Hechos Basicos

Def.- El conjunto de los numeros complejos, denotado por $\mathbb{C}$, consiste en todos los numeros de la forma $a+ib$, donde $a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{C} = \{a+ib \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

En este conjunto definimos las operaciones de suma y producto como:

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2) = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2) = (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

con estas operaciones es facil probar que $\mathbb{C}$ es un campo.

Dado un numero complejo $z=x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ definimos su parte real e imaginaria como $\operatorname{Re} z = x$ y $\operatorname{Im} z = y$. Asi, tanto la parte real como la parte imaginaria son numeros reales.

Podemos representar geometricamente a $\mathbb{C}$ haciendo que cada numero $z=x+iy$ corresponda con el punto de coordenadas (x,y) en el plano cartesiano.

Dado $z=x+iy$, definimos el conjugado de z como el numero complejo $\bar{z} = x-iy$. Geometricamente, el conjugado de z se obtiene al reflejar z con respecto al eje real.

Observemos que

$$\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad y \quad \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

y por la definicion del producto obtenemos

$$z\cdot\bar{z} = x^2+y^2$$

Con esto definimos la norma o modulo de z como

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z\cdot\bar{z} = |z|^2$$

y con esta ultima igualdad obtenemos que

$$z\cdot\frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

Lo que nos dice que el inverso de un número complejo distinto de cero se puede escribir como

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Otra manera útil de representar a los números complejos es la **forma polar**, que utiliza justamente las coordenadas polares.
Si $z = x+iy$ podemos escribir

$$x = r\cos(\theta) \quad , \quad y = r\sin(\theta)$$

donde r no es otra cosa que el módulo de z y θ es el argumento de z ($\mathrm{Arg}\, z$) con ello tendremos que

$$z = r\,[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$$

Podemos usar la forma polar para dar una interpretación geométrica del producto de dos números complejos.
Tendremos:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (r_1[\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)])(r_2[\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2)]) \\ &= r_1 \cdot r_2\,[(\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1))(\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2))] \\ &= r_1 \cdot r_2\,[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] \end{aligned}$$

Esto me dice que la multiplicación de dos números complejos es multiplicar sus módulos y sumar sus argumentos.
Análogamente

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)] \quad \text{con } z_2 \neq 0$$

Propiedades varias:

- $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$ y $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$
- $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\mathrm{Re}(z_1+z_2) = \mathrm{Re}\, z_1 + \mathrm{Re}\, z_2$
- $\mathrm{Im}(z_1+z_2) = \mathrm{Re}\, z_1 + \mathrm{Re}\, z_2$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|$
- $\mathrm{Arg}(zw) = \mathrm{Arg}\, z + \mathrm{Arg}\, w$

- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$
- $|z \pm w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z\overline{w})$
- $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$
- $|z+w| \leq |z| + |w|$
- $||z| - |w|| \leq |z-w|$

Regresando a la forma polar, tenemos que para $z \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $z = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$ donde $r = \sqrt{a^2+b^2}$ y $\theta = \operatorname{Arg} z$.

Obs.- El angulo θ esta determinado salvo multiplos enteros de 2π. ~~por~~ Es decir $z = r[\cos(\psi) + i\sin(\psi)]$ donde $\psi = \theta + 2\pi k$

Esta representación nos permite estudiar diversas potencias de un numero complejo, por ejemplo:

- $z^2 = r^2[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^2 = r^2[\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) + i\{2\sin(\theta)\cos(\theta)\}]$
  $= r^2[\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)]$
- $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{r[\cos(\theta) - i\sin(\theta)]}{r^2} = r^{-1}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$

Estos dos ejemplos nos pueden decir que $z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$ con $n \in \mathbb{Z}$

Proposición.- Formula de Moivre. Para $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

Dem.- Por inducción sobre n sale, y para $n < 0$ se toma para $n = 1$ y se eleva a la n.

Obs.- El valor de z^n no depende de la representación polar de z.

Esta última fórmula nos permite calcular las raíces n-ésimas de cualquier complejo no nulo.

Teorema.- Sea $z = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$, $z \neq 0$, entonces z tiene exactamente n raíces n-ésimas dadas por

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right]$$

con $k = 0, 1, \dots, n-1$

Dem.- Se busca $w = \rho(\cos(\varphi) + i\sin\varphi)$, tal que $w^n = z$, esto es

$$w^n = \rho^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)] = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$$

de donde

$$\rho^n = r \quad y \quad n\varphi = \theta + 2\pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

por lo cual

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad y \quad \varphi = \frac{\theta + 2\pi k}{n}$$

Finalmente, dos argumentos

$$\frac{\theta + 2\pi k_1}{n} \quad y \quad \frac{\theta + 2\pi k_2}{n}$$

definen la misma solución si, y solo si

$$\frac{\theta + 2\pi k_1}{n} - \frac{\theta + 2\pi k_2}{n} = 2m\pi \qquad m \in \mathbb{Z}$$

Esta última condición se cumple si y solo si

$$k_1 - k_2 = mn \quad , \quad m \in \mathbb{Z}$$

por lo que tomando $k = 0, 1, \dots, n-1$ se obtienen todas las raíces.

Proposición: Sea K campo t.q. x^2+1 tiene solución $\Rightarrow$ $\mathbb{C} \subseteq K$.

Dem: Denotemos por K a la solución. Definamos $F = \{a + K\cdot b \mid a,b \in \mathbb{R}\}$. Sea $\varphi: \mathbb{C} \to F$ dada por $\varphi(a+ib) = a + K\cdot b$. Entonces demostraremos que $\mathbb{C} \cong F$. (isomorfos)

P.D) φ es isomorfismo (de grupos)

• Considerando F con la suma usual

$\Rightarrow$ $\varphi((a+ib)+(c+id)) = \varphi((a+c)+i(b+d)) = (a+c) + K(b+d)$
$= (a+Kb)+(c+Kd) = \varphi(a+ib)+\varphi(c+id)$

$\therefore$ es homomorfismo

•

- Sean $a+ib,\ c+id \in \mathbb{C}$ t.q. $\varphi(a+ib)=\varphi(c+id)$ $\Rightarrow$ $a+Kb = c+Kd$
$\Rightarrow$ $(a-c)+K(b-d)=0$

  * Si $b-d=0$ $\Rightarrow$ $a-c=0$ $\Rightarrow$ $a=c$ $\therefore$ $a+Kb=c+Kd$

  * Si $b-d\neq 0$ $\Rightarrow$ $K = \frac{c-a}{b-d} \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ K es solución a $x^2+1=0$ en $\mathbb{R}$ esto es imposible.

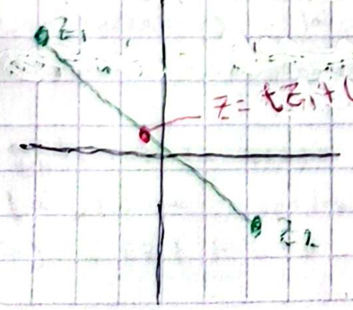
$\therefore$ φ es inyectiva

- Es suprayectiva ya que $\forall c,d \in \mathbb{R}$, $\varphi(c+id) = c+Kd$

$\therefore$ φ es isomorfismo $\therefore$ $\mathbb{C} \cong F \subseteq K$ y si $\dim(K) < \infty$ $\Rightarrow$ $\mathbb{C} = K$.

Geometría en $\mathbb{C}$

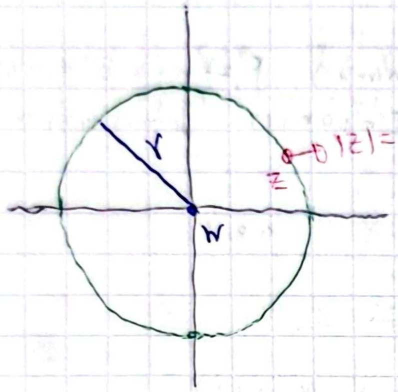
Rectas:



$l_{z_1,z_2} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = tz_1 + (1-t)z_2,\ t \in [0,1]\}$

$l_{\overline{z_1 z_2}} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = z + t\cdot z_2,\ t \in \mathbb{R}\}$

• Circunferencia:



$$C_r = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-w| = r \}$$

El disco sera

$$D_r(w) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-w| \le r \}$$

• Elipse: se define como $E = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-w_1| + |z-w_2| = 2\ell \}$

donde ℓ es el semieje mayor y w_1, w_2 son los focos

Cualquier lugar geométrico en $\mathbb{C}$ se puede considerar como un conjunto en $\mathbb{R}^2$ por medio de la identificación natural entre ambos conjuntos.

Recordemos que $z = x+iy$ y $\bar{z} = x-iy$ de donde

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

Podemos usar estas relaciones para escribir cualquier ecuación en (x,y) como una ecuación en términos de z y $\bar{z}$.

Ejemplos:

• Consideremos la ec. general de la recta en $\mathbb{R}^2$

$$Ax + By + C = 0$$

$\Rightarrow$ Sust. $x = \frac{z+\bar{z}}{2} \wedge y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

$\Rightarrow A\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + B\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + C = 0$ y como $\frac{1}{i} = -i$

$\Rightarrow A(z+\bar{z}) - iB(z-\bar{z}) + 2C = 0$

$\Rightarrow Az + A\bar{z} - iBz + iB\bar{z} + 2C = 0$

$\Rightarrow (A - iB)z + (A+iB)\bar{z} + 2C = 0$

$\Rightarrow \bar{D}z + D\bar{z} + C = 0$ con $D = \frac{1}{2}(A+iB)$

• Análogamente la ec. general de la circunferencia es

$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

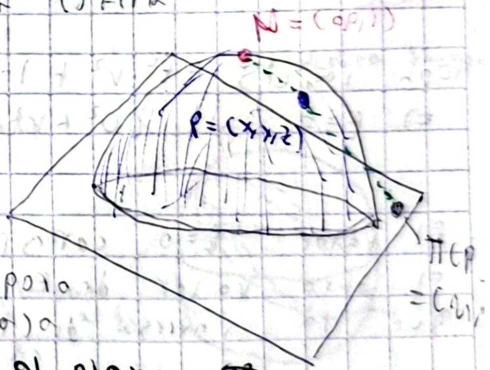
entonces

$$Az\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0 \quad \text{con } E = \frac{1}{2}(B+iC)$$

representa una recta si $A=0$ y una circunferencia si $A\neq 0$

1.4 Proyección Estereográfica

La proyección estereográfica es una transformación de una esfera en el plano, para nuestros fines conviene considerar a la esfera unitaria S^2, es decir, la esfera de radio 1 con centro en el origen de $\mathbb{R}^3$ y el plano complejo el plano xy de $\mathbb{R}^3$



La construcción:

La proyección $\Pi: S^2 \to \mathbb{C}$ se define así:
Para cada punto $P \in S^2$ (distinto del polo norte N) nos fijamos en la recta que pasa por P y N, prolongándola hasta que corte al plano complejo. Entonces $\Pi(P)$ es la intersección de la recta con el plano.

Para no confundirnos usaremos las coordenadas $(u,v,0)$ en el plano, identificando este punto con (u,v) o el número complejo $u+iv$.

Consideramos la recta $tP + (1-t)N$ y hallamos t tal que la tercera coordenada sea igual a cero.

Entonces la recta es $l = \{t(x,y,z) + (1-t)(0,0,1),\ t \in [0,1]\}$
la última coordenada de estos puntos es $t\cdot z + (1-t)$

$\Rightarrow tz + 1 - t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{1-z}$

$\Rightarrow \pi(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$

para todos los puntos excepto $(0,0,1)$. Para este punto conviene introducir un nuevo concepto.

Def.- El conjunto de los números complejos extendidos $\hat{\mathbb{C}}$ es

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Extendemos $\pi: S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ definiendo $\pi(0,0,1) = \infty$

La inversa de la proyección

Ahora haremos lo inverso, dado el punto $(u,v,0)$ en el plano, nos fijamos en la recta que pasa por este punto y por el polo norte. Buscamos t de modo que el punto $t(u,v,0) + (1-t)(0,0,1)$ * tenga norma 1 (así estará en la esfera) es decir: $* = (t\cdot u, t\cdot v, 1-t)$

$$\Rightarrow (tu)^2 + (tv)^2 + (1-t)^2 = 1$$

$\Rightarrow t^2 u^2 + t^2 v^2 + 1 - 2t + t^2 = 1 \Rightarrow (u^2+v^2+1)t^2 - 2t = 0$

$\Rightarrow t = 0$ y $(u^2+v^2+1)t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{u^2+v^2+1}$

El valor $t=0$ corresponde al polo norte entonces sustituyendo el otro valor de t en $t(u,v,0) + (1-t)(0,0,1)$ tenemos que la inversa de la proyección está dada por:

$$\pi^{-1}(u,v) = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right) = (x,y,z)$$

Proposición.- La proyección estereográfica manda circunferencias sobre la esfera en circunferencias o rectas en el plano.

Dem.- Una circunferencia C en S^2 se puede ver como la intersección de la esfera con un plano, de modo que las ecuaciones de C son:

$$x^2+y^2+z^2 = 1, \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

Usando π^{-1}, vimos que las coordenadas u,v satisfacen

$$A\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}\right)\cdot\left(\frac{2v}{u^2+v^2+1}\right)\cdot C\left(\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)+D=0$$

Podemos escribir lo anterior como

$$0=2Au+2Bv+C(u^2+v^2-1)+D(u^2+v^2+1)$$

o bien

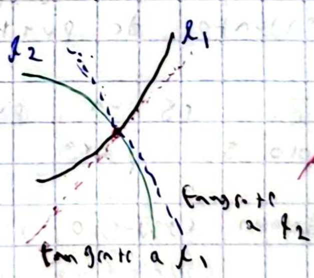
$$(C+D)(u^2+v^2)+2Au+2Bv+(D-C)=0$$

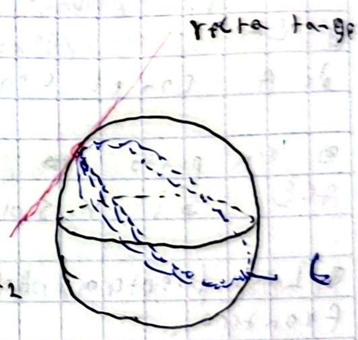
que representa una circunferencia si $C+D\neq 0$ o una recta si $C+D=0$

Más aún si C pasa por el polo norte $(0,0,1)$ entonces $C+D=0$ y tendremos una recta, por otro lado cualquier otra circunferencia me dara una circunferencia bajo la proyección.

Proposición.- La proyección estereográfica es conforme, es decir; preserva ángulos entre curvas

Dem.- Dados dos curvas en S^2, tales que se intersectan, podemos tomar las rectas tangentes al punto de intersección y entonces, el ángulo entre las dos curvas es el ángulo entre las rectas.





Obs.-

- Dos rectas en realidad forman dos ángulos θ_1 y θ_2, relacionados por $\theta_1+\theta_2=\pi$. Eligiremos el ángulo $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, lo que implica que $\cos(\theta)\geq 0$.

- Dada una recta tangente a la esfera, siempre hay un círculo máximo que tiene a la recta como tangente

- Por tanto, basta fijarnos en una pareja de círculos máximos considerar el ángulo entre ellos y luego fijarnos en el ángulo que forman sus imágenes.

- lo esta en el libro lo demas

Def.- Disco abierto. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r>0$. El disco abierto con centro en z_0 y radio r, denotado $D_r(z_0)$ es el conjunto

$$D_r(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0|<r \}$$

Ahora un resumen de algunos conceptos topologicos

- Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es un punto interior de A si existe $r>0$ tal que $D_r(z_0) \subseteq A$

- El interior de un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ es el conjunto de todos los puntos interiores

- Un conjunto $U \subset \mathbb{C}$ es abierto si, y solo si coincide con su interior; es decir, todos sus puntos son interiores

- Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es cerrado si y solo si $\mathbb{C} \setminus A$ es abierto.

- Un punto z_0 es punto de acumulación de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ si para todo $r>0$, $(D_r(z_0) \setminus \{z_0\}) \cap A \neq \emptyset$)

- La cerradura de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es igual a la union de A con el conjunto de puntos de acumulación

- Un punto z_0 es un punto frontera de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ si, y solo si, para cada $r>0$ $D_r(z_0) \cap A \neq \emptyset$ y $D_r(z_0) \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \emptyset$

- La frontera de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es el conjunto de sus puntos frontera.

- Un conjunto $K \subset \mathbb{C}$ es compacto si y solo si para cualquier cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de K existe subcubierta finita de K

Teorema.- (Heine-Borel) Un conjunto $K \subset \mathbb{C}$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

- Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es disconexo si existen dos abiertos ajenos $U, V \subset \mathbb{C}$ t.q. $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$ y $A \subset U \cup V$

Def: Un conjunto $U \subset \mathbb{C}$ es una región (o un dominio) de $\mathbb{C}$ si y solo si U es abierto y conexo.

Sucesiones y series

- Una sucesión de números complejos es una función $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ y $f(n) = z_n$, denotaremos a la sucesión por $\{z_n\}$

- Decimos que una sucesión $\{z_n\}$ converge a z si para todo $\varepsilon > 0$ $\exists N > 0$ t.q si $n > N$, entonces $|z_n - z| < \varepsilon$

- Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ $\exists N > 0$ t.q si $n, m > N$, entonces $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Teorema (completitud): $\mathbb{C}$ es un espacio métrico completo; es decir, toda sucesión de Cauchy converge.

Def: Sea $\{z_n\}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. La serie generada por $\{z_n\}$ es la suma formal $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Decimos que la serie converge si y solo si el límite de la sucesión de sumas parciales

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} z_n$$

existe y denotamos a este límite $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Proposición (Criterio de Cauchy) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q si $k > N$ entonces

$$\left| \sum_{n=k}^{k+p} z_n \right| < \varepsilon$$

- Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente si y solo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge.

- Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente $\Rightarrow$ converge

Criterios de convergencia

Funciones de variable compleja

La mayor parte del tiempo consideramos que el dominio de nuestras funciones $f: U \to \mathbb{C}$ sea una región del plano complejo.

Cada función de este tipo se puede escribir como:

$$f(z) = u(z) + i v(z)$$

donde $u(z) = \mathrm{Re}\, f(z)$, $v(z) = \mathrm{Im}\, f(z)$. Como en el caso de los números complejos individuales.

Algunos ejemplos de cálculo\análisis se extienden de manera inmediata al caso complejo. Veamos algunos ejemplos.

Def.- Sea $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función y z_0 un punto de acumulación de A. Entonces $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ t.q. si $0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$

Podemos analizar el límite coordenada a coordenada

Proposición.- Sea $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función, con $f = u + iv$ y z_0 un punto de acumulación de f.

$\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe y es igual a L si y solo si $\lim_{z \to z_0} u(z)$ y $\lim_{z \to z_0} v(z)$ existen y son iguales a $\mathrm{Re}(L)$ y $\mathrm{Im}(L)$ respectivamente.

Lema.- Sea $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función y z_0 un p. de acum. de A.

- Si $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe, entonces f está acotada en una vecindad de z_0: es decir existen constantes $\delta, M > 0$ tales que $|f(z)| < M$ para $|z - z_0| < \delta$

- Si $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe y es distinto de cero, entonces f está acotado lejos de cero en una vecindad de z_0; es decir existen constantes $\delta, M > 0$ t.q. $|f(z)| \geq M$ para $|z - z_0| < \delta$

Proposición.- Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones y z_0 un punto de acumulación de A, si existen $\lim_{z \to z_0} f(z) = L_f$ y $\lim_{z \to z_0} g(z) = L_g$, entonces:

- $\lim_{z \to z_0} (f+g)(z)$ existe y es igual a $L_f + L_g$
- $\lim_{z \to z_0} (f \cdot g)(z)$ existe y es igual a $L_f \cdot L_g$
- si $L_g \neq 0$, $\lim_{z \to z_0} \left(\frac{f}{g}\right)(z)$ existe y es igual a $\frac{L_f}{L_g}$

Ahora revisaremos brevemente el concepto de continuidad de funciones de variable compleja.

Def.- Sea $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función.

- Sea $z_0 \in A$. Entonces f es continua en z_0 si y solo si $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$
- f es continua en un conjunto $B \subseteq A$ si, y solo si f es continua en z_0 para todo $z_0 \in B$.

Las funciones continuas tienen propiedades completamente análogas a las funciones continuas de variable real. Estas son la suma, producto, división y composición, así como propiedades topológicas:

- La imagen inversa de abtos es abta
- La imagen inversa de cerrados es cerrado
- La imagen directa de compactos es compacta
- La imagen directa de conexos es conexa
-

Def.- Decimos que una función $f : U \to \mathbb{C}$ es uniformemente continua si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - w| < \delta$ y $z, w \in U$, entonces $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$

Sucesiones y series de funciones

Def.- Una sucesión de funciones $\{f_n: \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$ converge puntualmente (o simplemente converge) a una función $f: U \to \mathbb{C}$ si y solo si para cada $z \in U$, $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$.

Una sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente si y solo si $\forall \varepsilon > 0$ existe N t.q. si $n > N$ entonces $|f_n(x) - f(z)| < \varepsilon$ $\forall z \in U$

Ejemplo en $\mathbb{R}$

- Sean $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = x^n$, si $|x| > 1$, $|f_n(x)| \to \infty$, de modo que si restringimos cada f_n a $[0,1]$. La sucesión converge a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1) \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

¿Es uniforme la convergencia? NO

Ejemplo en $\mathbb{C}$

- Consideremos las funciones $f_n: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por $f_n(z) = z^n$

  * si $|z| > 1$, $f_n(z) \to \infty$
  * si $|z| = 1 \Rightarrow f_n(z)$?
  * si $|z| < 1 \Rightarrow f_n(z) \to 0$

$\{f_n\}$ no converge uniformemente en $\{|z| < 1\}$

Proposición.- La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0 en cualquier disco cerrado $\{|z| \leq r\}$ con $r < 1$

Dem.- En este disco

$$|f_n(z)| = |z^n| = |z|^n \leq r^n$$

y existe N t.q. si $n > N \Rightarrow r^n < \varepsilon$

Teorema.- Sea $\{f_n : U \to \mathbb{C}\}$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a $f : U \to \mathbb{C}$. Entonces f es continua.

Proposición.- (Criterio de Cauchy)
La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe N t.q. si $n, m > N \Rightarrow |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$

Podemos extender el concepto de serie al caso de series de funciones y hablar de convergencia, y de la convergencia uniforme de series de funciones.

Teorema.- (Criterio M de Weierstrass)
Sea U una región de $\mathbb{C}$ y $f_n : U \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones. Si existe una sucesión de números reales no negativos $\{M_n\}$ tales que $|f_n(z)| \leq M_n$ para todo $z \in U$ y $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniforme y absolutamente en U.

Dem.- Como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge $\Rightarrow$ por el criterio de Cauchy dado $\varepsilon > 0$ existe N t.q. $\sum_{n=k}^{k+p} M_n < \varepsilon$ $\forall k > N$ y todo $p \in \mathbb{N}$, de modo que para todo $z \in U$ tenemos que

$$\left| \sum_{n=k}^{k+p} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=k}^{k+p} |f_n(z)| \leq \sum_{n=k}^{k+p} M_n < \varepsilon$$

Así la serie converge absoluta y uniformemente.

