Ramas.-

Recordando a la "función" argumento, tenemos que $\arg: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ sin embargo esto no es una función pues $\arg(z) = \theta + 2\pi k$, entonces esta es una relación y la forma de arreglarlo es restringir el ~~dom~~ contradominio.

Consideremos $\arg: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to [0, 2\pi]$ y con ello esta si es una función.
Este tipo de manipulaciones serán usadas en varias partes. En este ejemplo lo que hacemos es fijar una "Rama" para el argumento. ~~Esta rama se conoce como argumento principal~~.

Def.- Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo, entonces se define la rama-α del argumento a la función
$\arg_\alpha: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to [\alpha, \alpha + 2\pi]$

Si $\alpha = -\pi \Rightarrow \arg_{-\pi} := \operatorname{Arg}$ será la rama principal.

Obs.- $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\arg_\alpha(z) = \operatorname{Arg}(z) + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$ t.q. $\operatorname{Arg}(z) + 2\pi k \in [\alpha, \alpha + 2\pi]$

El argumento cumple varias propiedades sin embargo las ramas del argumentos no la cumplen.

Def.-

Teorema.- Sean $z, w \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$, entonces el argumento cumple las sig. propiedades

(1) $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$

(2) $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$

(3) $\arg(z^n) = n \arg(z)$

(4) $\arg(r \cdot z) = \arg(z)$.

Por ejemplo, el argumento principal únicamente cumple (4)

Ejemplos.-

- $\operatorname{Arg}(i \cdot (-1)) = \operatorname{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$

pero $\operatorname{Arg}(i) + \operatorname{Arg}(-1) = \frac{\pi}{2} + \pi$

$\therefore \operatorname{Arg}(i \cdot (-1)) \neq \operatorname{Arg}(i) + \operatorname{Arg}(-1)$

Teorema.- Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\arg_\alpha$ cumple que $\forall r \in \mathbb{R}^+$, $\arg_\alpha(r \cdot z) = \arg_\alpha(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Dem.-

Nota: $\arg_\alpha(z)$ es discontinua a lo largo del rayo $l_\alpha = \{ re^{i\alpha} \mid r \in \mathbb{R}^+ \}$. En efecto sean $z_n = re^{i(\alpha+\frac{1}{n})}$ $\wedge$ $w_n = re^{i(\alpha-\frac{1}{n})}$ dos sucesiones t.q. $z_n \to z = re^{i\alpha}$ $\wedge$ $w_n \to z$ sin embargo sus imagenes convergen a dos cosas distintos.

$\arg_\alpha(z_n) = \alpha + \frac{1}{n}$, pues $\alpha + \frac{1}{n} \in (\alpha, \alpha+2\pi)$
$\wedge$ $\arg_\alpha(w_n) = \alpha - \frac{1}{n} + 2\pi$, pues $\alpha - \frac{1}{n} \notin (\alpha, \alpha+2\pi)$
y entonces $\arg_\alpha(z_n) \to \alpha$, pero
$\arg_\alpha(w_n) \to \alpha + 2\pi$

$\therefore$ $\arg_\alpha$ es discontinua en l_α.

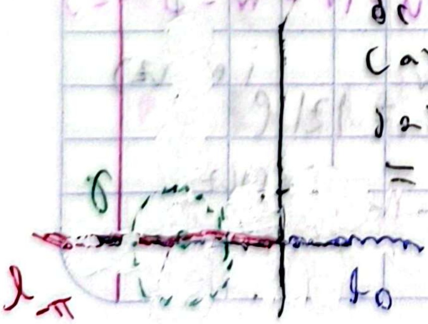
Def. (corte de rama $\arg_\alpha$) sea $f(z) = \arg_\alpha(z)$
El corte de rama para f viene dado por el rayo

$$l_\alpha = \{ z \in \mathbb{C} : \arg z = \alpha \}$$

Ejemplo.-

Calcular $\displaystyle\int_{|z+2|=1} \operatorname{Arg} z \, dz$

Sol.- notemos que γ pasa por el corte de rama, con lo que nos conviene cambiar de rama.
Sabemos que $\exists k_0 \in \mathbb{Z}$ t.q. $\operatorname{Arg}(z) = \arg_0(z) + 2\pi k_0$



