.

Notemos que

$$\Phi^{-1}[W(K,V)] = \{a \in F \mid \Phi(a)[K] \subseteq V\}$$
$$= \{a \in F \mid \psi_a[K] \subseteq V\}$$
$$= \{a \in F \mid \psi[aK] \subseteq V\}$$

y dado que K compacto, V abto y la multiplicación es continua existirá una vecindad U de $0 \in F$ t.q. $\psi[UK] \subseteq V$. Y esta U es la buscada.

4) Φ es un mapeo abierto

Basta probar que Φ^{-1} es continua en x_0.

Sea $U_\delta = \{a \in F \mid |a|_F < \delta\}$ (con $\delta > 0$) vecindad abta de $0 \in F$. P.D. $\exists W$ vecindad de $x_0 \in \hat F$ t.q. $\Phi^{-1}[W] \subseteq U_\delta$.

Como ψ es no trivial existe un $x_0 \in F$ t.q. $\psi(x_0) \neq 1$ así para $1, \psi(x_0) \in S^1$ como S^1 es hausdorff existe una vecindad abierta V de 1 t.q. $\psi(x_0) \notin V$.

Por otro lado definimos $K \subseteq F$ como:

$$K := \{x \in F \mid |x|_F \leq |x_0|_F / \delta\}.$$

Y como K es cerrado y acotado $\Rightarrow$ K será compacto.

Entonces usando $K \subseteq F$ compacto y $V \subseteq S^1$ abto definimos

$$W := V(K,V)$$

La cual será vecindad de x_0 pues $x_0[K] = \{1\} \subseteq V$. P.D. $\Phi^{-1}[W] \subseteq U_\delta$

Sea $a \in \Phi^{-1}[W] \Rightarrow \Phi(a) \in W$ $\Rightarrow \psi_a[K] \subseteq V \Rightarrow \psi[aK] \subseteq V$.

Ahora sup. que $x_0 \in aK \Rightarrow \psi(x_0) \in \psi[aK]$ $\Rightarrow \psi(x_0) \in V$!!! pues habíamos tomado V t.q. $\psi(x_0) \notin V \Rightarrow x_0 \notin aK$.

$\Rightarrow$ como $x_0 \notin aK \Rightarrow$ No existe $k \in K$ t.q $x_0 = ak$. $\Rightarrow |x_0|_F > |a|_F \cdot |k|_F$ $\forall k \in K$ en particular para k con la norma mas grande.

$$\Rightarrow |x_0|_F > |a|_F \cdot \sup_{k\in K} |k|_F = |a|_F \cdot \frac{|x_0|_F}{\delta}$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{|a|_F}{\delta} \Rightarrow |a|_F < \delta \quad \therefore a \in U_\delta$$

$\therefore \phi^{-1}[W] \subseteq U_\delta \quad \therefore \phi$ es marco abto.

5) ϕ es suprayectiva. $\blacksquare$

Esto nos ayudara en que la trasformada de fourier de una funcion $f: F \to \mathbb{C}$ deberia ser una funcion $\hat{f}: \hat{F} \to \mathbb{C}$ pero este teorema nos permite identificar F con su dual $\hat{F}$ de tal forma que podremos considerar a $\hat{f}$ como funcion en F. Asi tendra sentido tomar "La doble trasformada" y "La trasformada inversa"

Resumen:

- El Espacio: Tenemos el espacio F campo local y $\therefore$ LCA ($\mathbb{R}, \mathbb{C}, o\ \mathbb{Q}_p$)
- La medida: Sabemos que F tiene medida de Haar. y nos permite integrar funciones dentro de el
- Las funciones: Tenemos nuestro espacio de funciones bien comportadas $S(F)$
- Las "frecuencias": El grupo dual de pontryagin $\hat{F}$ representa las "frecuencias" que usaremos (caracteres)
- La identificación: probamos que $F \cong \hat{F}$ (grup, top) entonces podemos identificar $y \in F$ con $\chi_y \in \hat{F}$.

Con esto podemos definir la transformada de Fourier en F.

Inspiración: 25

- En $\mathbb{R}$ descomponemos a f usando las "frecuencias" $e^{-2\pi i yx}$ (caracteres)

- En el campo F haremos lo mismo, saber ¿cuánto de cada caracter $\chi \in \hat{F}$ hay dentro de f.

- El "coeficiente" de f en la frecuencia χ se calcularía como: $\int_F f(x)\overline{\chi(x)}\,dx$

pero queremos que para cada valor $y \in F$ obtenga un valor complejo medible. Es ahí cuando usamos el hecho de que $F \cong \hat{F}$

$\therefore$ podemos identificar cada caracter con un valor $y \in F \Rightarrow \chi(x) = \psi_y(x)$.