Funciones

Un polinomio de grado $n \geq 0$ tiene la forma

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \quad , a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \quad , a_n \neq 0$$

Cualquier polinomio de grado mayor o igual a 1 con coeficientes complejos tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$, lo que implica que un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces. Además decimos que una raíz α tiene multiplicidad $h \geq 1$ si:

$$p(z) = (z-\alpha)^h \cdot p_h(z) \quad , \text{con} \quad p_h(\alpha) \neq 0$$

Otra manera de escribir la multiplicidad es la sig:

Corolario: Si α es un cero de orden h de $p(z)$ entonces

$$p(\alpha) = p'(\alpha) = \cdots = p^{(h-1)}(\alpha) = 0$$

y $p^{(h)}(\alpha) \neq 0$

~~[illegible]~~

Exponencial y Logaritmo

e^z debe de generalizar a la exponencial real y compartir muchas de sus propiedades. Así, si $z = x + iy$, queremos que

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

donde e^x debe ser la exponencial real. Solo falta definir e^{iy} entonces.

Recordando la serie de taylor de la exponencial real queremos

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \cdots$$

lo podemos ordenar como

$$\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots\right)$$

pero estos son los series del seno y coseno ordinarios;

Def.- Dado $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ se define a la función exponencial e^z como

$$e^z = e^x (\cos(y) + i\sin(y))$$

Proposición.- La función exponencial cumple lo siguiente:

- Si $\theta \in \mathbb{R}$, entonces $|e^{i\theta}| = 1$; en particular, $e^{\pi i} = -1$
- $e^{z+w} = e^z \cdot e^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$
- exp no es inyectiva, de hecho es periódica con periodo $2\pi i$
- exp siempre es distinta de cero y suprayectiva en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Dem.-

(1) $|e^{i\theta}| = |e^0 (\cos(\theta) + i\sin(\theta))| = |\cos(\theta) + i\sin(\theta)| = 1.$

(2)
$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^{Re(z+w)} [\cos(Im(z+w)) + i\sin(Im(z+w))] \\ &= e^{Re(z)+Re(w)} [\cos(Im(z)+Im(w)) + i\sin(Im(z)+Im(w))] \\ &= e^{Re z} \cdot e^{Re(w)} [\ldots] \\ &= [e^{Re z} (\cos(Im(z)) + i\sin(Im(z)))] [e^{Re(w)} [\ldots]] \\ &= e^z \cdot e^w \end{aligned}$$

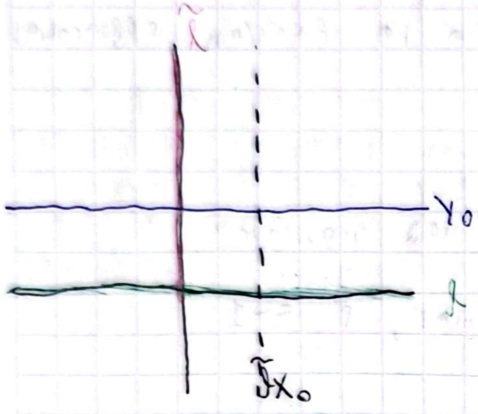
(3) En efecto, $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot [\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)]$
$= e^z \cdot [1] = e^z$ $\therefore$ no es inyectiva y además es de periodo $2\pi i$

(4) $|e^z| = |e^x| |\cos(y) + i\sin(y)| = |e^x| \cdot 1 = |e^x| = e^x > 0$

Es suprayectiva, pues toma $w = r_0 [\cos(\theta_0) + i\sin(\theta_0)]$
Queremos encontrar $z \in \mathbb{C}$ t.q. $e^z = r_0 [\cos(\theta_0) + i\sin(\theta_0)]$

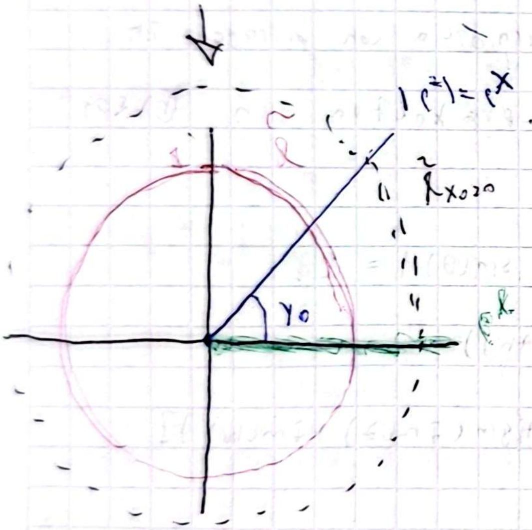
Entonces tomo $e^x = r_0$ y $y \equiv \theta_0 \pmod{2\pi}$ de modo que
$z = \ln(r_0) + i(\theta_0 + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$ cumplen que $e^z = w$.

Entonces tenemos que $e^z = e^x[\cos(y) + i\sin(y)]$, Así:



- La recta $\ell := \{x + i0 \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ va a dar bajo la exp. a $e^{\ell} := \{e^x \mid x \in \mathbb{R}\}$

- La recta $\ell_{y_0} = \{x + iy_0 \mid x \in \mathbb{R}\}$ va a dar a $e^{\ell_{y_0}} = \{e^x[\cos(y_0) + i\sin(y_0)] \mid x \in \mathbb{R}\}$



- Las rectas $\tilde{\ell}_{x_0} = \{iy \mid y \in \mathbb{R}\}$
$\Rightarrow e^{\tilde{\ell}} = \{\cos(y) + i\sin(y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

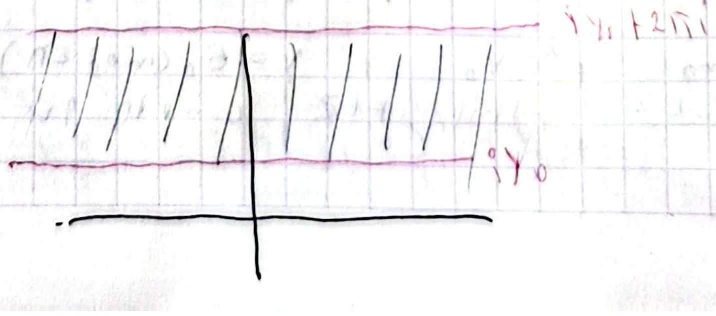
- La recta $\tilde{\ell}_{x_0} = \{x_0 + iy \mid x_0 > 0\}$
$\Rightarrow e^{\tilde{\ell}_{x_0}} = \{e^{x_0}[\cos(x) + i\sin(y)]\}$

Con esto vemos que nos falta la inyectividad de la exp para que tenga parentesco con la exp real.

Así que restringiremos su dominio.

Como exp tiene periodo $2\pi i$, es natural considerar cualquier franja horizontal de ancho $2\pi i$, en forma explícita, sean $y_0 \in \mathbb{R}$ y

$$F_{y_0} = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R},\ y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\}$$



Proposición.- $\forall y_0 \in \mathbb{R}$, la exponencial compleja manda la franja A_{y_0} sobre $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ de manera biyectiva.

Dem.-

Lema.- $e^z = 1 \iff z = 2\pi k i$.

Dem.- En efecto, como $e^z = 1 \Rightarrow |e^z| = 1 \Rightarrow e^x = 1 \iff x = 0 \Rightarrow e^z = e^{iy} = 1 \Rightarrow i\sin(y) = 0 \Rightarrow \sin(y) = 0 \Rightarrow y = \pi k$ y además $\cos(y) = 1 \Rightarrow y = 2\pi k$ $\therefore$ $y = 2\pi k$ $\therefore$ $z = 2\pi k i$, el regreso es sencillo.

Ahora.

Inyectiva: si $e^z = e^w \Rightarrow e^z e^{-w} = 1 \Rightarrow e^{z-w} = 1 \iff z - w = 2\pi k i \Rightarrow z = w + 2\pi k i$ pero como $z, w \in A_{y_0}$ no pueden diferir de más de $2\pi i$ $\therefore$ ~~...~~ $\therefore$ $z = w$.

Sobre. Ya demostrado.

Cuando vimos la suprayectividad, encontramos la inversa de la exp. la cual definiremos como el logaritmo complejo.

Def.- Sea $y_0 \in \mathbb{R}$. Definimos la rama del logaritmo de z en A_{y_0} como la función $\log : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to A_{y_0}$ que a cada $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $z = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$ le asocia

$$\log z = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z) \text{ con } \operatorname{Arg}(z) \in [y_0, y_0 + 2\pi)$$

ó

$$\log z = \ln(r) + i(\theta + 2\pi k)$$ donde k es el único entero t.q. $y_0 \leq \theta + 2\pi k \leq y_0 + 2\pi$

Obs.- El número $\theta + 2\pi k$ recibe el nombre de el argumento de z (con respecto a la rama del logaritmo en A_{y_0}) y se denota con $\operatorname{Arg} z$. Hay dos ramas preferidas sobre las demás:

- $y_0 = 0$, es decir, $\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi)$
- $y_0 = -\pi$, de modo que $\operatorname{Arg} z \in [-\pi, \pi)$.

A esta última se le llama La rama principal

Debido a la presencia de varias ramas del logaritmo, algunas propiedades usuales de este NO son ciertas tal cual.

Por ejemplo, usemos la rama principal.

o Sean $z=-1+i$ y $w=i$, entonces $zw=-1-i$

y

$$\log z = \ln\sqrt{2} + i\,\frac{3\pi}{4}$$

$$\log w = \ln(1) + i\,\frac{\pi}{2}$$

y $$\log(zw) = \ln(\sqrt{2}) + i\,\frac{3\pi}{4}$$

y observemos que

$$\log z + \log w = \ln\sqrt{2} + i\,\frac{5\pi}{4} \neq \log(zw)$$

En general solo podemos afirmar que

$$\log(zw) = \log(z) + \log(w) \quad , \bmod 2\pi i$$

Teorema.- El logaritmo es la inversa de la exponencial en el sig. sentido:

(1) para cualquier rama del logaritmo $e^{\log(z)} = z \quad \forall z \neq 0$

(2) Dada una rama del logaritmo en A_{y_0} y $z \in A_{y_0}$, entonces $\log(e^{z}) = z$

Dem.-

(1) Si $\log$ denota cualquier rama del logaritmo

$$\Rightarrow e^{\log z} = e^{\ln|z| + i\arg(z)} = \underbrace{e^{\ln|z|}}_{\text{real}} \cdot e^{i\arg(z)} = |z| \cdot e^{i\arg(z)}$$

$$= |z| \cdot \frac{|z|\, e^{i\arg(z)}}{|z|} = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = z.$$

(2) Si ahora $\log_{y_0}$ denota la rama del logaritmo

$y = \arg(e^z)$

con argumentos en $[y_0, y_0 + 2\pi)$, entonces:

$$\log_{y_0}(e^z) = \ln|e^z| + i\arg(e^z) = \ln|e^x| + i\arg(e^x \cdot e^{iy})$$

$$\Rightarrow \log_{y_0}(e^z) = x + iy = z$$

Potencias arbitrarias

Supongamos que queremos definir $a = z^w$. Usando propiedades del logaritmo $\log a = \log z^w = w\log z$

$\Rightarrow a = e^{\log(a)} = e^{w\log(z)}$ de aquí se desprende la definición.

Def.- Sean $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ y $w \in \mathbb{C} \Rightarrow z^w := e^{w\log(z)}$ donde elegimos (y fijamos) una rama de log.

¿Es una extensión adecuada?

Proposición.- Si $w = n \in \mathbb{Z}$, entonces $z^w = z^n$ asume un único valor sin depender de la rama elegida para log.

Dem.- Con una rama arbitraria del logaritmo fija, el logaritmo de z se escribe

$$\ln|z| + i(\arg(z) + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

donde $\arg(z)$ se toma en la rama principal, es decir, entre $-\pi$ y π.

Entonces $z^w = z^n := \exp(n\log(z)) = \exp(n[\log|z| + i(\arg(z) + 2\pi k)])$ que es un único valor.

Proposición.- Si $w = \frac{1}{q}$ donde $q \in \mathbb{N} \Rightarrow z^{\frac{1}{q}}$ solo puede asumir q valores. -

Con la exponencial y el logaritmo a nuestras manos, podemos definir algunas funciones que extienden a funciones reales conocidas.

Tenemos que $z = e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$

$$\bar{z} = e^{-iy} = \cos(y) - i\sin(y)$$

Además sabemos que $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ entonces:

$$Re(z) = \cos(y) = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$$

$$Im(z) = \sin(y) = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$$

De lo que se desprende la definición.-

Def.- Sea $z \in \mathbb{C}$, se definen el seno y el coseno complejos como:

$$\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

Las demás funciones trigonométricas se definen de manera usual, por ejemplo $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$, etc.

Proposición.- $\forall z, w \in \mathbb{C}$ se tiene que:

- $\sin(z+2\pi k) = \sin(z)$ y $\cos(z+2\pi k) = \cos(z)$
- $\sin^2(z) + \cos^2 z = 1$
- $\operatorname{sen}(-z) = -\sin(z)$ y $\cos(-z) = -\cos(z)$
- $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z)$
- $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(w)\sin(z)$

Escaneado con CamScanner

Def: Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ una región, $f: U \to \mathbb{C}$ una función y $z_0 \in U$. Decimos que f es $\mathbb{C}$-diferenciable en z_0 si existe el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

En tal caso decimos que dicho límite es la derivada de f en z_0, denotada como $f'(z_0)$ o $\frac{df}{dz}(z_0)$.

Puesto que la definición es análoga a la definición en el caso de funciones reales de variable real, no es de sorprender que se cumplan varias propiedades.

Proposición: Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ una región, $f, g: U \to \mathbb{C}$ funciones y $z_0 \in U$. Se cumplen las siguientes:

(1) Si f es $\mathbb{C}$-diferenciable en z_0, entonces f es continua en z_0.

(2) Si f, g son $\mathbb{C}$-diferenciables en z_0, entonces la suma $f+g$ y el producto $f \cdot g$ lo son. Además

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

(3) Si además $g(z_0) \neq 0 \Rightarrow f/g$ es $\mathbb{C}$ diferenciable en z_0 y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)\,g(z_0) - f(z_0)\,g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

(4) (Regla de la cadena) Sup que $h: V \to \mathbb{C}$ es función t.q. $f(U) \subset V$ y que h es $\mathbb{C}$-diferenciable en $f(z_0)$. Entonces $h \circ f$ es $\mathbb{C}$ diferenciable en z_0 y

$$(h \circ f)'(z_0) = h'(f(z_0))\,f'(z_0)$$

La demostración de estas propiedades es completamente análoga a su correspondiente caso de funciones en $\mathbb{R}^2$.

Por lo pronto, haremos una comparación de este concepto con el de diferenciabilidad para el caso de funciones $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$.

Def.- Sean $U\subset\mathbb{R}^2$ una región, $f:U\to\mathbb{R}^2$ una función y $(x_0,y_0)\in U$. Decimos que f es $\mathbb{R}^2$-diferenciable en (x_0,y_0) si existe una transformación lineal $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ t.q.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-L(x-x_0,y-y_0)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|}=\bar{0}$$

o de forma equivalente

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\|f(x,y)-f(x_0,y_0)-L(x-x_0,y-y_0)\|}{\|(x-x_0,y-y_0)\|}=0.$$

Cuando esto ocurre decimos que dicha transformación es la diferencial de f en (x_0,y_0), denotada como $Df(x_0,y_0)$.

Recordemos que en esta situación, si denotamos por (u,v) a las funciones coordenadas de f, tenemos las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

existen y la diferencial tiene asociada la matriz derivada $Df(x_0,y_0)$ dada por

$$Df(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

En el resto del curso usaremos de manera libre la identificación de $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, de modo que el punto (x_0,y_0) se verá como el complejo $z=x_0+iy_0$.

Escaneado con CamScanner

Proposición: Sea $\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$. Entonces $z_n \to z \iff$
$Re(z_n) \to Re(z)$ y $Im(z_n) \to Im(z)$

Dem:
$\Rightarrow$) Sup. que $z_n \to z \iff z_n - z \to 0 \implies |z_n - z| \to 0$

$\implies Re(z_n - z)^2 + Im(z_n - z)^2 \to 0$ y como cada uno es mayor o igual a cero nos queda que
$Re(z_n - z) \to 0$ y $Im(z_n - z) \to 0 \implies Re(z_n) - Re(z) \to 0$ y
$Im(z_n) - Im(z) \to 0 \implies Re(z_n) \to Re(z) \wedge Im(z_n) \to Im(z)$.

$\Leftarrow$) ✓

Proposición: Sea $f: U \to \mathbb{C}$. Entonces $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe $(=L)$

si, y solo si, $\forall \{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$ t.q. $z_n \to z$ se cumple que
$\lim_{n \to \infty} f(z_n)$ existe $(=L)$

Dem: Igual al caso real.

Corolario: Sea $g: U \to \mathbb{C}$. Entonces $\lim_{z \to z_0} g(z) = L$

$\iff \lim_{z \to z_0} Re(g(z)) = Re(L)$ y $\lim_{z \to z_0} Im(g(z)) = Im(L)$

Teorema.- Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ una región, $f: U \to \mathbb{C}$ una función tq $f(z) = u(z) + iv(z)$ y $z_0 \in \mathbb{C}$.
f es diferenciable en z_0 si, y solo si, se cumplen las siguientes condiciones:

(1) $f: U \to \mathbb{R}^2$ es $\mathbb{R}^2$-diferenciable en (x_0, y_0)

(2) las derivadas parciales existen y cumplen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

"Ecuaciones de Cauchy-Riemann"

Dem.- Supongamos que f es $\mathbb{C}$-diferenciable, entonces

$\Rightarrow$ (2)

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{existe}$$

$$\Rightarrow f'(z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x+iy_0) - f(x_0+iy_0)}{(x+iy_0) - (x_0+iy_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x+iy_0) + iv(x+iy_0) - u(x_0+iy_0) - iv(x_0+iy_0)}{(x+iy_0) - (x_0+iy_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x+iy_0) - u(x_0+iy_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x+iy_0) - v(x_0+iy_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0+iy_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0+iy_0)$$

y

$$f'(z_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0+iy) - f(x_0+iy_0)}{(x_0+iy) - (x_0+iy_0)}$$

$$\vdots$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0+iy) - u(x_0+iy_0)}{i(y - y_0)} + i \lim_{y \to y_0} \frac{v(x_0+iy) - v(x_0+iy_0)}{i(y - y_0)}$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0+iy_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0+iy_0)$$

$$= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0+iy_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0+iy_0)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \iff \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ \wedge \ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$(\Rightarrow)$ Sup que f es $\mathbb{C}$ diferenciable en z_0 y mostramos que f es $\mathbb{R}^2$ diferenciable en (x_0,y_0). Sabemos que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) \Rightarrow \lim_{z\to z_0} \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) \right| = 0$$

$$\iff \lim_{z\to z_0} \left| \frac{f(z)-f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)}{z-z_0} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{|f(z)-f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)|}{|z-z_0|}$$

Al comparar la condición de $\mathbb{R}^2$-diferenciabilidad, resta ver si el término $f'(z_0)(z-z_0)$ se puede escribir como $L(x-x_0, y-y_0)$. En efecto, con $f'(z_0) = a+ib$

$$\Rightarrow (a+ib)((x-x_0)+i(y-y_0)) = [a(x-x_0)-b(y-y_0)] + i[a(y-y_0)+b(x-x_0)]$$

lo que identificamos con el punto

~~A su vez~~

$$(a(x-x_0)-b(y-y_0),\ a(y-y_0)+b(x-x_0)).$$

A su vez, podemos escribir esto como el producto matricial

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \exists L \text{ lineal t.q. } [L] = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$(\Leftarrow)$ Veamos que si f es $\mathbb{R}^2$ diferenciable en (x_0,y_0) y las derivadas parciales cumplen las ecuaciones de Cauchy Riemann entonces $f'(z_0)$ existe.

Queremos ver $L(x-x_0, y-y_0)$ como producto de números complejos por $(z-z_0)$. Nos fijamos en la matriz derivada

$$D_{f(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \overset{C.R.}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Donde las derivadas parciales se evalúan en (x_0, y_0)

Al multiplicar por $\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$ obtenemos el vector

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(y-y_0), -\frac{\partial v}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(y-y_0)\right)$$

donde las derivadas parciales se evalúan en (x_0, y_0). Esto se identifica con el producto de números complejos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\right)(z-z_0)$$

Así reinterpretando en términos de números complejos tenemos que $f'(z_0)$ existe y es precisamente el número

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$$

Def: Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ una región y $f: U \to \mathbb{C}$ función.

- f es analítica (u holomorfa) en $z_0 \in U$ si existe una vecindad (abierta) $V \subseteq U$ de z_0 tal que $f'(z)$ existe para cada punto $z \in V$
- f es analítica en U si es analítica en cada punto.
- f es entera si está definida en todo el plano complejo y es analítica en $\mathbb{C}$

Teorema: f es analítica en $z_0 \Leftrightarrow$ es dife en una vecindad de z_0 ~~es~~ $\mathbb{R}^2$ diferenciable y cumple C-R en una vecindad de z_0

Un corolario inmediato del teorema anterior es el sig.

Corolario: Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ una región y $f: U \to \mathbb{C}$ una función, con $f = u + iv$. Si se cumplen las sig.:

- $f: U \to \mathbb{R}^2$ es de clase C^1
- Se cumplen las ec. Cauchy-Riman

Entonces f es analítica en U

Entonces si tengo una función $f: U \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in U$ t.q. se cumple que f es $\mathbb{R}^2$-diferenciable y las ec. C-R entonces f es $\mathbb{C}$-diferenciable en z_0.

Y mas aun, si sucede que las parciales son continuas entonces f sera analitica en z_0.

Como ilustración de la fuerza de Cauchy-Riemann y del hecho que las funciones analiticas no se comportan como las funciones en $\mathbb{R}^2$, tenemos:

Proposición.- Sea $f: U \to \mathbb{C}$ analitica, tal que la imagen de f esta contenida en el eje real. Entonces f es constante.

Dem.- Si $f = u + iv$, el hecho de que la imagen de f este contenida en el eje real dice que $v = 0$, entonces $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ y como f es analitica, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ^ $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow u = c$, c-constante.

Proposición.- Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ una región y $f: U \to \mathbb{C}$ función con $f(z) = u(\theta,r) + iv(\theta,r)$ en su forma polar. Entonces f es analitica en z_0 si y solo si:

- f es $\mathbb{R}^2$-diferenciable en
- Cumple las ec. Cauchy-Riemann polares

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(\theta,r) = -r\frac{\partial v}{\partial r}(\theta,r)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}(\theta,r) = r\frac{\partial u}{\partial r}(\theta,r)$$

en una vecindad de z_0.

Y ademas $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ donde $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos(\theta)$

$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ $\qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{r}\sin\theta$

Corolario:- Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ región y $f: U \to \mathbb{C}$ una función, con $f(z) = u(\theta, r) + i v(\theta, r)$ en su forma polar. Si se cumplen los sig:

- $f: U \to \mathbb{R}^2$ es de clase C^1
- se cumplen C-R polares

Entonces f es analítica en U.

Ejemplos:-

[illegible]

- z^n, es entera.