$\Rightarrow \int_\gamma \operatorname{Ar} \cdot = \int_\gamma \arg_0(z) + 2\pi k_0 = \int_\gamma \arg_0(z).$

Def.- Diremos que $z=0$ es un punto de ramificación para $\arg_\alpha(z)$.
Esto es pues $z=0$ pertenece a todos los cortes de rama.
Así mismo $z=\infty$ es punto de ramificación

Def.- Recordando, dado $z\in\mathbb{C}$ se define a la función exponencial como:

$$e^z := e^x\,[\cos(y) + i\sin(y)]$$

Propiedades:

- $e^{z+w} = e^z \cdot e^w \quad \forall z,w\in\mathbb{C}$
- $e^{z-w} = \dfrac{e^z}{e^w} \quad \forall z,w\in\mathbb{C}$
- $e^0 = 1$
- La función tiene periodo $2\pi i$ pues $e^{z+2\pi i} = e^z$

Ahora para la inversa se hace el sig. análisis.

Quiero funciones u, v t.q. $u+iv = w = f^{-1}(z)$

$\Rightarrow f(w) = z \Rightarrow e^w = z \Rightarrow e^w = |z|\,e^{i\arg(z)}$

$\Rightarrow e^{u+iv} = |z|\,e^{i\arg(z)} \Rightarrow e^u \cdot e^{iv} = |z|\,e^{i\arg(z)}$.

logaritmo natural real

$\Rightarrow$ • $e^{u} = |z|$ $\Rightarrow$ $u = \ln|z|$

• $v = \arg(z)$

$\Rightarrow f^{-1}(z) = \ln|z| + i\arg(z)$

Def.- Dado $z \in \mathbb{C}$, se define a la relación logaritmo como a la relación

$$\operatorname{Log}(z) = \ln|z| + i\arg(z) \quad ?$$

Dado un $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo se define a la función "rama α del logaritmo" a la función

$$\operatorname{Ln}_\alpha : \mathbb{C} \setminus \ell_\alpha \to B_\alpha$$

$$\operatorname{Ln}_\alpha z = \ln|z| + i\arg_\alpha z$$

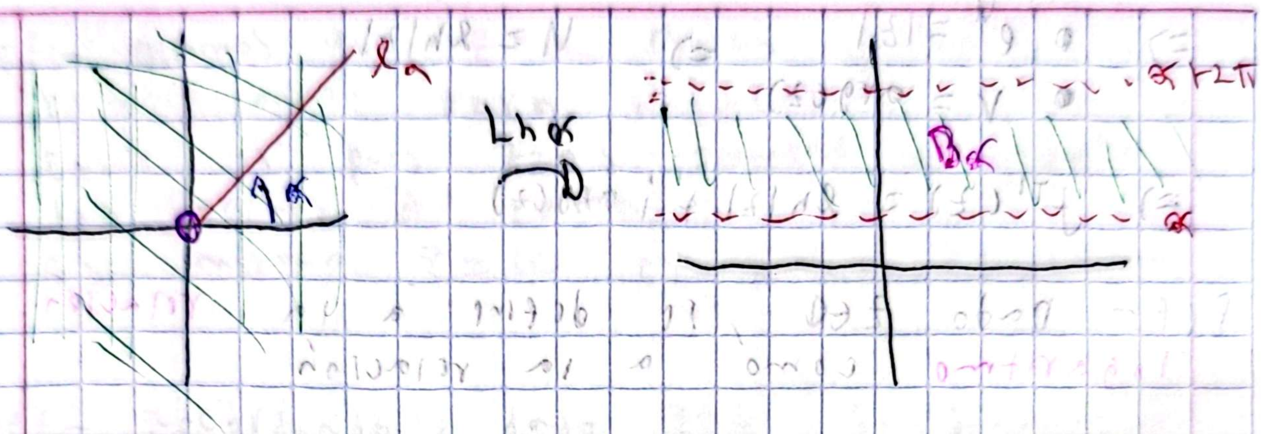
Finalmente definimos la rama principal del logaritmo como la función