Def.- (Tras. Fourier Local) Sea F un campo local, dx la medida de Haar sobre $(F,+)$ y ψ el caracter aditivo estandar de F.

Para una función $f \in S(F)$, su trasformada de Fourier Local $\hat{f}$ es

la función $\hat{f}: F \to \mathbb{C}$ definida por 26

$$\hat{f}(y) = \int_F f(x)\psi(xy)\,dx$$

$$= \int_F f(x)\psi_y(x)\,dx$$

Ejemplos.-

- Si $F = \mathbb{R}$.
  - dx es la medida de Lebesgue
  - ~~...~~ $\psi(x) = e^{2\pi i x}$
  - Así $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\psi(xy)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi i xy}\,dx$

- Si $F = \mathbb{C}$
  - dx es 2 veces la medida de Lebesgue
  - $\psi(z) = e^{2\pi i(z+\bar{z})}$
  - $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{C}} f(z)\psi(zy)(2\,dx\,dy)$

$$= \int_{\mathbb{C}} f(z)e^{2\pi i(zy+\bar{z}\bar{y})}\cdot 2\,dx\,dy$$

- Si $F = \mathbb{Q}_p$ — i.e. $\int_{\mathbb{Z}_p} 1\,dx = 1$ "valuada"
  - dx es la medida de Haar p-ádica
  - $\psi_p(x) = e^{2\pi i\{x\}_p}$
  - $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)e^{2\pi i\{xy\}_p}\,dx$

27

Ejemplos.-

- $F = \mathbb{C}$. $f(z) = e^{-\pi|z|^2} = e^{-\pi(x^2+y^2)}$

$\Rightarrow \hat{f}(w) = \int_{\mathbb{C}} f(z)\,\psi(zw)\,d\overline{x}$

Sea $w = u + iv$.

$\Rightarrow \hat{f}(w) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x^2+y^2)} e^{\cancel{2}2\pi i(zw+\bar{z}\bar{w})} \cdot 2\,dx\,dy$

$= \int_{\mathbb{R}^2} 2 e^{-\pi(x^2+y^2)} e^{\cancel{4}4\pi i(xu-yv)}\,dx\,dy$

$= 2\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{\cancel{2}2\pi i x(2u)}\,dx\right)$

$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} e^{\cancel{2}2\pi i y(-2v)}\,dy\right)$

$= 2\cdot(e^{-4\pi u^2})(e^{-4\pi v^2}) = 2e^{-4\pi(u^2+v^2)}$

$= 2e^{-4\pi|w|^2} \quad \therefore \hat{f}(w) = 2e^{-4\pi|w|^2}$.

- $F = \mathbb{Q}_p$. $f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x)$ caracteristica de los p-adicos

$f \in S(F)$ y $\psi_p(x) = e^{2\pi i\{x\}_p}$ que es tal

$\psi_p(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Z}_p$. y tal $\int_{\mathbb{Z}_p} 1\,dx = 1$.

28

$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\,\psi_p(xy)\,dx$

$= \int_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x)\,\psi_p(xy)\,dx = \int_{\mathbb{Z}_p} \psi_p(xy)\,dx$

Caso 1: Si $y \in \mathbb{Z}_p \Rightarrow$

Lema 1.- (ortogonalidad) Sea G un ~~grupo~~ LCA y sea dx su medida de haar normalizada tal que $\int_G 1\,dx = \mathrm{Vol}(G) = 1$.

Sea $\chi \in \hat{G}$ caracter. Entonces.

(i) Si χ es trivial $(\chi = \chi_0)$

$\Rightarrow \int_G \chi(x)\,dx = \int_G 1\,dx = 1$

(ii) Si χ no es trivial $(\chi \neq \chi_0)$

$\Rightarrow \int_G \chi(x)\,dx = 0$.

$\Downarrow$

$$\int_G \chi(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi = \chi_0 \\ 0 & \text{si } \chi \neq \chi_0 \end{cases}$$

29

~~[illegible]~~

¿Qué pasa con $\mathcal{F}$ que cumple?

Teorema 5.- La transformada de Fourier $\mathcal{F}$ es un automorfismo de $S(\mathbb{F})$ en sí mismo. Es decir si $f \in S(\mathbb{F})$ $\Leftrightarrow$ $\hat{f} \in S(\mathbb{F})$

Entonces tiene sentido preguntar $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$.