Dem:-

Sea $f(z) = z^n = r^n\cos(n\theta) + i r^n \sin(n\theta)$ y $z = r\,\text{cis}(\theta)$

entonces notemos que

$u(\theta, r) = r^n \cos(n\theta)$ y $v(\theta, r) = r^n \sin(n\theta)$ son de clase C^1

∴ y además $\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r^n \sin(n\theta)\cdot n$

y $\frac{\partial v}{\partial r} = n \cdot r^{n-1} \sin(n\theta)$ y $\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}$

También $\frac{\partial v}{\partial \theta} = r^n \cdot n \cos(n\theta)$ y $\frac{\partial u}{\partial r} = n \cdot r^{n-1} \cos(n\theta)$

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial \theta} = r \cdot \frac{\partial u}{\partial r}$ ∴ $f(z) = z^n$ es analítica $\forall z_0 \in \mathbb{C}$

∴ es entera

•

Además

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (r^n \cos(n\theta))}{\partial x} = n r^{n-1} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \cos(n\theta) + n r^{n-1} \sin(n\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= n r^{n-1} [\cos(n\theta)\cos(\theta) + n r^{n-1} \sin(n\theta)\sin(\theta)]$$

$$i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial\, r^n \sin(n\theta))}{\partial x} = i\, n r^{n-1} [\sin(n\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos(n\theta)]$$

$$\Rightarrow f'(z) = n r^{n-1} [\cos((n-1)\theta) + i \sin((n-1)\theta)]$$

$$= n z^{n-1}$$

• $f(z)=\bar{z}$ no es dif. en $\mathbb{C}$

Dem.- Tenemos que $f(z)=x-iy$ con $z=x+iy$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=1$ y $\frac{\partial v}{\partial y}=-1$ ∴ $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$ ∴ no cumple C-R

∴ no es diferenciable en $\mathbb{C}$

• ¿$f(z)=|z|^2$ es analítica en 0?

Tenemos que f es diferenciable en 0, pues

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2}{z}=\lim_{z\to 0}\bar{z}=0$$

∴ $f'(0)=0$.

Pero $\forall z_0\neq 0$ $f'(z)$ no existe, pues, acercándonos por tz_0

$$\lim_{t\to 1^+}\frac{f(tz_0)-f(z_0)}{tz_0-z_0}=\lim_{t\to 1^+}\frac{|tz_0|^2-|z_0|^2}{tz_0-z_0}=\lim_{t\to 1}\frac{(t^2-1)|z_0|^2}{(t-1)z_0}$$

$$=\lim_{t\to 1^+}(t+1)\bar{z}_0=2\bar{z}_0\neq 0$$

pero si nos acercamos por la circunferencia con centro en el origen que pasa por $z_0=re^{i\theta_0}$

$$\lim_{\theta\to\theta_0}\frac{|re^{i\theta}|^2-|re^{i\theta_0}|^2}{re^{i\theta}-re^{i\theta_0}}=\lim_{\theta\to\theta_0}\frac{r^2-r^2}{re^{i\theta}-re^{i\theta_0}}=0$$

∴ el límite no existe y ∴ no es diferenciable para $z\neq 0$

• La función exponencial e^z es entera.

Dem.- Tenemos que para $z=x+iy$, $e^z=e^x[\cos(y)+i\sin(y)]$

$=e^x\cos(y)+ie^x\sin(y)$

y como $u(x,y)=e^x\cos(y)$, $v(x,y)=e^x\sin(y)$ son de clase C^1 $\Rightarrow$ $\forall z\in\mathbb{C}$, e^z es holomorfa en z ∴ e^z es entera.

Corolario.- Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ región y $f: U \to \mathbb{C}$ una función, con $f(z) = u(\theta, r) + i\, v(\theta, r)$ en su forma polar. Si se cumplen los sig:

- $f: U \to \mathbb{R}^2$ es de clase C^1
- se cumplen C-R polares

Entonces f es analítica en U.

Ejemplos.-

[illegible]

- z^n, es entera.

Dem.- Sea $f(z) = z^n = r^n \cos(n\theta) + i\, r^n \sin(n\theta)$ y $z = r\,\mathrm{cis}(\theta)$, entonces notemos que

$u(\theta, r) = r^n \cos(n\theta)$ y $v(\theta, r) = r^n \sin(n\theta)$ son de clase C^1

$\therefore$ y además $\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -r^n \sin(n\theta)\cdot n$

y $\dfrac{\partial v}{\partial r} = n \cdot r^{n-1} \sin(n\theta)$ y $\underline{\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -r\,\dfrac{\partial v}{\partial r}}$

También $\dfrac{\partial v}{\partial \theta} = r^n \cdot n \cos(n\theta)$ y $\dfrac{\partial u}{\partial r} = n \cdot r^{n-1} \cos(n\theta)$

$\Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial \theta} = r \cdot \dfrac{\partial u}{\partial r}$ $\therefore$ $f(z) = z^n$ es analítica $\forall z_0 \in \mathbb{C}$

$\therefore$ es entera

Además

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (r^n \cos(n\theta))}{\partial x} = n r^{n-1} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \cos(n\theta) - n r^{n} \sin(n\theta)\, \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= n r^{n-1} \left[\cos(n\theta)\cos(\theta) + n r^{n-1} \sin(n\theta)\sin(\theta) \right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial (r^n \sin(n\theta))}{\partial x} = i\, n r^{n-1} \left[\sin(n\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos(n\theta) \right]$$

$$\Rightarrow f'(z) = n r^{n-1} \left[\cos((n-1)\theta) + i \sin((n-1)\theta) \right]$$

$$= n z^{n-1}$$

- $f(z)=\bar{z}$ no es dif. en $\mathbb{C}$

Dem.- Tenemos que $f(z) = x - iy$ con $z = x+iy$

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$ y $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -1$ $\therefore$ $\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}$ $\therefore$ no cumple C-R

$\therefore$ no es diferenciable en $\mathbb{C}$

- ¿$f(z) = |z|^2$ es analítica en 0?

Tenemos que f es diferenciable en 0, pues

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z\to 0} \bar{z} = 0$$

$\therefore$ $f'(0)=0$.

Pero $\forall z_0 \neq 0$ $f'(z)$ no existe, pues, acercandonos por tz_0

$$\lim_{t\to 1^+} \frac{f(tz_0)-f(z_0)}{tz_0 - z_0} = \lim_{t\to 1^+} \frac{|tz_0|^2 - |z_0|^2}{tz_0 - z_0} = \lim_{t\to 1} \frac{(t^2-1)|z_0|^2}{(t-1)z_0}$$

$$= \lim_{t\to 1^+} (t+1)\bar{z}_0 = 2\bar{z}_0 \neq 0$$

pero si nos acercamos por la circunferencia con centro en el origen que pasa por $z_0 = re^{i\theta_0}$

$$\lim_{\theta\to\theta_0} \frac{|re^{i\theta}|^2 - |re^{i\theta_0}|^2}{re^{i\theta} - re^{i\theta_0}} = \lim_{\theta\to\theta_0} \frac{r^2 - r^2}{re^{i\theta} - re^{i\theta_0}} = 0$$

$\therefore$ el límite no existe y $\therefore$ no es diferenciable para $z \neq 0$

- La función exponencial e^z es entera.

Dem.- Tenemos que para $z = x+iy$, $e^z = e^x[\cos(y) + i\sin(y)]$

$= e^x\cos(y) + i e^x \sin(y)$

Y como $u(x,y) = e^x\cos(y)$, $v(x,y) = e^x\sin(y)$ son de clase C^1 $\Rightarrow$ $\forall z \in \mathbb{C}$, e^z es holomorfa en z $\therefore$ e^z es entera.

Escaneado con CamScanner

Def.- Sea $f: U \to \mathbb{C}$, U región. Decimos que U es un **Dominio de Analiticidad** si y solo si f es analítica en z, $\forall z \in U$

En varios momentos será útil saber los dominios de analiticidad de una función.

Ahora, recordemos que dado una función $f: U \to \mathbb{C}$, si f es diferenciable $\Rightarrow$ f es continua.
Así que una primera "aproximación" a un dominio de analiticidad es ver donde la función sea continua.

Obs.- Sea $\log: \mathbb{C} \to [y_0, y_0 + 2\pi)$ una rama del logaritmo, entonces no es continua en la recta te^{iy_0}, $t\geq 0$

Sea $z_n = (y_0 + r)e^{i(2\pi + y_0 - \frac{1}{n})}$, tenemos que $z_n \to y_0 + r$
pero $\lim_{n\to\infty} \log(z_n) = \lim_{n\to\infty} \log(y_0 + r) + i(2\pi + y_0 - \frac{1}{n})$

$$= \log(y_0 + r) + i(2\pi + y_0)$$

$\therefore$ $\log(z_n) \not\to \log(y_0 + r)$

$\therefore$ $\log$ no es continua, esto se puede hacer para cualquier rama.

$\therefore$ El dominio de continuidad de $\log$ es $\mathbb{C} - B_{y_0}$
donde $B_{y_0} = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = te^{iy_0}, t \geq 0 \}$

Proposición.- Sea $\log: \mathbb{C} \setminus B_{y_0} \to [y_0, y_0 + 2\pi)$, la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus B_{y_0}$. Entonces $\log$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus B_{y_0}$ y $\log(z)' = \frac{1}{z}$.

Dem.-

Consideremos su forma polar. Tenemos que dado $z = re^{i\theta}$
$\Rightarrow$ $\log(z) = \log(r) + i[\theta + 2\pi k]$, k t.q. $\theta + 2\pi k \in (y_0, y_0 + 2\pi$

$\therefore$ Tenemos que como $z \in \mathbb{C} \setminus B_{y_0}$ $\Rightarrow$ $z \neq 0$ $\Rightarrow$ $r \neq 0$

Entonces $U(\theta, r) = \log(r)$ y $V(\theta, r) = \theta$ son de clase C^1

Además $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}$ y $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 1$

$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \theta} = -r \frac{\partial V}{\partial r} \wedge \frac{\partial V}{\partial \theta} = r \frac{\partial U}{\partial r}$

$\therefore$ log es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus B_{y_0}$.

Con esto tendremos que $\frac{d}{dz}(\log(z)) = \frac{\partial}{\partial x}(\log(r)) + i \frac{\partial}{\partial x}(\theta)$

$= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + i \cdot 1 \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{r} \cdot \cos(\theta) + i \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{r}\sin(\theta)\right)$

$= \frac{1}{r}[\cos(\theta) - i\sin(\theta)] = \frac{r[\cos(\theta) - i\sin(\theta)]}{r^2}$

$= \frac{\overline{re^{i\theta}}}{r^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$. $\therefore \frac{d}{dz}(\log) = \frac{1}{z}$

Obs.- La rama principal del logaritmo con argumentos en $(-\pi, \pi)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus B_{-\pi}$, $B_{-\pi} = \{z \in \mathbb{C} : z = -t, t \geq 0\}$ que si la restringimos a $\mathbb{R}$ obtenemos la función ln de $\mathbb{R}$.

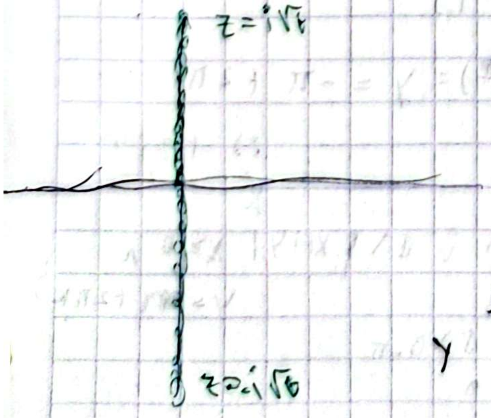
Ejemplo:

Encuentra el dominio de analiticidad para $f(z) = \log(z^2)$ con log la rama principal.

Sol.-

Como el dominio de analiticidad de log con la rama principal es $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z = -t, t \geq 0\}$ debemos encontrar los z's t.q. $z^2 \in B_{-\pi}$ pues ahí no sería analítica log.

Entonces, $z^2 \in B_{-\pi} \Leftrightarrow z^2 = -t$, $t \geq 0 \Rightarrow z = \pm i\sqrt{t}$



$\therefore z^2 \in B_{-\pi} \Leftrightarrow z = i \cdot c$, $c \in \mathbb{R}$.

Así como z^2 es holomorfa en $\mathbb{C} - \{z = ic\}$, $z^2 \in \mathbb{C} - B_{-\pi}$ y log es holomorfa en $\mathbb{C} - B_{-\pi}$ por la regla de la cadena

$\log(z^2)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{z = i \cdot c \mid c \in \mathbb{R}\}$

y además $f'(z) = \frac{1}{z^2} \cdot 2z = \frac{2}{z}$.

• Sabemos que

- Si $w \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \Rightarrow z^w$ es entera
- Si $w \in \mathbb{Z}^{-1} \Rightarrow z^w = \frac{1}{z^{-w}}$, es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Proposición.- Si se fija una rama del logaritmo, la función $f(z) = z^w$ es analítica en la región de analiticidad del logaritmo y $f'(z) = w z^{w-1}$

Dem.-
Como $z^w = e^{w\log(z)} = (g \circ h)(z)$ donde $h(z) = w\cdot\log(z)$
y $g(z) = e^z$.

Tenemos que $\log(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus B_{y_0}$, y como w es entera (constante) $\Rightarrow w\log(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus B_{y_0}$ y además como e^z es entera $\Rightarrow g\circ h$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus B_{y_0}$ $\therefore e^{w\log z} = z^w$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus B_{y_0}$ y además:

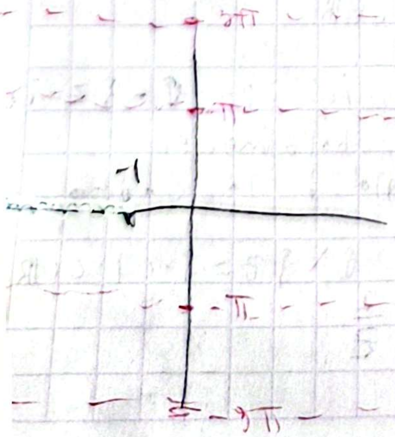
$$f'(z) = e^{w\log(z)}\cdot\left[0\cdot\log(z) + w\cdot\frac{1}{z}\right] = w z^{w-1}.$$

Ejemplo:

• Encuentra el dominio de analiticidad de $f(z) = \sqrt{e^z + 1}$ donde $z \to \sqrt{z}$ se define mediante la rama principal.

Sol: Como $z \to \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log(z)}$ está definida sobre la rama principal, tendremos que será holomorfa en $\mathbb{C}\setminus B_{-\pi}$
Así tenemos que encontrar donde $e^z + 1 \in B_{-\pi}$.

$e^z + 1 \in B_{-\pi} \iff e^z + 1 = -t$, $t \geq 0 \iff e^z + 1 \leq 0$ en $\mathbb{R}$
$\Rightarrow e^z \leq -1 \iff e^z = t$, con $t \leq -1$



$\Rightarrow |e^z| = e^x \geq 1$ y $\arg(e^z) = y = -\pi + 2\pi k$

$\iff x \geq 0$ y $y = -\pi + 2\pi k$ — es región X

$\therefore e^z + 1$ es holomorfa en $G = \mathbb{C}\setminus\{x+iy \mid x \geq 0 \wedge y = -\pi + 2\pi k\}$, $e^z + 1 \in \mathbb{C}\setminus B_{y_0}$
y $\sqrt{\ }$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus B_{-\pi}$
$\therefore$ por la regla de la cadena
$f(z)$ es holomorfa en G

y además $f'(z) = \frac{1}{2}(e^{z}+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{z}$.

Obs.- Sea $f: U \to \mathbb{C}$. Entonces f cumple las ecuaciones de C-R si y solo si cumple que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$ llamada la ec. de C-R en su forma compleja.

Dem.-

$\Rightarrow$ Sup. que f cumple C-R $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$\Rightarrow$ que si $f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i \frac{\partial u}{\partial y} = -i\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right)$

$= -i \frac{\partial f}{\partial y}$.

$\Leftarrow$ Sup. que $\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}$.

Demuestra que $\sin(\bar{z})$ no es holomorfa en ningún punto.

Dem: Sea $f(z) = \sin(\bar{z}) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(\bar{z}) \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \cos(\bar{z}) \cdot 1$

y $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(\bar{z}) \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = \cos(\bar{z}) \cdot (-i)$

$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} \neq -i \frac{\partial f}{\partial y}$ $\therefore$ no cumple C-R.

Transformaciones conformes

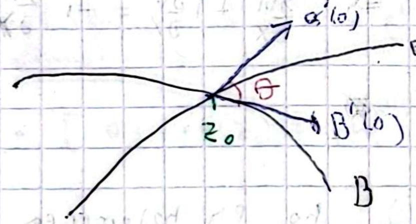
Def.- Una curva \ trayectoria en una región $U \subseteq \mathbb{C}$ es una función continua $\gamma: [a,b] \to U$ para algún intervalo $[a,b]$ en $\mathbb{R}$

Def.- Sean $\alpha, \beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ dos curvas diferenciables tales que $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$, y tales que $\alpha'(0) \neq 0$ y $\beta'(0) \neq 0$.

El angulo entre las curvas (en z_0) se define como el angulo el angulo entre sus vectores tangentes.

Si pensamos las curvas en $\mathbb{R}^2$ con su producto punto usual tenemos que

$$\cos \measuredangle(\alpha,\beta) = \cos \measuredangle(\alpha'(0), \beta'(0)) = \frac{\alpha'(0) \cdot \beta'(0)}{\|\alpha'(0)\| \, \|\beta'(0)\|}$$



Con notación compleja tendríamos que:
Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son las coordenadas de los vectores $\alpha'(0)$ y $\beta'(0)$ entonces sabemos que
$\alpha'(0) \cdot \beta'(0) = x_1 x_2 + y_1 y_2$

Si pensamos a estos vectores como numeros complejos tenemos que

$$\alpha'(0)\overline{\beta'(0)} = (x_1 + i y_1)(x_2 - i y_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_1 y_1 - x_2 y_2)$$

así: $$\cos \measuredangle(\alpha'(0), \beta'(0)) = \mathrm{Re}\left(\frac{\alpha'(0)\overline{\beta'(0)}}{|\alpha'(0)|\,|\beta'(0)|} \right)$$

Def.- Sea $f: \underset{\text{región}}{U} \to \mathbb{C}$, $\alpha, \beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subseteq \mathbb{C}$ dos curvas en U. Decimos que f es <u>conforme</u>, o que f preserva angulos si y solo si

$$\measuredangle(\alpha, \beta) = \measuredangle(f \circ \alpha, f \circ \beta)$$

Veremos que toda función analítica es conforme, para ello tenemos el sig. lema.

Lema.- Si $\gamma:[a,b]\to U\subseteq\mathbb{C}$ es una curva diferenciable y $f:U\to\mathbb{C}$ es analítica, ent. $f\circ\gamma$ es una curva diferenciable y además $(f\circ\gamma)'(t_0)=f'(\gamma(t_0))\,\gamma'(t_0)$ con $t_0\in[a,b]$.

Dem.- Análogo a la regla de la cadena

Teorema.- Sea $U\subseteq\mathbb{C}$ un conjunto abierto y $z_0\in U$ y $f:U\to\mathbb{C}$ analítica y sea $f'(z_0)\neq 0$.
Entonces f es conforme en z_0.

Dem.- La regla de la cadena implica que

$$(f\circ\alpha)'(0)=f'(\alpha(0))\cdot\alpha'(0)=f'(z_0)\,\alpha'(0)\neq 0$$

Análogamente

$$(f\circ\beta)'(0)=f'(\beta(0))\,\beta'(0)=f'(z_0)\,\beta'(0)\neq 0$$

De modo que podemos calcular $\measuredangle(f\circ\alpha,\beta\circ\alpha)$

$$\Rightarrow \cos\measuredangle(f\circ\alpha,\beta\circ\alpha)=Re\left(\frac{(f\circ\alpha)'(0)\,\overline{(f\circ\beta)'(0)}}{|(f\circ\alpha)'(0)|\,|(f\circ\beta)'(0)|}\right)$$

$$=Re\left(\frac{f'(z_0)\alpha'(0)\,\overline{f'(z_0)\beta'(0)}}{|f'(z_0)\alpha'(0)|\,|f'(z_0)\beta'(0)|}\right)$$

$$=\frac{|f'(z_0)|^2}{|f'(z_0)|^2}Re\left(\frac{\alpha'(0)\,\overline{\beta'(0)}}{|\alpha'(0)|\,|\beta'(0)|}\right)=Re\left(=\right)=\measuredangle(\alpha,\beta)$$

$\therefore$ es conforme.

Teorema.- f es conforme (en z_0) $\iff$ f es analitica (en z_0) y $f'(z_0) \neq 0$.

Ejemplos:

- $f(z) = e^z$ es conforme, pues es entera y $f'(z) = e^z \neq 0 \quad \forall z$

- $f(z) = z^2$.

Tenemos que $f'(z) = 2z \Rightarrow f'(z) = 0 \iff z = 0$

$\therefore$ no es conforme en $z = 0$.

Teorema de la Función Inversa

Recordemos este teorema pero correspondiente a $\mathbb{R}^2$

Teorema: Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $(x_0, y_0) \in U$ y $f: U \to \mathbb{R}^2$ una transformación de clase C^1 t.q.

$$\det(Df(x_0,y_0)) \neq 0$$

Entonces existen vecindades U' de (x_0,y_0) y V' de $f(x_0,y_0)$ donde está definida la inversa $f^{-1}: V' \to U'$; además f^{-1} es de clase C^1 y

$$Df^{-1}(f(x_0,y_0)) = (Df(x_0,y_0))^{-1}$$

para representar esta idea en $\mathbb{C}$, identificamos (x_0, x_0) con z_0 como de costumbre. Y suponemos que $f = u + iv$ es analítica y por tanto cumple C-R de modo que la matriz Df se ve como:

$$Df_{z_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

evaluada en z_0; observemos que el determinante de la última matriz es

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z_0)|^2$$

de modo que el determinante de Df_{z_0} es distinto de cero si y sólo si $f'(z_0) \neq 0$.

Ahora, sup. que Df_{z_0} es invertible ¿Qué forma tiene la matriz inversa?

Recordando que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

es decir la inversa tiene una forma análoga.

Teorema (De la función inversa $\mathbb{C}$). Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in U$ y $f: U \to \mathbb{C}$ una transformación analítica de clase C^1 tq $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existen vecindades U' de z_0 y V' de $f(z_0)$ donde existe $f^{-1}: V' \to U'$; además f^{-1} es analítica y

$$(f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Funciones armónicas

Apuntes de mi hermano detallado

Def.- Una función $u: V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^2 es armónica en V si y solo si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Teorema.- Sea $f: U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función con $f = u + iv$. f es analítica en $U \iff u, v$ son armónicas y satisfacen C-R.

Cálculo Integral

Una primera "extensión" de la noción de la integral podría ser la sig.

Def.- Sea $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ una función continua, la cual podemos escribir como $f(t)=u(t)+iv(t)$, donde u y v son funciones complejas de variable real. Entonces la integral de f sobre $[a,b]$ es el número complejo.