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$$

Obs.- El corte de rama para $\operatorname{Ln}_\alpha z$ es ℓ_α

Propiedades:

- $e^{\operatorname{Ln}_\alpha z} = z \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- $\operatorname{Ln}_\alpha(e^{z}) = z \quad \forall z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi\}$

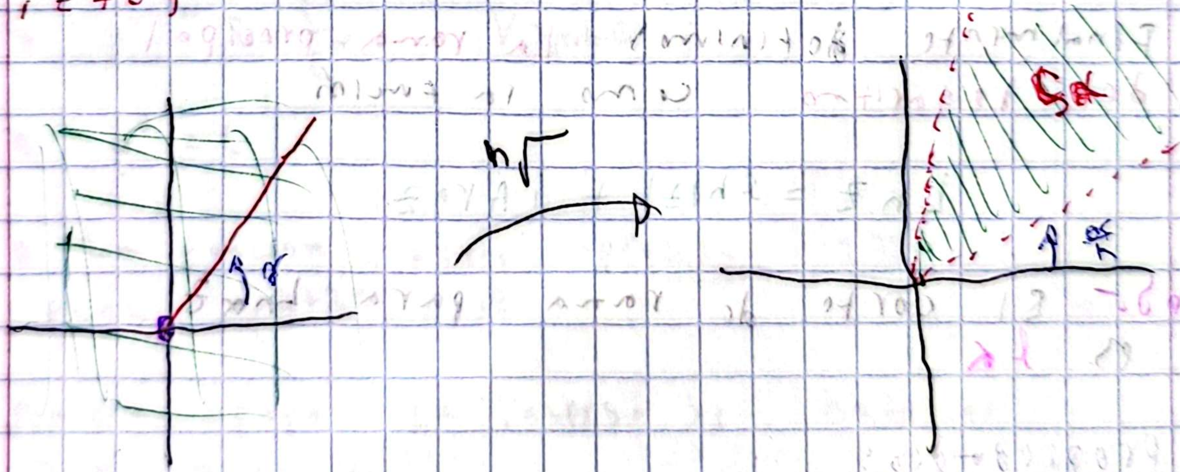


Def.- Sea $z \in \mathbb{C}$ se define la función raíz n-ésima, a la función:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|\, e^{i\arg_\alpha(z)}} = |z|^{\frac{1}{n}}\, e^{i\frac{\arg_\alpha(z)}{n}}$$

$$\sqrt[n]{\ } : \mathbb{C}\setminus \ell_\alpha \to S_\alpha$$

Obs.- Nuevamente el corte de rama será ℓ_α y la imagen será $S_\alpha = \{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{\alpha}{n} < \operatorname{Im} z < \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}, z \neq 0 \}$



Obs.- Si no se especifica, $\sqrt[n]{\ }$ representa la rama principal, con $\alpha = -\pi$

Def.- Sea $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces se define a la función exponencial $f: \mathbb{C} \setminus \ell_\alpha$ tq $f(z) = z^b := e^{b \cdot \ln_\alpha z}$

obs.- ¿cuales son los puntos de ramificación de $f(z) = \sqrt{z^2-1}$ para una rama cualquiera?

Una posible idea de verlo es decir:
sabemos que el corte de rama de $\sqrt{\ }$ es ℓ_α y los puntos de ramificación son $z=0$ y $z=\infty$ entonces podríamos decir que los nuevos puntos serían cuando $z^2-1=0$ ∧ $z^2-1=\infty$ ⇒ $z=\pm 1$ ∧ $z=\infty$

¡ Sin embargo $z=\infty$, no es punto de ramificación !

Lo que obtenemos, es únicamente los posibles candidatos, y esto pasara en general porque los puntos de ramificación son difíciles de calcular.