30

Ej 8: $F = \mathbb{Q}_p$. $f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$ enteros p-ádicos (31)

$\Rightarrow \psi_p(x) = e^{2\pi i \{x\}_p}$. Así

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x)\,\psi_p(yx)\,dx = \int_{\mathbb{Z}_p} \psi_p(yx)\,dx$$

pero $\mathbb{Z}_p$ es LCA. ¿cuándo $\psi_p(yx) = \chi_0$? ($\psi_p(yx) = \chi_y(x)$).

Caso 1: Si $y \in \mathbb{Z}_p$ entonces

como $x \in \mathbb{Z}_p \Rightarrow xy \in \mathbb{Z}_p \Rightarrow$

$\chi_y(x) = \psi_p(yx) = e^{0} = 1$.

$\forall x \in \mathbb{Z}_p$ $\therefore$ $\chi_y(x) = \chi_0(x)$ $\therefore$ por el

Lema $\int_{\mathbb{Z}_p} \psi_p(yx)\,dx = 1$

Caso 2: Si $y \notin \mathbb{Z}_p$ como $y \notin \mathbb{Z}_p$

$\exists x_0 \in \mathbb{Z}_p$ t.q. $yx_0 \notin \mathbb{Z}_p$ (por ejem $x_0 = 1$)

$\Rightarrow \chi_y(x) \neq \chi_0 \underset{\text{Lema}}{\Rightarrow} \int_{\mathbb{Z}_p} \psi_p(yx)\,dx = 0$.

$$\therefore \hat{f}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \mathbb{Z}_p \\ 0 & \text{si } y \notin \mathbb{Z}_p \end{cases} = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}$$

$\therefore f = \hat{f}$ ∎

El sig. resultado nos da una forma de recuperar f a partir de $\hat{f}$.

Teorema 6.- (Fórmula de inversión) (32)

Dado F campo local, dx medida de Haar y ψ carácter estándar, existe una única medida de Haar $d\hat{y}$ en el grupo dual $\hat{F}$ t.q. $\forall f \in S(F)$

$$f(x) = \int_{\hat{F}} \hat{f}(\chi)\,\chi^{-1}(x)\,d\hat{\chi}$$

Dem.- Larga

Corolario 1.- Sea F como y f como el anterior, entonces $\exists c > 0$ t.q.

$$\hat{(\hat{f})} = c \cdot f(-x)$$

Dem.- Por el teorema 4 ($F \cong \hat{F}$) entonces podemos identificar F con su dual $\hat{F}$ y χ con ψ_y. $\therefore$

$$f(x) = \int_F \hat{f}(\psi_y)(\psi_y(x))^{-1}\,d\hat{\chi}$$

$$= \int_F \hat{f}(y)(\psi(yx))^{-1}\,d\hat{\chi}$$

$$= \int_F \hat{f}(y)\,\psi(-yx)\,d\hat{\chi}$$

∎

pero como $F \cong \hat{F}$ $d\hat{x}$ debe corresponder con alguna medida $c\,dx$ de F. (medida de Haar única) con $k>0$

$\Rightarrow$ $f(x) = \int_F \hat{f}(y)\,\psi(-yx)\,c\,dx$

$= k\int_F \hat{f}(y)\,\chi(-yx)\,dx = k(\hat{\hat{f}})(-y)$

$\Rightarrow$ $(\hat{\hat{f}})(x) = c \cdot f(-x)$ $\square$

Def (Medida auto-dual) Una medida de Haar dx en F se llama auto-dual (con respecto al carácter χ) si la constante de inversión del teo. anterior es 1.

Es decir elegimos una única medida de Haar para cada F con su carácter estándar t.q.

$$(\hat{\hat{f}})(x) = f(-x).$$

Teorema (Identificación: medidas auto-duales)

Sea F, ψ como antes. Entonces las medidas autoduales serán

- si $F=\mathbb{R}$: dx la medida de Lebesgue
- si $F=\mathbb{C}$ dx = 2·Lebesgue
- si $F=\mathbb{Q}_p$ la t.q. $\int_{\mathbb{Z}_p} 1\,dx = 1$.

¿Ahora?

El objetivo no es analizar un solo campo local sino probar un resultado global sobre un campo numérico K (como $\mathbb{Q}$) entonces desarrollamos un Análisis de Fourier Global usando los campos locales K_v de los adeles

- Definir $S(\mathbb{A}_K)$ como producto restringido de $S(K_v)$
- Construir el carácter estándar de $\psi_{\mathbb{A}_K}$
- Definir la medida adélica a usar