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt.$$

Proposición.- Son válidas las sig. afirmaciones:

(1) La integral es $\mathbb{C}$-lineal, i.e., $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{C}$ y $f,g:[a,b]\to\mathbb{C}$ continuas, se tiene que

$$\int_a^b (\lambda f(t)+\mu g(t))\,dt = \lambda\int_a^b f(t)\,dt + \mu\int_a^b g(t)\,dt.$$

(2) $\forall f:[a,b]\to\mathbb{C}$ continua se tiene que

- $\operatorname{Re}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t))\,dt$
- $\operatorname{Im}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \operatorname{Im}(f(t))\,dt$

(3) $\forall f:[a,b]\to\mathbb{C}$ continua se tiene

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Dem.-

(1) ✓

(2) Directo de la def.

(3) Se tendrá que $\int_a^b f(t)\,dt = re^{i\theta}$

$\Rightarrow \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = r = \operatorname{Re}(r) = \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta}\cdot re^{i\theta}\right)$

$= \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\right) = \operatorname{Re}\left(\int_a^b e^{-i\theta} f(t)\,dt\right)$

$= \int_a^b \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta} f(t)\right) \leq \int_a^b |e^{-i\theta} f(t)| = \int_a^b |f(t)|\,dt$ ⊠

Esta definición de integral nos recuerda la la definición de la integral de línea a lo largo de una curva, en este caso $[a,b]$.

Así podemos dar una def. similar a la vista en Cálculo II.

Def.- Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abto, $f: U \to \mathbb{C}$ una función continua en U y $\gamma: [a,b] \to U$ una curva de clase C^1 en $[a,b]$. Se define la integral de f a lo largo de γ como:

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)$$

Obs.- Podemos escribir la integral anterior de forma más explícita.

Consideramos $f = u + iv$ y $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ entonces llegaremos a que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b [u\,dx - v\,dy] + i[u\,dy + v\,dx]$$

con $u = u(\gamma(t))$ y $dx = x'(t)$
$v = v(\gamma(t))$ $dy = y'(t)$

Def.- Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abto, $f: U \to \mathbb{C}$ una función continua en U y $\gamma: [a,b] \to U$ una curva de clase C^1 en $[a,b]$.

La integral de f respecto de la longitud de arco $|dz|$ se define como:

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt.$$

Si $f \equiv 1$, la integral anterior queda:

$$\int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt := \mathrm{long}(\gamma)$$

donde $\mathrm{long}(\gamma)$ denota la longitud de la curva.

Obs.- De igual manera si identificamos $dz = dx + i y$

$\Rightarrow \int_\gamma f(z)|dz| = \int_a^b (u + iv)\sqrt{dx^2 + dy^2}$

Ejemplo.- Sea $f(z) = z^n$ y $\gamma(t) = e^{it}$ con $t \in [0, 4\pi]$
calcula $\int_\gamma f$

Sol.-
Tenemos que $\gamma'(t) = i e^{it}$, $\therefore$ γ es de clase C^1

$\Rightarrow \int_\gamma f = \int_0^{4\pi} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^{4\pi} (e^{it})^n \cdot i e^{it}\,dt$

$= \int_0^{4\pi} e^{int} \cdot i \cdot e^{it}\,dt = \int_0^{4\pi} i\, e^{it(n+1)}\,dt = i \cdot \dfrac{e^{it(n+1)}}{i t(n+1)}\Big|_0^{4\pi}$

$= \left[i \dfrac{e^{i(n+1)4\pi}}{i(n+1)} - \dfrac{e^{i(n+1)0}}{n+1} \right] = 0$

Proposición.- Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f: U \to \mathbb{C}$ función continua y $\gamma: [a,b] \to U$ una curva C^1. Entonces:

(1) Si $g: U \to \mathbb{C}$ es continua y $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$$\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))\,dz = \lambda \int_\gamma f(z)\,dz + \mu \int_\gamma g(z)\,dz$$

(2) Sea $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ partición de $[a,b]$. Si denotamos por $\gamma_i = \gamma|[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, n$ escribiremos $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$. En este caso:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz.$$

(3) Se tiene que $\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz|$

En particular si $|f(z)| \leq M$, $M \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq M \operatorname{long}(\gamma)$$

(4) La integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ no depende de la parametrización de la curva γ. Más precisamente sup. α: $t:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ una función C^1, biyectiva, t' $\Rightarrow \delta=\gamma\circ t:[\alpha,\beta]\to U$ es una parametrización de γ con la misma imagen. Entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\delta} f(z)\,dz.$$

Obs: La condición $t'>0$ nos dice que δ y γ recorren la curva en la misma dirección.

(5) Si denotamos por $-\gamma$ a la curva $-\gamma:[a,b]\to U$ tq $(-\gamma)(t)=\gamma(a+b-t)$, tiene la misma imagen pero recorrida en sentido contrario. ~~$(-\gamma)'(t)=-(\gamma)'(t)$~~, entonces

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$$

Dem:

(1) ✓

(2) ✓

(3) Tenemos que $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\right|$

$\leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt = \int_\gamma |f(z)|\,|dz|$

Si $|f(z)|\leq M \Rightarrow \left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \int_\gamma M\,|dz| = M\int_\gamma |dz| = M$ long (

(4) Se da por el T.C.V en $\mathbb{R}^2$.

(5) Sea $\alpha:[a,b]\to[a,b]$ dado por $\alpha(t)=a+b-t$

$\Rightarrow -\gamma=\gamma\circ\alpha$ y así por (4)

$\int_{-\gamma} f = \int_{\gamma\circ\alpha} f(z)\,dz = \int_a^b f((\gamma\circ\alpha)(t))\,(\gamma\circ\alpha)'(t)$

$= \int_a^b f(\gamma(a+b-t))\,\gamma'(a+b-t)\,(-1)\,dt = -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\,\gamma'(a$

Sea $s = a+b-t \Rightarrow ds = -dt$

$$\Rightarrow -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\,\gamma'(a+b-t)\,dt = -\int_b^a f(\gamma(s))\cdot\gamma'(s)\,(-ds)$$

$$= -\int_a^b f(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,ds = -\int_\gamma f(z)\,dz$$

Teo fund. cálculo para $\mathbb{C}$ – Si $f: U \to \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ región, continua y existe $g: U \to \mathbb{C}$ analítica tq $g' = f$, con $\gamma: [a,b] \to U$ curva C^1, entonces:

$$\int_\gamma f = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

En particular si γ es una curva cerrada $\Rightarrow \int_\gamma f = 0$

Dem.:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b g'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b (g\circ\gamma)'(t)\,dt = (g\circ\gamma)(b) - (g\circ\gamma)(a) = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) \checkmark$$

regla de la cadena

y si γ es curva cerrada $\Rightarrow \gamma(a) = \gamma(b) \Rightarrow \int_\gamma f = 0$.

Ejemplos:

• Sea γ el arco de circunferencia $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2,\ \arg(z) \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$. Pruebe que $\left|\int_\gamma \frac{z+4}{z^3-1}\,dz\right| \le \frac{6\pi}{7}$

Sol.:

parametrizando a γ tenemos que $\gamma(t) = 2e^{it}$, con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ es de clase C^1.

Veamos que $\frac{z+4}{z^3-1}$ es acotado.

En efecto $|z+4| \le |z| + 4 = 2+4 = 6$ y $|z^3 - 1| \ge ||z|^3 - |1||$ $= |2^3 - 1| = |7| = 7 \Rightarrow \frac{1}{|z^3-1|} \le \frac{1}{7}$

$$\Rightarrow \left|\frac{z+4}{z^3-1}\right| \le \frac{6}{7}$$

$$\therefore \left|\int_\gamma \frac{z+4}{z^3+1}\,dz\right| \le \frac{6}{7}\,\mathrm{long}(\gamma) = \frac{6}{7}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{|2ie^{it}|}_{|\gamma'(t)|}\,dt = \frac{6}{7}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 = \frac{6}{7}\pi$$

Sea $f: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z^2}$ y $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

calcula $\int_\gamma f$

Sol.- Tenemos que γ es de clase C^1 y además $F: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ dada por $F(z) = -\frac{1}{z}$ es analítica en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ y es t.q $F'(z) = \frac{1}{z^2}$

$\therefore \int_\gamma f(z)dz = 0.$

Proposición.- Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ región, $f: U \to \mathbb{C}$ función continua y $\gamma: [a,b] \to U$ una curva C^1 por partes.

Los sig: son equivalentes:

(1) $\exists F: U \to \mathbb{C}$ analítica t.q $F'(z) = f(z)$

(2) Si γ es curva cerrada $\Rightarrow \int_\gamma f = 0$

(3) La integral de f solo depende de los extremos de la curva; más precisamente si $\gamma_1, \gamma_2: [a,b] \to U$ son curvas tales que $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ y $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$

entonces $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$

Dem.-

1 ⟹ 2)

Sup. que $\exists F: U \to \mathbb{C}$ t.q $F'(z) = f(z)$ y γ es cerrada

$\Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt$

$= \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(\gamma(a)) - F(\gamma(a)) = 0.$

2 ⟹ 3)

Sup. que si γ es curva cerrada $\Rightarrow \int_\gamma f = 0$

y sean γ_1, γ_2 como las hipótesis.

Sea $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$, $\Rightarrow \gamma(a) = 0 \wedge \gamma(b) = 0$

$\Rightarrow \gamma$ es C^1 cerrada

$\therefore \int_\gamma f = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$

$3 \Rightarrow 1)$ Sup. (3). P.D $\exists F: U \to \mathbb{C}$ analítica tq $F'(z) = f(z)$.

Usaremos el hecho de que U es abto y convexo,
Sea $z_0 \in U$ fijo y definamos $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$.

Donde por abuso de notación, la integral de la derecha denota la integral a lo largo de cualquier curva que una z_0 con z pero por hip la integral no depende de la curva.
P.D F analítica
P.D F es de clase C^1 y cumple C-R

Sea $z \in U$ y $r > 0$ suficientemente pequeño, de modo que $D(z,r) \subseteq U$. En particular los puntos $z+h$ y $z+ih$ están en U $\forall h \in \mathbb{R}$ con $|h| < r$.

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\int_{z_0}^{z+h} f(z)\,dz - \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{z}^{z+h} f(z)\,dz = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(z+t)\,dt$$

Donde la integral de z a $z+h$ se toma a lo largo de un segmento horizontal $\gamma(t) = z+t$, $t \in [0,h]$.

Ahora aplicamos el T.V.M a las partes real e imaginaria de f, de modo que

$$\frac{1}{h} \int_0^h \mathrm{Re}(f(z+t))\,dt = \mathrm{Re}(f(z+h')) \quad \text{y}$$

$$\frac{1}{h} \int_0^h \mathrm{Im}(f(z+t))\,dt = \mathrm{Im}(f(z+h''))$$

con $|h'|, |h''| \leq |h|$. Cuando $h \to 0$, $h', h'' \to 0$ y como f es continua obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(z) = f(z)$$

Lo que implica que $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ son continuas.

De manera análoga $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ son continuas

$\Rightarrow u, v$ son $C^1 \Rightarrow F$ es C^1

y además $\frac{\partial F}{\partial y} = i\frac{\partial F}{\partial x} \Rightarrow$ cumple C-R $\therefore F$ es analítica

$\therefore F'(z) = \frac{\partial F}{\partial x} = f(z)$ ∎

Escaneado con CamScanner

Lema de Goursat.

El teorema de Cauchy (que veremos más adelante) establece condiciones para que $\int_\gamma f = 0$ a lo largo de una curva cerrada contenida en el dominio de f.
Las condiciones pueden establecerse sobre la curva o sobre la región U.

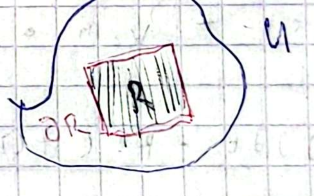
Antes de continuar recordemos lo que nos dice el teorema de Green:

Teorema de Green ($\mathbb{R}^2$): Sea γ una curva cerrada simple regular a trozos, orientada positivamente en el plano $\mathbb{R}^2$, y sea D la región delimitada por γ unión la propia γ. Sea $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ continuamente diferenciable, entonces:

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Teorema: Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f: U \to \mathbb{C}$ una función C^1 y R un rectángulo cerrado contenido en U. Entonces:

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$



Dem: Notemos que ∂R es una curva cerrada simple regular a trozos, entonces

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz \underset{\text{visto anteriormente}}{=} \int_{\partial R} u\,dx - v\,dy + i\int v\,dx + u\,dy$$

Y como $u(x,y)$, $v(x,y)$ son de clase C^1 (pues f lo es) $\Rightarrow$ por el Teorema de Green.

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\underset{C-R}{=} \iint_R -\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$= 0$$

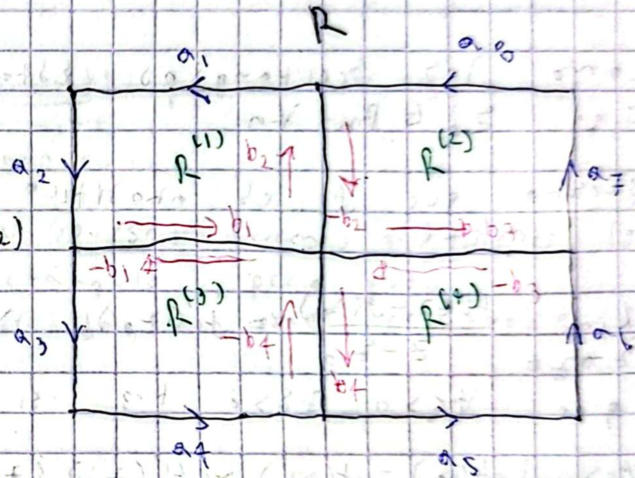
Esto último se obtiene ya que f C' $\Rightarrow$ f analítica. ∎

Este resultado es bueno pero se puede demostrar un mejor resultado, para el cual sólo requerimos que f sea analítica.

Lema de Goursat: Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abto, $f: U \to \mathbb{C}$ analítica y R un rectángulo cerrado contenido en U. Entonces

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$

Dem.- Observemos que



$\int_{\partial R} f = \int_{a_1+\dots+a_8} f$ pero

$a_1+a_2+\dots+a_8 = a_1+a_2+b_1+b_2+(-b_1)+(-b_2)$

$+ a_3+\dots+a_8$

$\Rightarrow \int_{\partial R} f = \int_{\partial R^{(1)}+(-b_1)+(-b_2)+a_3+a_4+\dots} f$

$= \int_{\partial R^{(1)}+\partial R^{(2)}+a_3+\dots+a_8} f$

$= \dots = \int_{\partial R^{(1)}+\dots+\partial R^{(4)}} f \Rightarrow \int_{\partial R} f = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial R^{(i)}} f\,dz$

$\Rightarrow \left| \int_{\partial R} f\,dz \right| \le \sum_{i=1}^{4} \left| \int_{R^{(i)}} f(z)\,dz \right|$ *

Todo esto si dividimos a R en 4 rectángulos más pequeños. Afirmamos que para alguno de estos rectángulos se cumple que

$$\frac{1}{4} \left| \int_{\partial R} f(z)\,dz \right| \le \left| \int_{\partial R^{(i)}} f(z)\,dz \right|$$

De no ser así habría una contradicción a *. Llamemos a dicho rectángulo R_1. Entonces

$$\left| \int_{\partial R} f(z)\,dz \right| \le 4 \left| \int_{R_1} f(z)\,dz \right|$$

Luego volvemos a dividir a R_1 en 4 rectangulos de igual tamaño y repetimos el argumento para obtener un rectangulo $R_2 \subset R_1$ tal que

$$\left|\int_{\partial R} f\right| \leq 4\left|\int_{\partial R_1} f\right| \leq 4^2\left|\int_{R_2} f\right|$$

Así obtenemos una sucesión de rectangulos anidados $R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_n \supset R_{n+1} \supset \cdots$ t.q

$$\left|\int_{\partial R} f\right| \leq 4^n\left|\int_{\partial R_n} f\right|$$

Como los rectangulos estan anidados entonces $\exists z_0 \in R$ t.q $z_0 \in R_n \; \forall n$

puesto que f es analitica en R, para z_0 existe el limite

$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$ y por definición esto implica que $\forall \varepsilon>0 \; \exists \delta>0$ t.q si $0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right|$

$\Leftrightarrow \; |f(z)-f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)| < \varepsilon$

Ahora afirmamos que

$$\int_{\partial R_n} f(z)\,dz = \int_{\partial R_n} f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)\,dz$$

En efecto, si $g(z) = -f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)$ entonces g tiene primitiva $G(z) = -f(z_0)z - f'(z_0)(z-z_0)^2\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int_{R} g(z) = 0$ pues R_n es curva cerrada.

$\Rightarrow \left|\int_{R_n} f(z)\right| \leq \int_{R_n} |f(z)-f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)| < \varepsilon \int_{R_n} |z-z_0|$

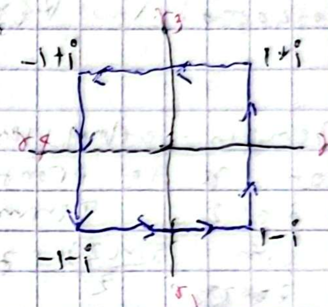
Si denotamos por d, d_n, p, p_n las magnitudes de las diagonales y los perimetros de R, R_n es facil ver que $2^n d_n = d$ y $2^n p_n = p$ de modo que

$\int_{\partial R_n} |z-z_0||dz| \le d_n p_n = \frac{1}{4^n} d p$, por tanto tenemos que

$$\left|\int_{\partial R} f(z)dz\right| \le 4^n \left|\int_{\partial R_n} f(z)\right| < \frac{4^n}{4^n}\varepsilon d p = \varepsilon d p$$

como lo anterior se vale $\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \int_{\partial R} f(z)dz = 0$ ■

Ejemplo: ¿Cuánto vale $\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z}dz$ si γ es ↺



tenemos que γ es C^1 por partes y
$\gamma = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} = \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i}\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}$$

La primera integral nos da $\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen}(-i+t)}{-i+t}dt$
Esto no se puede calcular explícitamente.

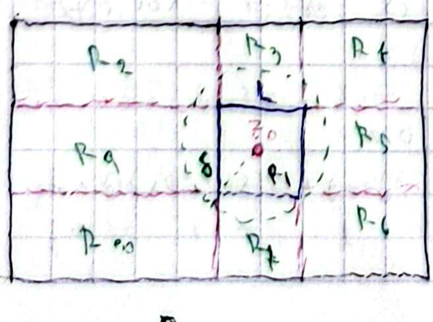
Si tratamos de usar el Lema de Goursat tenemos que ver si $\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}$ es analítica en el rectángulo, pero esto no es sencillo $(z=0)$ para poder dar con este resultado necesitamos un Lema mejorado.

Podemos permitirnos el lujo de que f deje de ser analítica en algunos puntos del interior de nuestro rectángulo con una condición adicional.

Lema de Goursat 2.0 (con moños). Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, R un rectángulo cerrado contenido en U, $z_0 \in \operatorname{int}(R)$ y $f: U\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ analítica t.q. $\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) = 0$ entonces:

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

Dem: Como $\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)=0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ t.q. si $0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)(z-z_0)|<\varepsilon$ i.e. $|f(z)| < \frac{\varepsilon}{|z-z_0|}$



R

Sea R_1 un cuadrado de lado ℓ centrado en z_0 t.q. $|z-z_0|<\delta$ $\forall z\in R_1$. prolongando los lados dividimos a R en 9 rectángulos para los cuales f es analítica $\therefore$ por el lema de Goursat $\int_{R_i} f = 0$ $i=2,\dots,9$

por lo que $\int_{\partial R} f = \int_{\partial R_1} f$. Tenemos entonces que

$$\left| \int_{\partial R} f(z)\,dz \right| \leq \int_{\partial R_1} |f(z)|\,|dz| < \int_{\partial R_1} \frac{\varepsilon}{|z-z_0|}\,|dz|$$

pero $\forall z \in R_1$, $|z-z_0| \geq \frac{L}{2}$ de modo que

$$\int_{R_1} \frac{\varepsilon}{|z-z_0|}\,|dz| < \varepsilon \cdot \frac{2}{L} \int_{\partial R_1} |dz| = \varepsilon \cdot \frac{2}{L} \cdot 4L = 8\varepsilon$$

y como es $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$ ∎

Ejemplo: volviendo al ejemplo anterior $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ con γ la frontera del rectángulo centrado en 0 y lado 2. Tenemos que $f(z)$ es analítica en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z}(z-0) = \lim\limits_{z \to 0} \sin(z) = 0$

$\therefore$ por el Lema de Goursat 2.0 $\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z} = 0$.

¡Goursat 2.1)

Corolario: Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abto, R un rectángulo contenido en U, $z_1, \dots, z_n \in \text{int}(R)$ y $f: U\setminus\{z_1, \dots, z_n\}$ una función analítica t.q. $\lim\limits_{z \to z_i} f(z)(z-z_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

entonces

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$

Ejemplos:

- Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abto y $R \subseteq U$ rectángulo cerrado, $z_0 \in \text{int}(R)$ y $f: U \to \mathbb{C}$ analítica. Definamos $g: U \to \mathbb{C}$ como:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

Obtenemos que g es analítica en $U\setminus\{z_0\}$ pues es el cociente de dos funciones analíticas, y $\lim\limits_{z \to z_0} g(z)(z-z_0) = 0$

Entonces por el Lema de Goursat 2.0

$$0 = \int_{\partial R} g(z)\,dz = \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-z_0} - f(z_0) \underbrace{\int \frac{dz}{z-z_0}}_{\neq 0}$$ de donde se puede

probar que $* = 2\pi i$ de modo que:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$ (caso particular de la formula integral de Cauchy)

Teorema de Cauchy

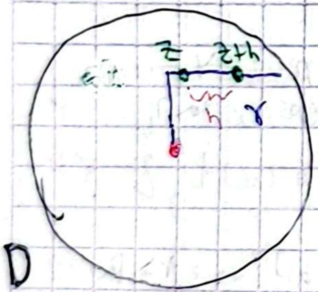
El lema de Goursat nos permite demostrar un importante resultado.

Teorema (Cauchy I.D): Sean $D \in \mathbb{C}$ disco abto y $f: D \to \mathbb{C}$ una función analitica. Entonces:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

para cualquier curva cerrada C^1 por partes contenida en D.

Dem.- Vamos a demostrar que existe $F: D \to \mathbb{C}$ t.q. $F'(z) = f(z)$, y con ello tendremos el resultado.



Sea $z \in D$. Definimos a $F(z)$ como la integral de f a lo largo de una curva γ, dada por la union de un segmento horizontal y uno vertical que unen el centro de D con z.

Con base en esta definición podemos calcular la derivada parcial de F respecto a z.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = \lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h}$$

La resta $F(z+h) - F(z)$ representa la integral de f a lo largo del segmento horizontal parametrizado por $\gamma_1(t) = z+t$, $t \in [0,h]$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(z) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(z)\,dz = \lim_{h \to 0}\frac{1}{h}\int_0^h f(z+t)\,dt = f(z)$$

en el ultimo paso aplicamos el teo. valor medio a la parte real e imaginaria de f.

Por el lema de Goursat, es equivalente definir F mediante una curva γ_2 formada por un segmento horizontal y uno vertical. Usando la curva $\gamma_2(t) = z+it$, $t\in[0,h]$ tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(z) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+ih)-F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_z^{z+ih} f(z)\,dz$$

$$= i \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h (f(z+it))\,dt = i f(z)$$

de donde obtenemos $\frac{\partial F}{\partial y}(z) = i \frac{\partial F}{\partial x}(z)$

$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(z) = -i \frac{\partial F}{\partial y}(z)$ que son las condiciones de C-R

~~y como F es C~~

Así F es C^1 y cumple C-R $\Rightarrow$ F es analítica por lo que $F'(z) = \frac{\partial F}{\partial x} = f(z)$

$\therefore \int_\gamma f(z) = 0$ para cualquier curva cerrada C^1 por partes contenida en D.

Ejemplo.- Sea γ_R la circunferencia de radio R y centro en z_0, orientada en sentido contrario al reloj. Calcula $\int_{\gamma_R} (z-z_0)^n\,dz$, $n\in\mathbb{N}$.

Sol.- Como $(z-z_0)^n$ es analítica en $D_r(z_0)$ $r>R$ por el Teo Cauchy 1.0 $\Rightarrow \int_{\gamma_R}(z-z_0)^n\,dz = 0$

Notemos que no necesitamos analizar si existía F t.q. $F'=f$ lo que es un avance a un teo visto anteriormente.

Podemos extender el Teo. de Cauchy usando las versiones 2.0 y 2.1 del Lema de Goursat.

Teorema (Cauchy 2.0).- Sean $D \subset \mathbb{C}$ disco abto, $z_0 \in D$ y $f: D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ una función analítica tq $\lim_{z \to z_0} f(z)(z-z_0) = 0$. Entonces

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

para cualquier curva cerrada C^1 por partes contenida en D que no pase por z_0.

Dem.- Seguimos un procedimiento completamente similar al anterior, basta encontrar F analítica tq $F'(z) = f(z)$. De hecho, definimos F como la integral de f a lo largo de una curva γ dada por una unión finita de segmentos horizontales y verticales que unen el centro de D (o para el mismo efecto cualquier punto fijo de D) con z sin pasar por z_0. Por el Lema de Goursat 2.0 cualquier curva de este tipo nos sirve ☺

Teorema (Cauchy 2.1) Sean $D \subset \mathbb{C}$ disco abto, $z_1, \dots, z_n \in D$ y $f: D \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \to \mathbb{C}$ analítica t.q. $\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_i) = 0$ $\forall i = 1, \dots, n$
$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\, dz = 0$

para toda curva cerrada C^1 por partes contenida en D que no pase por los puntos $z_1, \dots, z_n$.

Una aplicación de estos teoremas es la siguiente:

Proposición.- Sean $D \subset \mathbb{C}$ disco abto, $f: D \to \mathbb{C}$ analítica, $z_0 \in D$ y $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada C^1 por partes que no pase por z_0, entonces:

$$f(z_0) \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Dem.- consideremos la función $g: D \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

Entonces g satisface las condiciones del teorema de Cauchy 2.0. Es analítica en $D \setminus \{z_0\}$ y
$\lim_{z \to z_0} g(z)(z-z_0) = 0 \therefore$

$$0 = \int_\gamma g(z)\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} - f(z_0) \int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$$

$$\therefore f(z_0) \int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz \blacksquare$$

Notemos que ahora estamos muy interesados en las integrales del tipo

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$$

Con γ una curva cerrada C^1 por partes, para poder ver el valor de esta necesitamos algunas herramientas antes

3.4 El numero de vueltas

Obs.- Sea γ_R la circunferencia de radio R y centro z_0 orientado en sentido antihorario y que le da K vueltas a la circunferencia.

$\Rightarrow \gamma_R(t) = Re^{it} + z_0$, con $t \in [0, 2\pi K]$

$\Rightarrow \gamma'_R(t) = iRe^{it}$, así

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi K} \frac{1}{Re^{it}+z_0-z_0} \cdot iRe^{it}\, dt$$

$= \int_0^{2\pi K} i\, dt = 2\pi K i$ y observemos que $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{dz}{z-z_0} = K$ que es la cantidad de vueltas que se dan lo que motiva la sig. definición

Def.- Sean $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ una curva cerrada C^1 por partes y $z_0\in\mathbb{C}$ t.q. $z_0\notin\gamma$. El número de vueltas (o índice) de γ con respecto a z_0 está definido como:

$$n(\gamma,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$$

Teorema.- Sean $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ una curva cerrada C^1 por partes y z_0 t.q. $z_0\notin\gamma$, entonces $n(\gamma,z_0)$ es entero.

Dem.- Sea $g(t)=\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z_0}\,ds$

En los puntos donde $\gamma'(s)$ existe, tenemos que $g'(t)=\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}$

así $\frac{d}{dt}\left[e^{-g(t)}(\gamma(t)-z_0)\right]=0$ (esto se puede comprobar haciendo cuentas, y se cumple donde $g'(t)$ existe.

Así: $e^{-g(t)}[\gamma(t)-z_0]$ es constante por partes en $[a,b]$ por continuidad, es constante en $[a,b]$. por lo que

$$e^{-g(a)}(\gamma(a)-z_0)=e^{-g(b)}(\gamma(b)-z_0)$$

y como γ es cerrada $\Rightarrow$ $\gamma(a)=\gamma(b)$. Esto implica que $e^{-g(a)}=e^{-g(b)}$ y como $g(a)=0$ $\Rightarrow$ $e^{-g(b)}=1$ $\therefore$ $g(b)=2\pi i k$ p.a $k\in\mathbb{Z}$, i.e

$$n(\gamma,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z_0}ds=\frac{g(b)}{2\pi i}=k\in\mathbb{Z}\ \blacksquare$$

Con esta definición del número de vueltas podemos enunciar la fórmula integral de Cauchy.

Proposición (Fórmula integral de Cauchy).- Sean $D\subset\mathbb{C}$ disco abierto, $f:D\to\mathbb{C}$ una función analítica, $z_0\in D$ y γ curva cerrada, C^1 por partes, contenida en D t.q. $z_0\notin\gamma$. Entonces

$$n(\gamma,z_0)f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

Dem.- Corolario de la demostración que vimos en la sección anterior

La aplicación más usual de esta fórmula es cuando $n(\gamma, z_0) = 1$, Bajo esta hipótesis tenemos

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Ejemplo.- Sea γ una circunferencia con centro en z_0 y recorrida una sola vez (en sentido positivo), en forma explícita, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt$$

Lo cual nos dice que z_0 es una especie de promedio de los valores de f en una circunferencia con centro z_0 y radio arbitrario.

Propiedades $n(\gamma, z_0)$

(1) $n(-\gamma, z_0) = -n(\gamma, z_0)$

Dem.- $n(-\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = -n(\gamma, z_0)$

(2) Si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ son curvas cerradas y $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ entonces $n(\gamma, z_0) = \sum_{i=1}^{n} n(\gamma_i, z_0)$

Dem.-

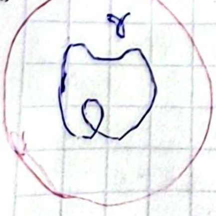
$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} \frac{dz}{z - z_0} = \sum_{i=1}^{n} n(\gamma_i, z_0)$$

Proposición.- Sean $D \subset \mathbb{C}$ disco abierto, $\gamma \subseteq D$ curva cerrada C^1 por partes y $z_0 \notin D$. Entonces $n(\gamma, z_0) = 0$

Dem.- Como $z_0 \notin D$, la función $\frac{1}{z - z_0}$ es analítica en $D \Rightarrow$ por el teo. de Cauchy como la función es analítica en un disco $\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz = 0$ para cualquier curva cerrada C^1 por partes

$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{z - z_0} = 0 = n(\gamma, z_0)$.

z_0



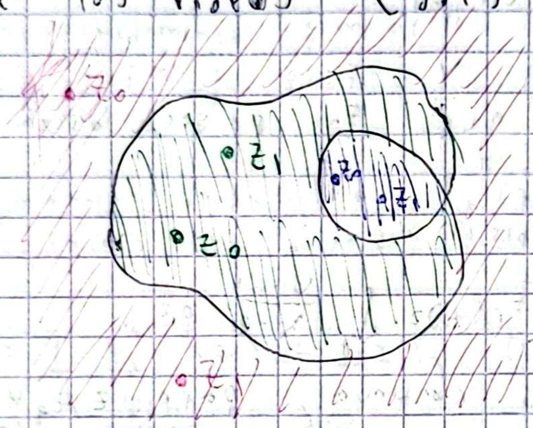
* Si la curva no es simple se puede auto intersectar.

Escaneado con CamScanner

Proposición.- Sea γ curva cerrada C^1 por partes. Sean z_0, z_1 puntos distintos en el mismo componente conexo del complemento de γ. Entonces:

$$n(\gamma, z_0) = n(\gamma, z_1)$$

Dem.- Esta en los videos (9.4)



γ da las mismas vueltas para z_0 que para z_1.

Corolario.- Sea γ curva cerrada C^1 por partes y U_∞ la componente conexa del complemento de γ no acotada. Entonces $\forall z_0 \in U_\infty$ $n(\gamma, z_0) = 0$

Dem.- Si $\gamma \subseteq D$ y $z_1 \notin D \Rightarrow n(\gamma, z_1) = 0$ $\therefore$ $n(\gamma, z_0) = 0$

Con todo esto recordemos la fórmula integral de Cauchy que nos dice que:

$$n(\gamma, z_0)\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Ahora lo que haremos será pensar que z_0 varía en D y en ese caso podremos verlo como una función, siendo su análogo en el caso de $\mathbb{R}$ quisiéramos derivar de alguna manera, por lo que se desprenden los siguientes resultados.

Formula Integral de Cauchy

Lema.- Sean $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ una curva cerrada, C^1 por partes y φ una función continua en los puntos de γ. Entonces la función:

$$F_n(z)=\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z)^n}\,dw \quad , \quad z\notin\gamma$$

Es analítica en $\mathbb{C}\setminus Im(\gamma)$ y $F_n(z)'=nF_{n+1}(z)$
Esto implica a su vez que F_n posee derivadas analíticas de todos los ordenes

Dem.- Por inducción sobre n

- Para $n=1$ tenemos $F_1(z)=\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-z}\,dz$.

Veamos primero que F_1 es continua. Para $z, z_0\notin\gamma$ tenemos que

$$F_1(z)-F_1(z_0)=\int_\gamma \varphi(w)\left(\frac{1}{w-z}-\frac{1}{w-z_0}\right)dw=(z-z_0)\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z)(w-z_0)}\,dw$$

Como $z_0\notin\gamma[a,b]$ y $\gamma[a,b]$ es compacto $\Rightarrow$ existe $\delta=\min\limits_{t\in[a,b]}|\gamma(t)-z_0|>0$. Además si $|z-z_0|<\delta/2$ tenemos que $|\gamma(t)-z|\geq\delta/2$ $\forall t\in[a,b]$

Como φ es continua en γ, existe M t.q. $|\varphi(z)|\leq M$

Juntando esta información tenemos

$$|F_1(z)-F_1(z_0)|\leq|z-z_0|\frac{2M}{\delta^2}\,long(\gamma)$$

Lo que implica que F_1 es continua en z_0. Observemos que además tenemos:

$$\frac{F_1(z)-F_1(z_0)}{z-z_0}=\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z)(w-z_0)}\,dw=\int_\gamma \frac{\phi(w)}{w-z}\,dw$$

siendo $\phi(w)=\frac{\varphi(w)}{w-z_0}$. Como ϕ es continua en los puntos de γ, esta expresión es continua en z_0 de modo que

$$F_1'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{F_1(z) - F_1(z_0)}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w - z_0}\, dw = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w - z_0)^2} = F_2(z_0)$$

Sup. que se cumple para $F_{n-1}(z)$, i.e. $F_{n-1}'(z)$ existe y $F'_{n-1} = (n-1) F_n(z)$

"Se hace un procedimiento similar"

$\therefore$ $F_n'(z) = n F_{n+1}(z)$

Además de manera inductiva $F_n''(z) = (n F_{n+1}(z))' = n(n+1) F_{n+2}(z)$ y así existirán todas las derivadas de orden superior.

Obs.- $F_1^{(n)}(z) = 1 \cdot F_2^{(n-1)}(z) = 1 \cdot 2\, F_3^{(n-2)}(z) = \cdots = n!\, F_{n+1}(z)$

$\Rightarrow$ $F_1^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w - z)^{n+1}}\, dw$

Como consecuencia y para ilustrar una aplicación de este Lema, con el podemos demostrar (nuevamente) que el número de vueltas es una función localmente constante.

Corolario.- Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada C^1 por partes. Si $F(z) = n(\gamma, z)$, entonces $F'(z) = 0$ $\forall z \notin \operatorname{Im}(\gamma)$.

Dem.-
Haciendo $\varphi(w) \equiv 1$ tenemos que $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w - z}\, dw$

y por el lema anterior $F'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{(w - z)^2}$
dado que $g(z) = -\frac{1}{w-z}$ es t.q. $g'(z) = \frac{1}{(w-z)^2}$

$\Rightarrow$ $F'(w) = 0$, y así F es localmente constante.

Escaneado con CamScanner

Teorema.- (Fórmula Integral de Cauchy para derivadas)

Sea $f: U \to \mathbb{C}$, U-región, una función analítica en U. Entonces $\forall z_0 \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ $\exists$ la n-ésima derivada de $f^{(n)}(z_0)$ y está dada por la fórmula integral:

$$n(\gamma, z_0)\, f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

donde γ es una curva cerrada, C^1 por tramos contenida en un disco D con centro z_0 contenido en U.

Dem.- Sea $F_n(z_0) = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}\, dz$ ent. por el Lema anterior con $\varphi(z) = f(z)$ tenemos que F_n es analítica en z_0 y $F_n'(z_0) = n\, F_{n+1}$

$\Rightarrow F_1^{(n)}(z_0) = n!\, F_{n+1}(z_0)$

pero $F_1(z_0) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$ y por la F.I. de Cauchy tenemos que $n(\gamma, z_0)\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}$

$\Rightarrow F_1(z_0) = 2\pi i\, n(\gamma, z_0)\, f(z_0)$

$\therefore 2\pi i\, n(\gamma, z_0)\, f^{(n)}(z_0) = n! \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz.$

$\therefore n(\gamma, z_0)\, f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz.$

Obs.- Esto es muy útil pues nos permite calcular integrales del tipo [illegible] $\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}$

Ejemplos.-

- Calcular $\int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\, dz$

consideremos $f(z) = e^{2z}$, sabemos que es analítica en $\mathbb{C}$ en particular en $D_4(-1)$.

De esta manera como $D_3(-1) \subseteq D_4(-1) \subseteq \mathbb{C}$

$\Rightarrow \int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} = \int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{[z-(-1)]^{3+1}} = n(\gamma, -1)\, f^{(3)}(-1) \cdot \frac{2\pi i}{3!}$

$$= 1 \cdot 8 e^{2(-1)} \cdot \frac{2\pi i}{3!} = 8 e^{-2} \frac{2\pi i}{3!} = \frac{8\pi i}{3 e^2}$$

- Calcular $\int_{|z|=3} \frac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}$

Notemos que $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$

$$\Rightarrow I = \int_{|z|=3} \frac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2} - \int_{|z|=3} \frac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-1}$$

Ahora sea $f(z) = \operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)$ sabemos que $f(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow I_1 = n(\gamma, 2)\, f^{(0)}(2) \frac{2\pi i}{0!} \quad \wedge \quad I_2 = n(\gamma, 1)\, f^{(0)}(1) \frac{2\pi i}{0!}$$

$$\Rightarrow I = [f(2) - f(1)] \frac{2\pi i}{0!} = [1 - (-1)]\, 2\pi i = 4\pi i$$

- Demostrar que $\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta)\, d\theta = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot 2\pi$

$$= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot 2\pi$$

Sea $z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = iz\, d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{1}{iz} dz$ y además

$\cos(\theta) = \frac{1}{2}[e^{i\theta} + e^{-i\theta}] = \frac{1}{2}[z + z^{-1}]$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta)\, d\theta = \int_{|z|=1} \left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^{2n} \frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{1}{2^{2n} i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z}\left[z + \frac{1}{z}\right]^{2n} dz = \frac{1}{2^{2n} i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-k} \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2^{2n} i} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_{|z|=1} \frac{1}{z} z^{2n-2k} = \frac{1}{2^{2n} i} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_{|z|=1} z^{2n-2k-1}$$

Pero si $2n - 2k - 1 = -1 \Rightarrow 2k = 2n \Rightarrow k = n$

Entonces si $k \neq n$, $z^{2n-2k-1} \neq z^{-1}$ y así es analítica $\therefore \int_{|z|=1} z^b = 0$ con $b \neq -1 \Rightarrow$

$$I = \frac{1}{2^{2n} i} \binom{2n}{n} \int_{|z|=1} z^{-1}\, dz \qquad \text{y} \quad \int_{|z|=1} z^{-1} = \int_{|z|=1} \frac{1}{z-0} = \frac{2\pi i}{0!} \cdot 1 \cdot 1 = 2\pi i$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}2\pi = \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!\,n!}2\pi = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}2\pi.$$

Con los resultados vistos podemos obtener otros dos importantes. El primero es el recíproco del Teo. de Cauchy.

Teorema.- (Morera) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ región, $f: U \to \mathbb{C}$ función continua t.q. $\int_\gamma f(z) = 0$ $\forall \gamma$ curva cerrada, C^1 por partes. Entonces f es analítica en U.

Dem.- Si $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para toda curva γ cerrada C^1 por partes contenida en U ent. existe $F: U \to \mathbb{C}$ analítica t.q. $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in U$ (por una proposición vista anteriormente (mucho))
Entonces tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $F^{(n)}(z)$ así en particular $F'(z) = f'(z)$ existe $\forall z \in U$
$\therefore f$ es analítica.

Ejemplo.-

Consideremos $f(z) = \frac{1}{z^2}$. Se tiene que $\int_\gamma \frac{1}{z^2}\,dz = 0$ $\forall$ curva γ cerrada C^1 por partes que no pase por cero, pero $f(z)$ no es analítica.
¿Contradice Morera? No, pues si $D_r(0)$, entonces $g: D_r(0) \to \mathbb{C}$ no es continua.

Teorema (Liouville) Sea f una función entera y acotada $\Rightarrow$ f es constante.

Dem.- Usaremos la F.I.C para mostrar que $f'(z_0) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Como f es entera $\Rightarrow$ analítica en $\mathbb{C}$ y como f es acotada $\exists M \geq 0$ t.q. $|f(z)| \leq M$

En este caso γ es una circunferencia de radio R suficientemente grande. Ent. $n(\gamma, z_0) = 1$
y $|f'(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right| \leq \frac{1}{|2\pi i|}\int_\gamma \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^2}|dz|$

Como $|f(z)| \leq M \Rightarrow |f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{M}{R^2} |dz| = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} \operatorname{long}(\gamma)$

$= \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{M}{R}$

$\Rightarrow |f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}$ lo que tiende a cero cuando $R \to \infty$ (pues f está definida en todo $\mathbb{C}$), de modo que $|f'(z_0)| = 0$ $\Rightarrow f'(z_0) = 0$. $\forall z_0 \in \mathbb{C}$ $\therefore$ f es constante.

Teorema Fundamental del Álgebra

Todo polinomio de grado mayor o igual a 1, con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

Dem.- Sea $P(z)$ con $\operatorname{grad}(P) \geq 1$ y $P(z) \in \mathbb{C}[z]$.
Por contradicción supongamos que $P(z)$ no tiene raíces en $\mathbb{C}$, i.e, $P(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Entonces $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ es analítica en $\mathbb{C}$. Veamos que f también es acotada.

Como $\operatorname{grad}(P) \geq 1$, $\Rightarrow \lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{P(z)} = 0$

De modo que fijando $\varepsilon > 0$ $\exists R > 0$ t.q. $|f(z)| < \varepsilon$ $\forall |z| > R$. Por otro lado como el disco cerrado $|z| \leq R \sim \overline{D_R(0)}$ es compacto y $|f(z)|$ es continua $\Rightarrow$ alcanza su máximo M en este. Sea $M' = \max\{\varepsilon, M\}$. Con esto tendremos que $|f(z)| \leq M'$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Por tanto f es entera y acotada $\Rightarrow$ por el teorema de Liouville, f es constante $\therefore$ $P(z)$ es constante.

Lo cual contradice que $\operatorname{grad}(P) \geq 1$ $\therefore$ $P(z)$ tiene una raíz en $\mathbb{C}$. ■

Para cerrar esta sección, veamos una consecuencia más de la fórmula integral de Cauchy. Recordemos que la condición $\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = 0$ que pedimos en el Lema de Goursat 2, en aquel entonces vimos que esta condición se satisface por ejemplo, si f es continua en z_0. Pero podemos decir más. Regresemos a la fórmula integral de Cauchy, suponiendo que $n(\gamma, z_0) = 1$ tendremos que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (*)$$

podemos notar que el punto z_0 no tiene nada de especial:
La función (X) es analítica para cualquier z_0, con tal de que no caiga en la curva γ. Así podemos usar la fórmula para definir $f(z_0)$, en caso de que no existiera, para obtener una función analítica inclusive en z_0.

Def.- Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abto, $z_0 \in U$ y $f: U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ analítica. Decimos que z_0 es una singularidad removible de f si y solo si

$$\lim_{w \to z_0} f(w)(w - z_0) = 0$$

Proposición.- Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abto y $z_0 \in U$ y $f: U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ analítica. z_0 es una singularidad removible de f si y solo si existe una función analítica $F: U \to \mathbb{C}$ t.q. $F(z) = f(z)$ $\forall z \in U \setminus \{z_0\}$

Dem.-

$\Rightarrow$) Sup. que existe dicha función, entonces F es continua en $z_0 \Rightarrow \lim_{z \to z_0} F(z)(z - z_0) = 0$

pero $\lim_{z \to z_0} F(z)(z - z) = \lim_{\substack{z \neq z_0 \\ z \to z_0}} f(z)(z - z_0)$

$\Leftarrow$) Sup. que $\lim_{w \to z_0} f(w)(w - z_0) = 0$ ~~podemos~~

para definir a F basta ver que ocurre cerca de z_0, de modo que, consideramos una circunferencia γ con centro en z_0, recorrido en sentido antihorario tal que tanto γ como su interior estén contenidos en U y un punto $z \neq z_0$ en el interior de γ (Esto se puede pues U es abto)

$\therefore$ por la F.I.C tenemos que $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw$

por lo que vistas anteriormente sabemos que el lado derecho define una función analítica en todo $\operatorname{int}\gamma$, incluyendo z_0. Por tanto definimos a F como

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \neq z_0 \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z_0}\,dw & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

La unicidad de esta extensión es clara pues F debe ser continua en z_0.

3.6 Principio del módulo máximo

Como otra aplicación notable de la formula integral de Cauchy, veremos resultados importantes acerca de los máximos y mínimos de una función.

Teorema.- Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ región y $f: U \to \mathbb{C}$ analítica. Si el módulo $|f(z)|$ alcanza su máximo en $z_0 \in \operatorname{int}(U)$, entonces, f es constante.

Dem.- Primero mostremos que f es constante en un disco abierto con centro en $z_0 \in U$ contenido en U.

Sea $D \subseteq U$ disco abierto. Si $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ es una circunferencia contenida en D tenemos que, por la F.I.C.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{re^{it}} \cdot rie^{it}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\,dt$$

$$\Rightarrow |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{it})|\,dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|\,dt$$

$$= |f(z_0)|$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)| - |f(z_0+re^{it})|\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} |f(z_0)| - |f(z_0+re^{it})|\,dt = 0$$

Escaneado con CamScanner

Pero como f es continua y e^{it} es continua entonces $|f(z_0)| - |f(z_0+re^{it})|$ es continua y positiva $\therefore$ $|f(z_0)| - |f(z_0+re^{it})| = 0$

$\Rightarrow$ $|f(z_0)| = |f(z_0+re^{it})|$ y como es $\forall r > 0$
$\Rightarrow$ $|f(z)|$ es constante en D.

Y como f es analítica $\Rightarrow$ f es constante en D.

$\therefore$ $\forall D$ disco contenido en U, que contenga a z_0 ... tendrá que f es constante.

Así podemos proceder de manera análoga con cualquier punto z t.q. $f(z) = f(z_0)$, con lo que el conjunto

$$\{z \in U \mid f(z) = f(z_0)\} \neq \emptyset$$

es abierto en U ... Libro lo demos.

Corolario.- Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ región acotada y $f: \bar{U} \to \mathbb{C}$ una función tal que es analítica en U y continua en ∂U.
Entonces el módulo $|f(z)|$ de f alcanza su máximo en algún $z_0 \in \partial U$.

Dem.- Como f es continua en el compacto $\bar{U} = U \cup \partial U$, $|f(z)|$ alcanza su máximo.

Si lo alcanza en algún punto de ∂U no hay nada que probar.

Sup. que $|f(z)|$ alcanza su máximo en $z_0 \in U$.
Por el resultado anterior, f es constante en U.
Por continuidad f es constante en $\bar{U}$, de modo que $|f(z)|$ alcanza su máximo en algún punto (de hecho en todos) de ∂U $\square$

Obs 1.- El principio del modulo maximo no se cumple si cambiamos "maximo" por "minimo".

Sean $\operatorname{sen}(z)$ en U, donde $U = B_{\frac{\pi}{2}}(0)$.

$\Rightarrow |\operatorname{sen}(z)| = 0$ en $z=0$, i.e., alcanza su minimo en U pero no es constante.

Obs 2.- El corolario no se cumple si U no es acotado.

Veamos cuando se cumple para el minimo.

Proposición (Principio del minimo) Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ region, $f: U \to \mathbb{C}$ analitica y $f(z) \neq 0$ $\forall z \in U$. Si $|f|$ alcanza su minimo en U entonces f es constante.

Dem.- Sea $z_0 \in U$ el minimo de $|f|$
$\Rightarrow 0 < |f(z_0)| \leq |f(z)|$ $\forall z \in U$ $\Rightarrow \frac{1}{|f(z_0)|} \geq \frac{1}{|f(z)|}$

defino $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ $\rightarrow$ g es analitica en U y alcanza su maximo en $z_0 \in U$ $\Rightarrow$ g es constante $\Rightarrow$ f constante.

Corolario.- Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ region y $f: U \to \mathbb{C}$ función analitica en U y continua en ∂U. Si ademas $f \neq 0$ $\forall z \in \partial U$, entonces el modulo $|f(z)|$ alcanza su minimo en algun $z_0 \in \partial U$.

Dem.- Mismo truco, tomar $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ alcanza su maximo en ∂U $\Rightarrow$ f alcanza su minimo en ∂U.

Lema (Schwarz) Sean $D = D(0,1)$ el disco unitario y $f: D \to \mathbb{C}$ función analitica con $|f(z)| \leq 1$ y $f(0) = 0$. Entonces:

- $|f(z)| \leq |z|$ $\forall z$
- $|f'(0)| \leq 1$

Si ademas tenemos que $|f(z_0)| = |z_0|$ p.a $z_0 \in D \setminus \{0\}$ o bien $|f'(0)| = 1$ $\Rightarrow$ $f(z) = c \cdot z$ p.a $c \in \mathbb{C}$ t.q $|c| = 1$.

Escaneado con CamScanner

Dm.- Sea $g: D \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$

La cual es analítica en todo D. Entonces tomando $z_0 = 0$ tendremos:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Nos fijamos en $g|_{\overline{D(0,r)}}$ con $r < 1$.
Si $|z| = r$ entonces $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}$ por tanto

$|g(z)| \leq \frac{1}{r} \quad \forall |z| \leq r$

Si $r \to 1$ entonces $|g(z)| \leq 1 \Rightarrow |f(z)| \leq |z|$. y $|f'(0)| \leq 1$

Ahora:

- Si $|f(z_0)| = |z_0|$ p.a $z_0 \in D \setminus \{0\}$ entonces $|g(z_0)| = 1$ y $\max |g|$ se alcanza en un punto interior de D. $\Rightarrow g(z) = c$ p.a $c \in \mathbb{C}$. Es claro que $|c| = 1$

- Si $|f'(0)| = 1 \Rightarrow |g(0)| = 1$ y el máximo del módulo de g se alcanza en $z=0$ de donde g nuevamente es constante ($\frac{f(z)}{z} = c \Rightarrow f(z) = c \cdot z$)

Teorema de Cauchy Homotópica

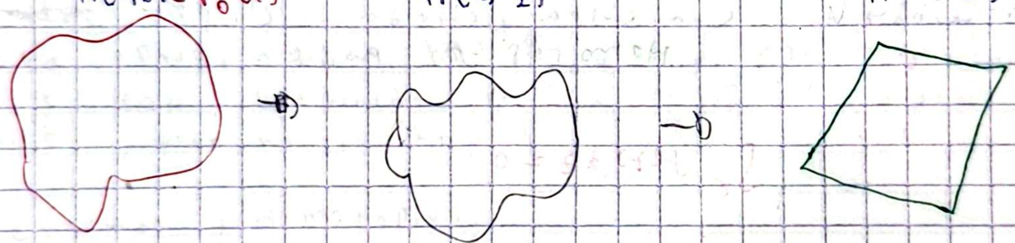
Recordando el Teo. de Cauchy nos dice que si f es analítica en un disco entonces $\int_\gamma f\,dz = 0$.

Extenderemos este teorema a regiones más generales. Comenzaremos con la versión Homotópica.

Def: Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ dos curvas continuas en una región $U \subseteq \mathbb{C}$. Una Homotopía entre γ_0 y γ_1 en U es una transformación continua $H : [a,b] \times [0,1] \to U$ con las sig. propiedades:

- $H(t,0) = \gamma_0(t) \quad \forall t \in [a,b]$
- $H(t,1) = \gamma_1(t) \quad \forall t \in [a,b]$

Cuando existe tal homotopía decimos que las curvas γ_0, γ_1 son homotópicas.



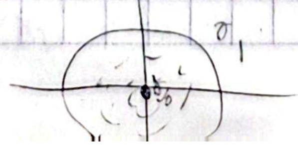
"Transformamos una curva en la otra"

En el estudio de este curso, integramos sobre curvas cerradas, C^1 por partes, de modo que pediremos unas hipótesis adicionales.

- Si las curvas γ_0, γ_1 son cerradas pediremos que las curvas γ_s sean cerradas.
- pediremos que cada γ_s sea C^1 por partes.

Ejemplo.- Consideremos la circunferencia unitaria $\gamma_0(t) = e^{it}$ y la curva constante $\gamma_1(t) = 0$, $t \in [0,2\pi]$.

Entonces ambas curvas son homotópicas, pues $H(t,s) = (1-s)e^{it}$, $(t,s) \in [0,2\pi] \times [0,1]$ es una homotopía



Def.- Una región $U \subseteq \mathbb{C}$ es simplemente conexa si y solo si toda curva cerrada $\gamma:[a,b] \to U$ es homotópica a un punto en U.

Teorema de Cauchy (Homotópica).- Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ región, $f: U \to \mathbb{C}$ analítica y $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ curvas cerradas C^1 por tramos, homotópicas en U, entonces

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

Dem:- Libro Loscuraín y notas Oscar.

Corolario.- Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ región, $f: U \to \mathbb{C}$ analítica en U y $\gamma:[a,b] \to U$ una curva cerrada, C^1 por ~~tramos~~ partes. Si γ es homotópica a un punto en U, entonces:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Dem:- En efecto, como γ es homotópica a un punto $z_0 \in U$, tomamos $\gamma_1(t) = z_0$, $t \in [a,b]$ $\Rightarrow \exists H$ homotopía entre γ_1 y γ $\Rightarrow$ por el T.C.H.

$$\int_{\gamma} f = \int_{z_0} f = \int_a^b f(z_0)\cdot z_0'\,dz = 0.$$

Corolario: Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ región simplemente conexa de $\mathbb{C}$ y $f: U \to \mathbb{C}$ una función analítica en U. Entonces

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

$\forall \gamma$ curva cerrada C^1 por partes contenida en U.

Corolario.- Sea U región simplemente conexa de $\mathbb{C}$ y $f: U \to \mathbb{C}$ analítica. Entonces $\exists F: U \to \mathbb{C}$ t.q. $F' = f$.

Ejemplos.-

- Calcula $\int_\gamma f$ donde $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ y $f(z) = \frac{1}{z^2 - \frac{1}{4}}$

Sol.- ~~No podemos usar el teorema de Cauchy directamente, pues~~

Tenemos que f es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$.

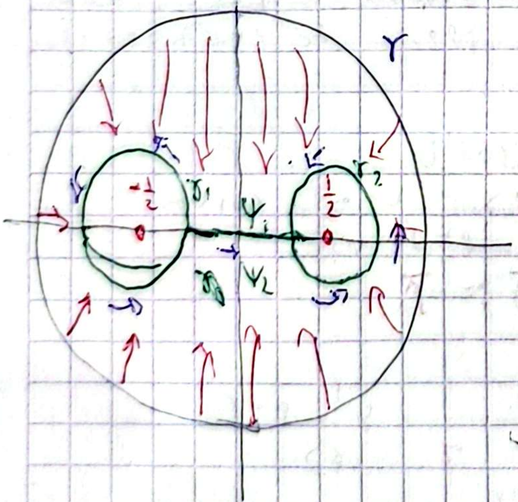
No podemos usar el Teorema de Cauchy, pues

$$\lim_{z \to \frac{1}{2}} f(z)(z - \tfrac{1}{2}) = \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{1}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{2})} \cdot (z - \tfrac{1}{2}) = \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{1}{z + \frac{1}{2}} = 1 \neq 0$$

$$\text{y} \quad \lim_{z \to -\frac{1}{2}} f(z)(z + \tfrac{1}{2}) \neq 0$$

Tampoco puedo usar la F.I. de Cauchy, pues necesito que γ esté contenido en un disco donde f sea analítica, pero no lo hay.

Así usaremos Homotopías.



Notamos que podemos dar una homotopía de γ a ρ con $\rho = \gamma_1 + \gamma_2 + \psi_1 + \psi_2$

$\Rightarrow$ por el T.C. Homotópico

$$\int_\gamma f = \int_\rho f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\psi_1} f + \int_{\psi_2} f$$

pero $\psi_1 = -\psi_2 \Rightarrow$

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

Además tenemos que $\frac{1}{z^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{z - \frac{1}{2}} - \frac{1}{z + \frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z - \frac{1}{2}} - \int_{\gamma_1} \frac{1}{z + \frac{1}{2}}$$

Luego como $\frac{1}{z-\frac{1}{2}}$ si es analítica en γ_1 $\Rightarrow$ $\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-\frac{1}{2}} = 0$

y $\int_{\gamma_1} \frac{1}{z+\frac{1}{2}} = 2\pi i$

Análogamente $\int_{\gamma_2} \frac{1}{z-\frac{1}{2}} = 2\pi i$, y $\int_{\gamma_2} \frac{1}{z+\frac{1}{2}} = 0$

$\therefore \int_\gamma f = [2\pi i - 0] + [0 - 2\pi i] = 0$

Obs: $\int_\gamma (z-a)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } n = -1 \end{cases}$ con $\gamma(t) = a + re^{it}$.

donde ~~γ~~ donde γ es el disco centrado en a

Calcula $\int_\gamma \frac{z^2+z+1}{z} dz$ donde γ es t.q. $0 \notin \text{int}\,\gamma$.

Sol: Notemos que f es analítica en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ y como $0 \notin \text{int}(\gamma)$ entonces γ es homotópica a un punto $\Rightarrow$ $\int_\gamma \frac{z^2+z+1}{z} dz = 0$.

Obs: Notemos que para usar el Teo. de Cauchy necesitábamos que f fuera analítica en un disco que contuviera a γ pero con este nuevo Teo. de Cauchy ya no es necesario eso.

Teorema (de Schönflies): Si γ es una curva cerrada simple C^1 por tramos, $\overline{\text{int}(\gamma)}$ es homeomorfo a $\overline{D(z_0,1)} := \overline{A}$

Corolario: Sea γ una curva cerrada simple C^1 por partes contenida en $\mathbb{C}$, entonces γ es homotópica a un punto de su interior.

Dem: Por el Teo de Schönflies $\exists f: \overline{\text{int}(\gamma)} \to \overline{D(z_0,1)}$ homeomorfismo.

P.D. γ es homotópica a $f^{-1}(z_0)$

como f es homeomorfismo preserva abiertos y como $z_0 \in \text{int}(D(z_0,1))$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(z_0) \in \text{int}(\gamma)$

Además, tenemos que $\partial\overline{D(z_0,1)}$ es homotópica a z_0 (pues el disco cerrado es simplemente conexo) $\Rightarrow \exists\, G: [a,b]\times[0,1] \to \overline{D(z_0,1)}$ t.q. $G(t,0)=\partial D$ $\wedge$ $G(t,1)=z_0$.

P.D. $H=f^{-1}\circ G$ es la función buscada.

Consideremos $H:[a,b]\times[0,1] \to \overline{\text{int}(\gamma)}$ dada por $H(t,s)=f^{-1}(G(t,s))$ y como G y f^{-1} son continuas $\Rightarrow$ H es continua y es t.q. $H(t,0)=f^{-1}(\partial D)=\gamma(t)$ y $H(t,1)=f^{-1}(z_0)$

$\therefore$ γ es homotópica a $f^{-1}(z_0)\in\text{int}(\gamma)$.

Teorema.- Sean $U\subseteq\mathbb{C}$ región, $f:U\to\mathbb{C}$ analítica en U y γ una curva cerrada C^1 por partes t.q. $\overline{\text{int}(\gamma)}\subseteq U$ $\Rightarrow$

$$\int_\gamma f(z)\,dz=0.$$

Teorema: (Propiedad del valor intermedio) Sean $A\subseteq\mathbb{C}$ región, $f:A\to\mathbb{C}$ analítica y $\overline{D(z_0,r)}\subseteq A$, entonces

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta$$

Funciones armonicas 2.0

Proposición.- Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ region simplemente conexa y $u: U \to \mathbb{R}$ una función armonica en U. Entonces existe una función analitica $f: U \to \mathbb{C}$ t.q $u = Re(f)$ y u es de clase C^∞.

Dem: Sea $g = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \tilde{u} + i\tilde{v}$

Como u es armonica, $u \in C^2(U)$ y por tanto $g \in C^1(U)$. Ademas

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}$$

Asi g es analitica en U, como U es simplemente conexa existe F analitica t.q $F' = g$ en U.

Si $F = \hat{u} + i\hat{v}$ entonces ~~es decir~~

$$F' = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - i\frac{\partial \hat{u}}{\partial y} = g = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$\Rightarrow \hat{u} - u = c$ para $c \in \mathbb{R}$. Si $f = F - c$ tenemos que f es analitica y $u = Re(f)$. Como f es C^∞, u tambien.

Corolario.- Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ simplemente conexa y $u: A \to \mathbb{C}$ armonica, Entonces u tiene una conjugada armonica en A.

Teorema.- Sea u una función armonica en una region $A \subseteq \mathbb{C}$. Si u tiene un maximo en un punto interior de U $(z_0 \in U)$. Entonces u es constante.

Dem: Sea D un disco abierto con centro en z_0 contenido en A. Como D es simplemente conexo existe f analitica en D t.q $u = Re(f)$.

Entonces $e^{f(z)}$ es tambien analitica y $|e^{f(z)}| = e^{u(z)}$

Como u alcanza su maximo en z_0, $|e^{f(z)}|$ tambien

lo alcanza en z_0. Por tanto $|e^{f(z)}|$ es constante en D.
$\Rightarrow e^{u(z)}$ también lo es $\therefore u$ es constante.

~~Se tiene que A es abierto en U~~

Aplicando este argumento a cualquier punto del conjunto $B = \{z \in U \mid u(z) = u(z_0)\}$ se tiene que B es abierto en A. Pero B también es cerrado y no vacío. Como A es conexo, $B = A$ y u es constante.

Teorema (Principio máximo/mínimo para armónicas).- Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ región acotada y $u: \overline{U} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\overline{U}$ y armónica en U. Entonces el máximo y el mínimo de los valores de $u(z)$ se alcanza en ∂A. Más aún si algún punto de A alcanza este valor máximo, u es constante.

Dem.- Se da un argumento similar al visto para funciones analíticas.

Ejemplo.- Tenemos $u(x+iy) = e^x \cos(y)$ definida en $D(0,1) \subseteq \mathbb{C}$.
Notemos que u es armónica en $D(0,1)$ y continua en $\overline{D}$ $\therefore$ el máximo y mínimo se alcanzan en $\partial D(0,1)$.

Sea $\gamma(t) = \text{cis}(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ tal que $\gamma[0,2\pi] = \partial D$.
$\Rightarrow u(\gamma(t)) = e^{\cos(t)} \cos(\sin(t))$

Tenemos que $u(\gamma(t))' = -e^{\cos(t)}[\sin(t)\cos(\sin(t)) + \sin(\sin(t))\cos(t)]$
$\Rightarrow u(\gamma(t))' = 0 \iff \sin(t)\cos(\sin(t)) = -\cos(t)\sin(\sin(t))$

$\Rightarrow t = 0, \pi$ son puntos críticos

$\therefore u(\gamma(0)) = e$ y $u(\gamma(\pi)) = e^{-1}$

$\therefore$ en 1 hay máximo y en -1 hay mínimo.

Teorema (principio del módulo mínimo para funciones analíticas) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ región acotada, $f: \bar{U} \to \mathbb{C}$ continua en $\bar{U}$ analítica en U, $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \bar{U}$. Entonces $|f(z)|$ alcanza su mínimo en ∂U.

Problema de Dirichlet: Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ región y $u_0: A \to \mathbb{R}$ continua. ¿Cuándo puedo encontrar $u: \bar{A} \to \mathbb{R}$ continua t.q. $u|_A$ es armónica y $u|_{\partial A} = u_0$?

La respuesta a esta pregunta es complicada para las herramientas que tenemos pero podemos mostrar un teorema sobre la unicidad.

Teorema: Si el problema de Dirichlet tiene solución, esta es única.

Dem: Sea $u: A \to \mathbb{R}$ solución del problema y supongamos que existe $v: A \to \mathbb{R}$ otra solución.

Sea $\psi := u - v$, como u y v son armónicas $\Rightarrow$ ψ es armónica pero si $z \in \partial A \Rightarrow \psi(z) = u(z) - v(z) = u_0(z) - u_0(z) = 0$ $\therefore$ por el principio del máximo tenemos que $\psi(z) \leq 0$ $\forall z \in A$ y por el principio del mínimo $\psi(z) \geq 0$ $\forall z \in A$ $\therefore$ $\psi(z) = 0$ $\forall z \in A$ $\therefore$ $u = v$.

Teorema (valor medio funciones armónicas) Sean $u: U \to \mathbb{R}$ armónica, ... U ..., $z_0 \in U$ ... $\overline{D(z_0, r)} \subseteq U$ ...
Entonces

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\, dt$$

Dem: como u es armónica y $\overline{D(z_0,r)}$ es simplemente conexo, existe $f: U \to \mathbb{C}$ analítica tq $u = Re(f)$ y por el Teo. valor medio para funciones analíticas se sigue el resultado.

Recordando la propiedad del valor intermedio esta nos dice que dada una región $U \subseteq \mathbb{C}$ y f analítica en U t.q $\overline{D(z_0,r)} \subseteq U$, podemos calcular el valor de $f(z_0)$ calculando el valor de una integral.

El siguiente resultado es mas fuerte con hipótesis extras, donde no solo nos limitamos al centro del disco sino a todo punto del disco.

Formula integral de poisson: Sea $f: D(0,r) \to \mathbb{C}$ analítica y $z_0 = \rho e^{i\alpha} \in D(0,r)$, con $\rho < r$, entonces:

$$f(\rho e^{i\alpha}) = \frac{r^2-\rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^2 - 2r\rho\cos(\alpha-\theta) + \rho^2} d\theta$$

Dem: primero veamos que dado $z \in D(0,r)$, se tiene que

$$2\pi i f(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_\gamma \frac{f(w)}{w - \frac{r^2}{\bar{z}}} dw$$

con $\gamma(t) = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$

En efecto, dado $z \in D(0,r)$, se tiene que $n(\gamma, z) = 1$. Ademas notemos que $r^2/\bar{z} \notin D(0,r)$, pues como $z \in D(0,r)$
$\Rightarrow |\bar{z}| = |z| < r \Rightarrow r|\bar{z}| < r^2 \Rightarrow r < \frac{r^2}{|\bar{z}|} \therefore |r^2/\bar{z}| > r$
$\therefore r^2/\bar{z} \notin D(0,r)$

$\therefore \dfrac{f(w)}{w - r^2/\bar{z}}$ sera analítica en $D(0,r)$

Con todo esto, por la formula integral de Cauchy se tiene que

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw = 2\pi i f(z)$$

y por el teorema de Cauchy

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w - r^2/\bar{z}} dw = 0$$

$\therefore$ Se tiene lo requerido.

Ahora por lo anterior:

$$2\pi i f(z) = \int_\gamma \left[\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w - r^2/\bar{z}}\right] f(w)\, dw$$

$$= \int_\gamma \frac{z - r^2/\bar{z}}{w^2 - (\frac{r^2}{\bar{z}} + z) w + r^2 z/\bar{z}} f(w)\, dw$$

$$= \int_\gamma \frac{|z|^2 - r^2}{\bar{z} w - (r^2 + |z|^2) + r^2 z w^{-1}} f(w) \frac{dw}{w}$$

$$= \int_\gamma \frac{|z|^2 - r^2}{\bar{z} w - (r^2 + |z|^2) + r^2 z \cdot \frac{\bar{w}}{|w|^2}} f(w) \frac{dw}{w} \quad *$$

Y como w se considera en $\gamma(\theta)$, $|w| = r^2$

$$\Rightarrow * = \int_\gamma \frac{|z|^2 - r^2}{\bar{z} w + z\bar{w} - (|z|^2 + r^2)} f(w) \frac{dw}{w}$$

$$= \int_\gamma \frac{r^2 - |z|^2}{r^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |z|^2} f(w) \frac{dw}{w}$$

Tomando $z = \rho e^{i\alpha}$ con $\rho < r$. ($z \in D(0,r)$)

$$\Rightarrow 2\pi i f(\rho e^{i\alpha}) = \int_\gamma \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2\operatorname{Re}(\rho e^{i\alpha} \cdot \bar{w}) + \rho^2} f(w) \frac{dw}{w}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2\operatorname{Re}(\rho e^{i\alpha} \cdot r e^{-i\theta}) + \rho^2} f(re^{i\theta}) \cdot r e^{i\theta} \cdot i \frac{d\theta}{r e^{i\theta}}$$

$$= i(r^2 - \rho^2) \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^2 - 2\rho r \cos(\alpha - \theta) + \rho^2} d\theta$$

$$\therefore f(\rho e^{i\alpha}) = \frac{r^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^2 - 2r\rho\cos(\alpha - \theta) + \rho^2} d\theta$$

4.1 Convergencia Uniforme y Series

Ahora estudiaremos a las funciones analíticas desde el punto de vista de las series.

Def.- Sea $\{f_n : A \to \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones. Decimos que la sucesión converge uniformemente a una función $f: A \to \mathbb{C}$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. si $n \geq N$ entonces $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ $\forall z \in A$.

Def.- Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ y $g_k : A \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ una sucesión de funciones. Se dice que $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge uniformemente a g si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} g_k(z) - g(z)\right| < \varepsilon \quad \forall z \in A.$$

Obs.- Si $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} g_k(z)$, esta definición se traduce en que $S_n \xrightarrow{unif} g$

Teorema.- Sea $\gamma : [a,b] \to A$ una curva C^1 por tramos en $A \subseteq \mathbb{C}$ región.

(i) Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas definidas en γ t.q. $f_n \to f$ uniform. en γ, entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\gamma f_n\right) = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n = \int_\gamma f.$$

(ii) Si $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas definidas en γ t.q. $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge uniformemente en γ, entonces:

$$\int_\gamma \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_\gamma g_k\right)$$

Dem.-

Sea $\varepsilon > 0$.

(i) Como $f_n \to f$ unifor. $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$, dada esta $\frac{\varepsilon}{\ell(\gamma)} > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$ $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{\ell(\gamma)}$

Así $\left|\int_\gamma f_n - \int_\gamma f\right| = \left|\int_\gamma f_n - f\right| \leq \int_\gamma |f_n - f|\,|dz| \leq \frac{\varepsilon}{\ell(\gamma)} \cdot \ell(\gamma) = \varepsilon.$

(ii) Si $s_n = \sum_{k=1}^{n} g_k \to g$ uniformemente en γ, entonces por (i)

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma \sum_{k=1}^{n} g_k = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma s_n = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} s_n = \int_\gamma \sum_{k=1}^{\infty} g_k$$

$$\parallel$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_\gamma g_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\gamma g_k$$

Teorema: Sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones de funciones continuas en A.

(i) Si $f_n \to f$ uniformemente en A, entonces f es continua.

(ii) Si $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge uniformemente a g en A, entonces g es continua.

Dem.:

(i) Sea $z_0 \in A$. Veamos que f es continua en z_0.
Sea $\varepsilon > 0$. Como $f_n \xrightarrow{unif} f$ en A, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall z \in A$
$|f_N(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Como f_N es continua en z_0, $\exists \delta > 0$ t.q. si $|z - z_0| < \delta \Rightarrow$
$|f_N(z) - f_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\therefore$ si $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| \le |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)|$
$+ |f_N(z_0) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

(ii) Se sigue aplicando (i) a $s_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$

Teorema (Criterio de Cauchy).- Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $f_n : A \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $g_k : A \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ dos sucesiones de funciones. Entonces

(i) $f_n(z)$ converge uniformemente en $A \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n \geq N$ & $\forall z \in A$ y $\forall p \in \mathbb{N}$ $|f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \varepsilon$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente en $A \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n \geq N$, $\forall z \in A$ y $\forall p \in \mathbb{N}$ $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z)\right| < \varepsilon$.

Dem.-

(i)

$\Rightarrow$) Sea $\varepsilon > 0$.

Como $f_n \xrightarrow{unif} f$ en $A \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n \geq N$, $\forall z \in A$ $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Si $n \geq N \Rightarrow n + p \geq N$ $\forall p \in \mathbb{N}$, por lo que

$|f_n(z) - f_{n+p}(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f_{n+p}(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\Leftarrow$) Si $\{f_n\}$ es uniform. de Cauchy, en particular, para $z \in A$ $f_n(z)$ es de Cauchy por lo que $f_n(z)$ es convergente y denotamos $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$.

Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n \geq N$, $\forall z \in A$ y $\forall p \in \mathbb{N}$ $|f_n(z) - f_{n+p}(z)|$

Como $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$, $\forall z \in A$ $\exists p_z \in \mathbb{N}$ t.q $|f(z) - f_{N+p_z}(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\therefore$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in A$ $|f_n(z) - f(z)| \leq |f_n(z) - f_{N+p_z}(z)| + |f_{N+p_z}(z) - f(z)|$ $< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

(ii) Se aplica (i) a las sumas parciales.

Teorema:- (prueba M de Weierstrass)
Sean $A \subseteq \mathbb{C}$, $f_n : A \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ una sucesión de funciones y $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ t.q.

(i) $|f_n(z)| \leq M_n \quad \forall z \in A$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge

Entonces $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente y absolutamente en A.

Dem:- Como $\sum_{k=1}^{\infty} M_n$ converge, por el criterio de Cauchy para series reales, dado $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$ y $\forall p \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k\right| < \varepsilon$$

$$\therefore \forall z \in A \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon$$

$\therefore$ por el criterio de Cauchy para convergencia uniforme $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ converge uniforme y absolutamente en A.

Ejemplo:-

- La serie $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge uniformemente y absolutamente en $\overline{D(0,r)}$ con $r < 1$

Dem:- Sea $f_n(z) = \frac{z^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

(i) $\forall z \in \overline{D(0,r)}$, $|f_n(z)| = \frac{|z^n|}{n} \leq \frac{r^n}{n} \leq r^n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ es convergente pues $|r| < 1$

$\therefore$ por el criterio M de Weierstrass la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge uni y abs. en $\overline{D(0,r)}$

Obs:- f no converge uniformemente en $\Delta = D(0,1)$

Dem.- Si f convergiera uniformemente en Δ, en particular

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ converge uniformemente en $[0,1)$.

Por el criterio de Cauchy para convergencia uniforme
$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ t.q $\forall n\geq N$ y $\forall x\in[0,1)$ y $\forall p\in\mathbb{N}$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}+\dots+\frac{x^{n+p}}{n+p} = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{x^k}{k}\right|<\varepsilon$$

Como la serie armónica diverge, $\exists p\in\mathbb{N}$ t.q $\frac{1}{N+1}+\dots+\frac{1}{N+p}>2\varepsilon$
También como $x\to x^n$ es continua en $[0,1]$ y $0^n=0$, $1^n=1$
por el teo. del valor intermedio $\exists x\in[0,1)$ t.q $x^{N+p}>\frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{x^{N+1}}{N+1}+\dots+\frac{x^{N+p}}{N+p} > x^{N+p}\left(\frac{1}{N+1}+\dots+\frac{1}{N+p}\right)>\frac{1}{2}\cdot(2\varepsilon)=\varepsilon \ !!!$$

$\therefore$ no converge uniformemente.

Obs 2.- f es continua en Δ

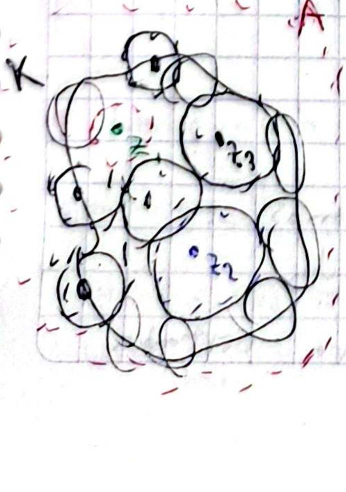
Dem.- Si $z\in\Delta \Rightarrow \exists r\in(0,1)$ t.q $z\in\overline{D(0,r)}$ y en el disco se da la convergencia uniforme y como f_n es continua $\Rightarrow f$ es continua

Definición.- Sea $A\subseteq\mathbb{C}$ región, $f_n: A\to\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$ una sucesión de funciones. Se dice que f_n converge normalmente a $f:A\to\mathbb{C}$ si $\forall K\subseteq A$ compacto $f_n\to f$ uniformemente en K.

Obs.- $\forall K\subseteq A$ compacto $f_n\to f$ uniformemente en K
$\iff \forall z_0\in A\ \exists r>0$ t.q $\overline{D(z_0,r)}\subseteq A$, $f_n\to f$ unifor. en $\overline{D(z_0,r)}$

Dem.-
$\Rightarrow$] Como $\forall K\subseteq A$ compacto $f_n \xrightarrow{\text{uni}} f$ en K, y $\overline{D(z_0,r)}$ es compacto, se da la convergencia.

$\Leftarrow$] Sea $K\subseteq A$ compacto. Sea $z\in K$ y como $z\in A$ entonces $\exists r_z>0$ t.q $\overline{D(z,r_z)}\subseteq A$



Así $K\subseteq\bigcup_{z\in K} D(z,r_z)$ y esto es una cubierta abierta de K $\therefore$ por compacidad $\exists$ $m\in\mathbb{N}$ t.q $K\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} D(z_i,r_{z_i})\subseteq\bigcup_{i=1}^{m} \overline{D(z_i,r_{z_i})}$

como $\forall i \in \{1,\dots,m\}$ se tiene que $f_i \to f$ unifor. en $\overline{D(z_i, r_{z_i})}$
$\Rightarrow$ Dado $\varepsilon > 0$ $\exists N_i$ t.q. $\forall n \geq N_i$, $\forall z \in \overline{D(z_i, r_{z_i})}$

$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$

Tomando $N = \max\{N_1, \dots, N_m\}$ se tiene que $\forall n \geq N$, $\forall z \in K$
se tiene que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

$\therefore$ $f_n \to f$ unifor. en K.

Teorema (de Weierstrass).- Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ región.

(i) Si $\{f_n : A \to \mathbb{C}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones analíticas t.q. $f_n \to f$ normal en A, entonces f es analítica en A y $f_n' \to f'$ normal en A.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d}{dz}(f_n(z)) = \frac{d}{dz}\left(\lim_{n \to \infty} f_n(z)\right) = \frac{d}{dz}(f_n'(z))$$

y además $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ normal en A.

(ii) Si $\{g_k : A \to \mathbb{C}\}$ es una sucesión de funciones analíticas t.q. $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge normalmente en A y $g'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k'(z)$ normalmente en A.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d}{dz}\left(\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dz}(g_k(z))$$

Dem.-

(i) Como $f_n \xrightarrow{\text{normal}} f$ en A, se da la convergencia uniforme en discos cerrados de A, y como $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n es continua, f es continua.

Sea $z_0 \in A$ y $r \in \mathbb{R}^+$ t.q. $D(z_0, r) \subseteq A$. Como $D(z_0, r)$ es simplemente conexo, por el Teo. de Cauchy se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_\gamma f_n = 0$$

donde γ es cualquier curva cerrada C^1 por tramos en $D(z_0, r)$. Como $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$ en γ, $\int_\gamma f = \int_\gamma \lim_{n \to \infty} f_n$
$= \lim_{n \to \infty} \int_\gamma f_n = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$ $\therefore$ $\int_\gamma f = 0$ $\forall \gamma$ curva cerrada

∴ por tramos en $D(z_0,r)$ $\therefore$ por el teo. de Morera f es holomorfa en $D(z_0,r)$, $\Rightarrow$ f es holomorfa en A. $\therefore \exists f'$.

PD $f_n' \xrightarrow{\text{normal}} f'$

PD $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ t.q. $\forall n\geq N \wedge \forall z\in\overline{D(z_0,r)}$, $|f_n'(z)-f_n(z)|<\varepsilon$.

Sea $t>r$ t.q. $\overline{D(z_0,t)}\subseteq A$. Si γ denota a $\partial D(z_0,t)$, por la formula integral de Cauchy

$$f_n'(z)-f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(w)-f(w)}{(w-z)^2}\,dw \quad \forall z\in\overline{D(z_0,r)} \quad \dots (*)$$

Observamos que si $w\in\gamma$ y $z\in\overline{D(z_0,r)}$, entonces $|w-z|\geq t-r$ y como $f_n \xrightarrow{\text{uni}} f$ en $\overline{D(z_0,t)}$ entonces $\forall m>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ t.q. $\forall n\geq N$ $\wedge\ \forall z\in\overline{D(z_0,t)}$ $|f_n(z)-f(z)|<m$

$\therefore\ \forall n\geq N\ \forall z\in\overline{D(z_0,r)}$ $|f_n'(z)-f'(z)|\leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{m}{(t-r)^2}\cdot 2\pi t=\frac{mt}{(t-r)^2}$ (por $(*)$)

Tomando $m=\frac{\varepsilon}{t}\cdot(t-r)^2$ se obtiene lo buscado

Obs.- Aplicando el teorema varias veces tenemos que $f_n^{(k)} \xrightarrow{\text{normal}} f^{(k)}$

(ii) para el segundo se aplica a $\sum_{k=1}^{n} g_k$.

Ejemplos.-

- Vimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ no converge uniformemente en $\Delta=D(0,1)$ pero que si converge uniformemente en $\overline{D(0,r)}$ con $r<1$. por lo que converge en cualquier disco cerrado contenido en Δ $\therefore$ converge normalmente en Δ.
Asi por el teo. de Weierstrass $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ es holomorfa en Δ y su derivada es $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$ y converge normalmente en Δ.

- La función $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}$ es analítica en Δ.

Dem.- Sea $f_n(z)=\frac{z^n}{n^3}$, $n\in\mathbb{N}$, como

(i) $|f_n(z)|=\frac{|z|^n}{n^3}\leq\frac{1}{n^3}=M_n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ converge

$\therefore$ por prueba M de Weierstrass $\sum_{n=1}^{n} \frac{z^n}{n^3}$ converge uniforme y absolutamente en Δ.

$\therefore$ $f_n \xrightarrow{\text{normal}}$ en Δ

$\therefore$ por el Teo. de Weierstrass f es analítica en Δ y $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n^2}$

- La función ζ (zeta) de Riemann definida por:

$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$, donde $n^{-z} = e^{-z\log(n)}$ siendo $\log$ la rama principal de logaritmo, es holomorfa en el semiplano $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 1 \}$

Dem: Sea $f_n(z) = n^{-z}$, y veamos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge de manera normal en A P.D. $\forall \overline{D(z_0,r)} \subseteq A$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en $\overline{D(z_0,r)}$

Sea $\overline{D(z_0,r)} \subseteq A$ y $\varepsilon = d(\overline{D(z_0,r)}, \partial A)$

Si $z = x+iy$, $|n^{-z}| = |e^{-z\log(n)}| = e^{-x\log(n)} = n^{-x}$

Si $z \in \overline{D(z_0,r)}$, $x \geq 1+\varepsilon$ y $|n^{-z}| = n^{-x} \leq n^{-(1+\varepsilon)}$

Entonces:

(i) $|f_n(z)| \leq n^{-(1+\varepsilon)} = M_n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge pues $1+\varepsilon > 1$

$\therefore$ por la prueba M de Weierstrass $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ converge uniformemente en $\overline{D(z_0,r)}$

$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ converge normalmente en A

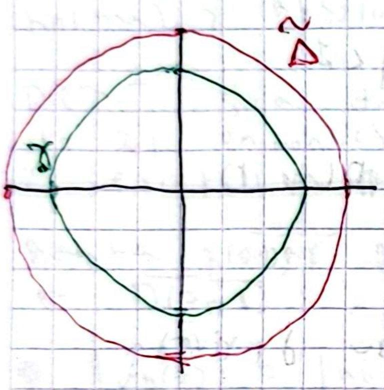
$\therefore$ es holomorfa en A. Y además

$\zeta'(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^z}$

Calcule $\displaystyle\int_{|z|=\frac{3}{7}} \left(\sum_{n=-2}^{\infty} z^n\right) dz$

Sol.- Tenemos que $\displaystyle\int_\gamma \left(\sum_{n=-2}^{\infty} z^n\right) dz = \int_\gamma \left(z^{-2} + z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) dz$

$\displaystyle = \int_\gamma \frac{1}{z^2}\, dz + \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz + \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) dz.$



Sabemos que $\frac{d}{dz}(-z^{-1}) = \frac{1}{z^2} \Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{z^2} = 0$

y $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$ $\therefore$ solo nos falta analizar la última.

Sean $f_n(z) = z^n$, definidas en $\tilde{\Delta} = D(0, \frac{5}{6})$

P.D. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en $\tilde{\Delta}$

En efecto, • $|f_n(z)| = |z^n| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n = M_n$

• $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n$ converge

$\therefore$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en $\tilde{\Delta}$, en particular en γ $\therefore$ $\displaystyle\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} z^n\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma z^n\, dz$ pero z^n es entera

$\therefore$ por teo. de Cauchy $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$

$\therefore$ $\displaystyle\int_\gamma \left(\sum_{n=-2}^{\infty} z^n\right) dz = 2\pi i.$

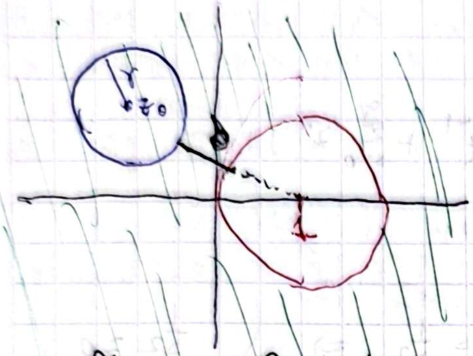
Demuestre que $\displaystyle g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n}$ es una función holomorfa en la región $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}$. Calcule su derivada.

Sol.- Sean $f_n(z) = \frac{1}{(z-1)^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Notemos que $1 \notin A$

$\therefore$ $f_n(z)$ es holomorfa en A $\forall n \in \mathbb{N}$. P.D. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n}$ converge normalmente en A.

Sea $\overline{D(z_0, r)}$ un disco contenido en A.

A



sea $\delta = d(\partial D, \partial D(1,1))$, entonces tenemos que si $z \in A$

$\Rightarrow |z-1| > 1$ y si $z \in \overline{D(z_0, r)}$

$\Rightarrow |z-1| \geq 1+\delta$

$\Rightarrow |f_n(z)| = \frac{1}{|z-1|^n} \leq \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^n = M_n$

$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^n$ que converge pues $\left|\frac{1}{1+\delta}\right| < 1$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uni y absolut. en $D(z_0, r)$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge normalmente en A.

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ es holomorfa en A y su derivada

es $\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{n}{(z-1)^{n+1}}$

Def.- Una serie de potencias complejas es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{con } z_0\in\mathbb{C},\ a_n\in\mathbb{C}\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Lema (de Abel).- Si una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge en $z=z_1\in\mathbb{C}$, entonces converge de manera normal y absoluta en $D(z_0,|z_1-z_0|)$

Dem.- Sea $f_n(z)=a_n(z-z_0)^n$. Como la serie converge en z_1 entonces $a_n(z_1-z_0)^n\to 0 \Rightarrow |a_n(z_1-z_0)^n|\to 0$ ∴ existe $M\in\mathbb{R}^+$ t.q. $|a_n(z_1-z_0)^n|<M\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Basta probar $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}|f_n(z)|$ converge uniforme y absolutamente en $\overline{D(z_0,r)}$, con $r<|z_1-z_0|$.

- $|f_n(z)|=|a_n(z-z_0)^n|\le |a_n|r^n = |a_n|r^n\dfrac{|z_1-z_0|^n}{|z_1-z_0|^n} < \dfrac{r^n M}{|z_1-z_0|^n}=M_n$
- $\sum_{n=0}^{\infty} M\left(\dfrac{r}{|z_1-z_0|}\right)^n$ converge pues $\left|\dfrac{r}{|z_1-z_0|}\right|<1$

∴ por la prueba M de Weierstrass, la serie converge normal y absolutamente en $\overline{D(z_0,r)}$ ∴ conv. abso. y norm. en $D(z_0,|$

~~Ahora sup. que $|z_2-z_0|>R$ y la serie converge en z_2. Tomamos $r_2=|z_2-z_0|$ y $s\in\mathbb{R}^+$ t.q. $R<s<r_2$, por el lema de Abel, la serie conv. unif. y absolutamente en $D(z_0,s)$. En particular si $z=z_0+s$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|s^n$ converge !! ∴ no converge fuera del disco.~~

Teorema (Radio de convergencia) Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ una serie de potencias, entonces $\exists R\in[0,\infty]$ t.q.:

- Si $z\in D(z_0,R)$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge unifor. y absol.
- Si $z\notin \overline{D(z_0,R)}$, la serie diverge.

Dem.- Sea $R=\sup\{r\ge 0 : \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n \text{ converge}\}$ afirmo que esta es la R buscada.

- Sea $r<R$. $\exists r_1 \in \mathbb{R}^+$ t.q. $r<r_1<R$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r_1^n$ converge

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_0+r_1-z_0)^n$ converge absolutamente y por tanto converge $\therefore$ por el lema de Abel, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge uni y abs. en $\overline{D(z_0,r)}$.

- Ahora sup. que $|z_2-z_0|>R$ y la serie converge en z_2. Tomando $r_2=|z_2-z_0|$ y $s\in\mathbb{R}^+$ t.q. $R<s<r_2$ por el lema de abel la serie converge unif. y absol. en $\overline{D(z_0,s)}$. En particular si $z=z_0+s$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| s^n$ converge !! lo cual es absurdo pues R era el mas grande que lo cumplia.

$\therefore$ si $r\geq R$ diverge.

Teorema: Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ y R el radio de convergencia. Entonces la serie es holomorfa en $D(z_0,R)$

Dem: por el teo. anterior, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge normalmente en $D(z_0,R)$ $\therefore$ por el teo. de Weierstrass. Como $a_n (z-z_0)^n$ es entera entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ es holomorfa en $D(z_0,R)$

Teorema: (Coeficientes de Taylor) Sea $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ una serie de potencias, R su radio de convergencia y $z\in D(z_0,R)$, entonces

1) $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

2) $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$

y el radio de convergencia de f' es R. tambien.

Dem:

2) por el teo. anterior f es holomorfa en $D(z_0,R)$ y ademas $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$

veamos que su radio de convergencia es R.

Sup. que $\exists z_1$ t.q. $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z_1 - z_0)^{n-1}$ converge con $|z_1 - z_0| > R$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n|a_n||z_1-z_0|^{n-1} = 0$ por lo que es acotada y entonces

$|a_n||z_1-z_0|^{n-1}$ también es acotada.

$\therefore$ por la prueba del Lema de Abel, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)$ converge uni y abs. en $\overline{D(z_0, r_2)}$ con $r_1 > r_2 > R$! lo cual no puede ser pues R es el supremo.

$\therefore$ el radio de convergencia es R.

2) De manera inductiva:

$f(z_0) = a_0$, $f'(z_0) = a_1$ y como $f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (z-z_0)^{n-2}$

$\Rightarrow f''(z_0) = 2! a_2 \quad \dots \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z^{n-k}$

$\therefore f^{(k)}(z_0) = k! a_k \Rightarrow a_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$

$\therefore f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$ ■

Teorema.- (Criterios de convergencia): Sea R el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, entonces:

(i) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ existe, o es ∞, entonces dicho límite es R (i.e. el radio puede ser ∞).

(ii) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ entonces $R = \begin{cases} \dfrac{1}{L} & \text{si } L \neq 0, \infty \\ 0 & \text{si } L = \infty \\ \infty & \text{si } L = 0. \end{cases}$

Dem.- "Clase teorema de taylor"

(i)

Lema (Serie geométrica) La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge normal y absolutamente en Δ a $\frac{1}{1-z}$

Dem: para esta serie tenemos que $a_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{1}{1}\right| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ $\therefore$ el radio de convergencia es $R=1$, i.e, el disco de convergencia es Δ y ahí la convergencia es normal y absoluta.

Además $S_n(z) = 1 + z + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ y como $z \in \Delta$ $\Rightarrow z^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ $\therefore$ $\lim_{n\to\infty} S_n(z) \overset{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Lema 2: Si $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$ converge uniformemente en $A \in \mathbb{C}$ y $\varphi: A \to \mathbb{C}$ es acotada, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(z) g_n(z)$ converge uniformemente en A a $\varphi(z)\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$

Dem: Como φ es acotada $\exists M \in \mathbb{R}^+$ t.q $|\varphi(z)| < M$ $\forall z \in A$. Además como $\sum g_n$ converge uniformemente por el criterio de Cauchy dado $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n \geq N$ $\forall p \in \mathbb{N}$ $\forall z \in A$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z)\right| < \frac{\varepsilon}{M}$$

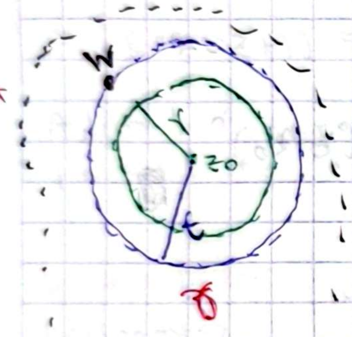
Así $$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \varphi(z) g_k(z)\right| \leq |\varphi(z)| \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z)\right| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

$\therefore$ se da lo pedido.

Teorema (Taylor): Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ región, $f: A \to \mathbb{C}$ holomorfa y $\overline{D(z_0,r)} \subseteq A$. Entonces $\forall z \in \overline{D(z_0,r)}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Dem: Sea $t > r$ tq $\overline{D(z_0,t)} \subseteq A$ y llamamos $\gamma: [0,2\pi] \to A$ tq $\gamma(s) = z_0 + te^{is}$.



Entonces como $\overline{\text{int}(\gamma)} \subseteq A$ y γ es homotópica a z_0 en A por el la formula integral de Cauchy tenemos que $\forall z \in D(z_0,t)$

$$f(z) \cdot I(\gamma,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw \quad (*)$$

Ahora notemos que podemos hacer la siguiente conversión:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}$$

pero como $w \in \gamma \Rightarrow w - z_0 \neq 0$ y $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{|w-z_0|}$
$= \frac{|z-z_0|}{t} < \frac{r}{t} < 1$ (pues $t > r$)

por lo que $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$ converge uniformemente en discos cerrados de D al variar w.

por lo que $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}$

$$\Rightarrow \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \frac{1}{w-z} \quad (**)$$

Con esto podemos concluir.

Tenemos que la función $w \to \frac{f(w)}{w-z_0}$, con $w \in \gamma$ es una función continua en γ y por tanto es acotada (por ser γ compacto) $\therefore$ por el Lema 2

$$\frac{f(w)}{w-z} \underset{(**)}{=} \frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

$\therefore (*) \; f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw$ $\quad \int \Sigma = \Sigma \int$ bajo conv. uniforme

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

y por la F. I de Cauchy

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \quad \blacksquare$$

Obs: Esta representación es única.

Obs: Si $A \subseteq \mathbb{C}$ región y $f: A \to \mathbb{C}$, es analítica en A si y solo si $\forall z_0 \in A$ se tiene que si $D(z_0, r) \subseteq A$ entonces $f|_{D(z_0,r)}$ es representable como serie de potencias.

Ejemplos:

- Si $f(z) = e^z$, calcula su serie de Taylor alrededor de 0

Sol: Como f es entera y $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(z) = e^z$ en particular $f^{(n)}(0) = 1$

$$\Rightarrow e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

- Considera la rama principal del logaritmo, calcula la serie de Taylor de $f(z) = \log(z+1)$ alrededor de 0

Sol: Notemos que f es holomorfa en $\mathbb{C} - (-\infty, -1]$

Basta encontrar un disco contenido en el dominio de analiticidad. Sea $D(0,1)$ y $z \in D(0,1)$. Entonces

$f^{(0)}(z) = \log(z+1) \Rightarrow f^{(0)}(0) = 0$
$f^{(1)}(z) = \frac{1}{z+1} \Rightarrow f^{(1)}(0) = 1$

$$f^{(2)}(z) = -\frac{1}{(z+1)^2} \Rightarrow f^{(2)}(0) = -1$$

$$f^{(3)}(z) = \frac{2}{(z+1)^3} \Rightarrow f^{(3)}(0) = 2$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(z+1)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

$$\therefore \log(z+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \quad \forall z \in D(0,1) = \Delta$$

Además para $z=-1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$, la cual no existe $\therefore$ el radio de convergencia es 1.

Proposición: Las series de potencias se multiplican como polinomios.

Si f, g son analíticas en $D(z_0, r)$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$, entonces

$$f(z)\cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)(z-z_0)^n \quad \forall z \in D(z_0, r)$$

Dem:

Como f y g son analíticas $\Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ y $b_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}$

y además como $f\cdot g$ es analítica entonces

$$(f\cdot g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \text{con} \quad c_n = \frac{(f\cdot g)^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(z_0)\, g^{(n-k)}(z_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\cdot\frac{g^{(n-k)}(z_0)}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

$$\therefore (f\cdot g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad ▩$$

Series de Laurent

Estudiaremos una generalización de las series de Taylor. Como sabemos una serie de Taylor es una serie de potencias con potencias positivas.
En el caso de las series de Laurent permitiremos el uso de potencias negativas.

Def.- una serie de Laurent con centro en z_0 es una expresión de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Donde $a_n, b_n \in \mathbb{C}$.

Para el interés de este curso asumimos la convención $a_{-n} := b_n$ y escribiremos a la serie de Laurent de la sig. manera

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

El primer sumando es llamado parte regular mientras que la segunda parte singular.

Es claro que la serie de Laurent converge si sus partes regular y singular convergen.

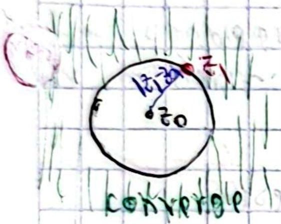
Obs.-1.- La parte regular de la serie de Laurent es una serie de potencias usual por lo que existe $R \in [0,\infty]$ su radio de convergencia y la serie converge de manera uniforme y absoluta en $D(z_0,R)$.

Obs.2.- Podemos hacer el cambio $w = \frac{1}{z-z_0}$ para la parte singular obteniendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$ donde dicha serie tendrá su propio radio de convergencia $\tilde{r} \in [0,\infty]$ y será t.q. la convergencia será uniforme y absoluta en $D(0,\tilde{r})$ es decir para $|w| < \tilde{r} \Rightarrow \frac{1}{|z-z_0|} < \tilde{r} \Rightarrow |z-z_0| > \frac{1}{\tilde{r}} := r \in [0,\infty]$

Veamos esto de manera formal en el sig. lema.

Lema (Dual de Abel).- Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ converge en $z=z_1 \in \mathbb{C}$, entonces converge de manera normal y absoluta en $\mathbb{C} \setminus D(z_0, |z_1-z_0|)$.

Dem.- Sea $f_n(z) = \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$. Como la serie converge en



$\Rightarrow \frac{b_n}{(z_1-z_0)^n} \to 0 \Rightarrow \left|\frac{b_n}{(z_1-z_0)^n}\right| \to 0 \therefore \exists M \in \mathbb{R}^+$

t.q. $\left|\frac{b_n}{(z_1-z_0)^n}\right| \leq M$.

Consideremos $r \in \mathbb{R}^+$ t.q. $r \geq |z_1-z_0| \wedge r \leq |z-z_0|$.

$\Rightarrow$

- $\left|\frac{b_n}{(z-z_0)^n}\right| = \frac{|b_n|}{|z-z_0|^n} \leq \frac{|b_n|}{r^n} \cdot \frac{|z_1-z_0|^n}{|z_1-z_0|^n} = \frac{|b_n|}{|z_1-z_0|^n} \cdot \left(\frac{|z_1-z_0|}{r}\right)^n$
$< M \cdot \left(\frac{|z_1-z_0|}{r}\right)^n$

- $\sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{|z_1-z_0|}{r}\right)^n$ converge pues $\frac{|z_1-z_0|}{r} < 1$.

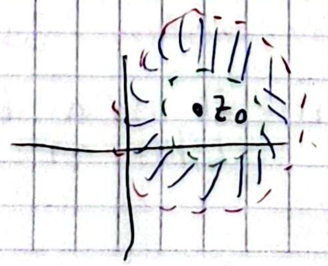
$\therefore$ por la prueba M de Weierstrass la serie converge de manera normal y absoluta en $\mathbb{C} \setminus D(z_0, |z_1-z_0|)$ ■

Con esto tendremos que existe un $r \in [0, \infty]$ t.q. la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ converge si $|z-z_0| > r$ converge y si $|z-z_0| < r$ diverge (esto por el argumento anterior). y por el teorema del radio de convergencia.

$\therefore$

Def.- Sean $r, R \in \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$ t.q. $r < R$. El anillo (abierto) con centro en z_0 y radios r y R es:

$$A_r^R(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z-z_0| < R \}$$



Con esto, si R y r son los radios de convergencia de la parte regular y singular de una serie de Laurent entonces la serie de Laurent converge normal y absolutamente en $A_r^R(z_0)$.

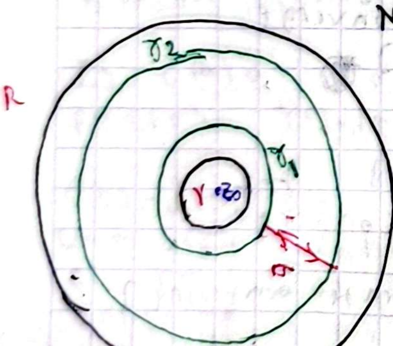
Corolario.- Bajo las condiciones anteriores de la propo. anterior, la serie de Laurent define a una función analítica en el anillo $A_r^R(z_0)$

Nuestro objetivo será demostrar el recíproco de esta afirmación.

Lema (fórmula integral de Cauchy para el anillo).-
Sea f una función holomorfa en $A_r^R(z_0)$ y
$\gamma_j : [0,2\pi] \to A$ t.q. $\gamma_j(t) = z_0 + r_j e^{it}$, $j = 1, 2$, $r < r_1 < r_2 < R$
Entonces: $\forall z \in A_{r_1}^{r_2}(z_0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Dem.- Sea $\sigma(t) = z_0 + t$ con $t \in [r_1, r_2]$.
Notemos que la curva $\gamma = \gamma_1 - \sigma \oplus \gamma_1 + \sigma$ es cerrada C^1 por partes y está contenida en el anillo, aplicando la fórmula integral de Cauchy en los puntos $z \in A_{r_1}^{r}(z_0)$



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Teorema (de Laurente).- Sea f holomorfa en $A_r^R(z_0)$. Entonces $\forall z \in A$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

La convergencia es uniforme y absoluta en subanillos de A. Y además los coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)(w-z_0)$$

con γ una circunferencia con centro en z_0 y radio arbitrario $\rho \in (r, R)$.

Dem.- Sean $\gamma_j = z_0 + r_j e^{it}$, $j=1,2$, $r < r_1 < r_2 < R$, $t \in [0, 2\pi]$.
Así tomamos el anillo $A_{r_1}^{r_2}(z_0) \subset A_r^R(z_0)$.
Por la formula integral de C. para anillos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

La idea es que la primera integral dara lugar a la parte regular y la segunda a la singular.

Sea $z \in int(\gamma_2)$ fija y $w \in \gamma_2$, por el truco de Taylor:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \quad \text{pues} \quad \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$$

$$\therefore \frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} f(w) \quad \text{uniformemente en } \gamma_2$$

($f(w)$ se puede meter dentro de la serie pues es continua en el compacto γ_2 y por tanto acotada)

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \underbrace{\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw}_{a_n}$$

$\int \sum = \sum \int$ por conv. uniforme

Por el lema dual de Abel la serie converge de manera absoluta y uniforme en $A_{r_1}^{r_2}(z_0)$ y a que converge en $z \in int(\gamma_2)$

de forma similar. Sea $z \in Ext(\gamma_1)$ fijo y $w \in \gamma_1$. Entonces

$$-\frac{1}{w-z} = \frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n$$

$$\therefore -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}f(w)\,dw$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^n}\underbrace{\int_{\gamma_2}\frac{1}{2\pi i}f(w)(w-z_0)^{n-1}\,dw}_{b_n}$$

Por el Lema dual de Abel la convergencia es uniforme y absoluta en $A_{r_1}^{r_2}$.

$$\therefore f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{(w-z_0)}\,dw\right)(z-z_0)^n$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f(w)(w-z_0)^{n-1}\,dw\right)(z-z_0)^{-n}.$$

Corolario.- Esta representación es única.

Ejemplos.-

- Calcular la serie de Laurent de $f(z)=\frac{1}{z^2-z^3}$ alrededor de

a) $z=0$, consideremos f en A_0^1

Sol.-
Tenemos que $f(z)=\frac{1}{z^2-z^3}=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{z^2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)\cdot\frac{1}{z^2}$ (pues |

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n-2}=\underbrace{\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}}_{\text{singular}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}z^n}_{\text{regular}}$$

b) $z=1$

Sol.- Tenemos que $f(z)=\frac{1}{z^2-z^3}=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{z^2}=\frac{1}{1-z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z-$

$$=\frac{1}{1-z}\cdot 2+\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(z-1)$$

Escaneado con CamScanner

Singularidades

Def.- Consideremos $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in U$ y $f: U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ analítica. Consideremos $A_r^R(z_0) \subseteq U$, entonces f se puede representar mediante una serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}$$

Entonces llamaremos a este punto z_0 dependiendo de tres casos.

(i) Si $b_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ent. decimos que z_0 es una singularidad removible $\left(f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \right)$

(ii) Si $\exists k \geq 1$ t.q $b_n = 0$ $\forall k \geq n$ ent. decimos que z_0 es un polo de orden k de f. Si $k=1$, decimos que z_0 es un polo simple.

(iii) Si $b_k \neq 0$ para una infinidad de k's decimos que z_0 es singularidad esencial

(ii) $\Rightarrow$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_k}{(z-z_0)^k}$

(iii) $\Rightarrow$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}$.

Ejemplos:

- $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ tiene una singularidad en $z_0 = 0$. y es esencial.

Sol. sabemos que $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$ $\Rightarrow$ $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z-0)^{-n}$ y como $b_n = \frac{1}{n!} \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$z_0 = 0$ es esencial.

- La función $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^5}$ tiene una singularidad del tipo polo de orden 4.

Dem.- tiene una singularidad en $z_0 = 0$

sabemos que $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$\Rightarrow f(z) = \dfrac{(z + \frac{z^2}{2!} + \cdots)}{z^5} = \underbrace{\dfrac{1}{z^4} + \dfrac{1}{2!\,z^3} + \dfrac{1}{3!\,z^2} + \dfrac{1}{4!\,z}}_{\text{parte singular}} + \dfrac{1}{5!} + \dfrac{z}{6}$

$\therefore$ $z_0 = 0$ es polo de orden 4.

Proposición.- Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abto, $z_0 \in U$ y $f: U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ analítica. Las sig. afirmaciones son equivalentes.

(1) z_0 es una singularidad removible.

(2) Existe $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$

(3) $f(z)$ está acotada en una vecindad de z_0

(4) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = 0$

Dem:

(1)$\Rightarrow$(2) Como z_0 es removible $\Rightarrow f(z) = \sum\limits_{n \geq 0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ y así $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a_0$.

(2) $\Rightarrow$ (3) De la definición de límite se obtiene.

(3) $\Rightarrow$ (4) Como $\lim\limits_{z \to z_0} z - z_0 = 0$ y $f(z)$ es acotada en una vecindad de z_0 se sigue el resultado

(4) $\Rightarrow$ (1)

Recordemos que para la serie de Laurent $b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w)(w$

Sea $\varepsilon > 0$. por hip. $\exists \delta > 0$ t.q. si $|w - z_0| < \delta$ $\Rightarrow |f(w)(w - z_0)| < \varepsilon$

$\Rightarrow |f(w)| < \dfrac{\varepsilon}{|w - z_0|}$. si $|w - z_0| < \delta/2$

$\Rightarrow |b_n| < \dfrac{1}{2\pi} \int_\gamma \dfrac{\varepsilon}{\delta/2} (\delta/2)^{n-1} |dw| = \varepsilon\,(\delta/2)^{n-1}$

y por tanto $b_n = 0$ $\forall n$

Escaneado con CamScanner

También tenemos varias equivalencias cuando z_0 es un polo de orden menor o igual que k.

Proposición.- Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abto, $z_0 \in U$ y $f: U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ analítica y $k \geq 1$. Los sig. son equivalentes.

(1) z_0 es un polo de orden k

(2) Existe $\lim_{z \to z_0} f(z)(z-z_0)^k$.

(3) $f(z)(z-z_0)^k$ está acotada en una vecindad de z_0

(4) $\lim_{z \to z_0} f(z)(z-z_0)^{k+1} = 0$

Dem.- Se sigue de lo anterior. ■

Finalmente las singularidades más complicadas son las esenciales, como muestra de esto se tienen los sig. resultados

Teorema (Casorati - Weierstrass).- Sea $f: U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ analítica con una singularidad esencial en z_0. Entonces, para cualquier vecindad V de z_0 contenida en U, la imagen de $V \setminus \{z_0\}$ bajo f es densa en $\mathbb{C}$.

Dem.- Basta demostrarlo para $D(z_0, r)$ contenido en U. Por contradicción sup. que la imagen de $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ no es densa en $\mathbb{C}$. Entonces existe $w \in \mathbb{C}$ y $\delta > 0$ t.q. $|f(z) - w| > \delta$ para todo $z \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$.

Podemos definir entonces $g: D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ como

$$g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$$

Notemos que $|g(z)| < \frac{1}{\delta}$ y $\lim_{z \to z_0} g(z)(z-z_0) = 0$, por lo que g tiene una singularidad removible en z_0, entonces podemos definir a g en z_0 para que sea analítica

De aquí tendremos dos casos.

- Si $g(z_0)=0$, entonces z_0 es de orden finito
  $\Rightarrow f(z) = \frac{1}{g(z)} + w$
  y por tanto z_0 es de orden finito para f, lo que contradice que sea esencial
- Si $g(z_0) \neq 0$ entonces $f(z)$ es analítica en z_0 por lo que de nuevo se contradice la hipótesis.

$\therefore$ la imagen es densa en $\mathbb{C}$.

Teorema.- Sea $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ analítica con una singularidad esencial en z_0. Entonces para cualquier vecindad V de z_0 en U, la imagen de la restricción de $V \setminus \{z_0\}$ bajo f cubre a todo el plano, excepto tal vez por un solo punto.

Def.- Decimos que una función $f : U \to \mathbb{C}$ es meromorfa si y solo si sus únicas singularidades son removibles o polos de orden finito en U.

Ejemplos.-

- La función $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ está definida en todo el plano complejo excepto el origen. Sin embargo el punto $z=0$ es una singularidad esencial por lo que no es meromorfa en $\mathbb{C}$
  sin embargo, es meromorfa (incluso holomorfa) en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- La función $f(z) = \ln(z)$ no es meromorfa en $\mathbb{C}$, ya que no puede ser definida de forma continua en todo $\mathbb{C}$ y ni siquiera quitando un conjunto de puntos aislados.

Obs.- Como los polos de una función meromorfa son aislados, a como mucho puede haber una cantidad numerable

Con esto es claro que $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ no es meromorfa.

Def.- Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ región, $z_0 \in U$ y $f: U \to \mathbb{C}$ analítica.

- Decimos que $z_0 \in U$ es un cero de orden K de f si y solo si:

$$f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \cdots = f^{(K-1)}(z_0) = 0 \quad y \quad f^{(K)}(z_0) \neq 0$$

- Decimos que $z_0 \in U$ es un cero de orden infinito de f si y solo si:

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Ahora pondré unos resultados sin su demostración (su demostración en las notas de mi hermano)

Corolario 1.- Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ región, $f: U \to \mathbb{C}$ analítica y z_0 un cero de orden infinito. Entonces f es idénticamente nula en U. ($f \equiv 0$)

Corolario 2.- Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ región, $f, g: U \to \mathbb{C}$ analíticas. Sup. que existe $z_0 \in U$ t.q. $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces $f \equiv g$ en U.

Lema.- Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ región, $f: U \to \mathbb{C}$ analítica y $z_0 \in U$. Si z_0 es un cero de orden K, ent. existe una vecindad V de z_0, donde f se puede escribir como

$$f(z) = f_K(z)(z - z_0)^K \quad \text{con} \quad f_K: V \to \mathbb{C}, \quad f_K(z_0) \neq 0.$$

Dem.-

Proposición.- Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ región, $f: U \to \mathbb{C}$ función. Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es un polo de orden finito de f si y solo si $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Dem.- Se usa el Lema para la segunda implicación.

Proposición.- Sea $f: U \to \mathbb{C}$ analítica y $z_0 \in U$. Entonces z_0 es un cero de orden k de f si y solo si z_0 es un polo de orden k de $1/f$.

Más aún si $h: U \to \mathbb{C}$ es analítica y $h(z_0) \neq 0$, ent. h/f tiene un polo de orden k en z_0.

Dem.-

$\Rightarrow]$ Como z_0 es cero de orden k, por lema anterior $f(z) = f_k(z)(z-z_0)^k \Rightarrow \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{f_k(z)(z-z_0)^k}$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{f(z)}}_{} (z-z_0)^k = \underbrace{\frac{1}{f_k(z)}}_{}$, con $f_k(z_0) \neq 0$

Con esto $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)}(z-z_0)^k = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f_k(z)}$ el cual existe pues $f_k(z)$ es analítica en una vecindad de z_0 y $f_k(z_0) \neq 0$ $\therefore$ z_0 es polo de orden k.

$\Leftarrow]$ Sup. que z_0 es un polo de orden k
$\Rightarrow \exists\, g(z) = \frac{1}{f(z)(z-z_0)^k}$ y $g(z_0) \neq 0$ con g analítica en una vecindad. Ahora $f(z) = \frac{1}{g(z)}(z-z_0)^k$ donde $\frac{1}{g(z)}$ es analítica en una vecindad de z_0 y $\frac{1}{g(z_0)} \neq 0$

$\therefore$ z_0 es cero de orden k.

Corolario.- Sean $f, g: U \to \mathbb{C}$ analíticas y sea $z_0 \in U$ sup. que z_0 es un cero de orden h para g y de orden k para f entonces:

$$f/g \text{ tiene en } z_0 \begin{cases} \text{cero de orden } k-h & \text{si } k > h \\ \text{polo de orden } h-k & \text{si } h > k \\ \text{singularidad removible} & \text{si } h = k \end{cases}$$

Escaneado con CamScanner