Teorema.- Sean $f: U \to \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ abto y $z_0 = a+bi \in U$, con $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$.
$z = x+iy$
Entonces, f es continua en $z_0 = a+ib$ si y solo si u, v son continuas en (a,b)

Def.- (Derivada) Sea $f: U \to \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ abto. Decimos que f es derivable en sentido complejo en z_0 si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ existe y es finito}$$

Lo denotaremos por $f'(z_0)$

Def.- Decimos que $f: U \overset{\text{abto}}{\subseteq} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica o holomorfa en z_0 si existe $\varepsilon > 0$ t.q. $f'(z)$ existe para todo $z \in D(z_0, \varepsilon)$

Diremos que f es analítica en $\overset{\text{abto}}{\Omega}$ si lo es en todo punto de Ω

Obs.- Todas las derivadas de fu. usuales serán igual que el caso real, excepto en las que haya cortes de rama.

Por ejemplo $f(z) = \ln_\alpha(z)$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \ell_\alpha$ y $f'(z) = \frac{1}{z}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \ell_\alpha$

Teorema.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abto y $f: \Omega \to \mathbb{C}$ t.q. $f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$, con $u, v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entonces f es diferenciable en $x_0 + i y_0$ si y sólo si u y v son diferenciables en (x_0, y_0) y además

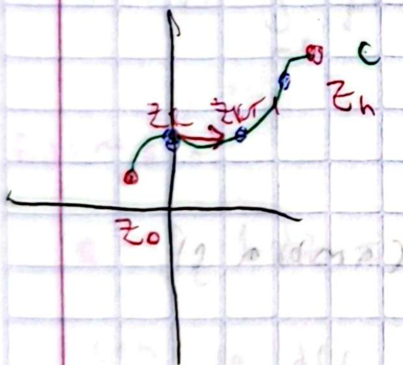
$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \text{en } (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

Obs.- $f(z) = x^2 - y^2 + xyi$ es diferenciable en $(0,0)$ pero no es analítica en $(0,0)$

Def.- Dada una curva C, se define la integral de f sobre C como el límite (de existir)

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\,\Delta z_k$$

con z_k^* un punto entre z_{k-1} y z_k



Lo que más nos convendría es tener una parametrización de la curva

- curva suave $\Rightarrow$ $\gamma'(t)$ continua
- curva simple $\Rightarrow$ inyectiva
- curva cerrada $\Rightarrow$ $\gamma(a) = \gamma(b)$

Teorema.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y γ una curva suave por partes en Ω. Si f es continua sobre la curva γ, entonces la integral compleja existe y se cumple que

$$\int_c f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

donde γ es la parametrización de C.

Ejemplo:

- $\displaystyle\int_{|z-z_0|=R} \frac{1}{z-z_0}\,dz$

Sol.- La función $f(z)=\frac{1}{z-z_0}$ es continua en γ, pues $z_0 \notin \gamma$ y entonces la integral existe. $\gamma(t)=z_0+Re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$

$$\Rightarrow \int_\gamma f = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_0+Re^{it}-z_0}\cdot iRe^{it}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$$

Propiedades importantes

1) El sentido de la curva cambia el signo de la integral

$$\int_{-C} f = -\int_C f$$

2) La integral no depende de la parametrización de la curva

3) Si $\gamma=\gamma_1+\gamma_2 \Rightarrow \int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$

Def: Se define a la integral de línea como:

$$\int_C f\,|dz| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\,|\Delta z_k|$$

Teorema: Si $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es continua sobre una curva C suave con parametrización $\gamma(t)$, $a \le t \le b$ entonces

$$\int_C f(z)\,|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt$$

Obs: $\displaystyle\int_{-C} f(z)\,|dz| = \int_C f(z)\,|dz|$

Ejemplo:

- $\int_C 1\,dz = z_2 - z_1$ pero $\int_C 1\,|dz| = \text{long}(\gamma)$

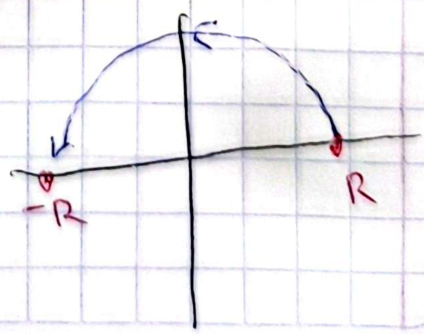
con la def $\Rightarrow \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \text{long}(\gamma)$

Teorema: Se cumple $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,|dz|$

Ejemplo

- $\displaystyle\int_{C_R} \frac{1}{1+z^2}\,dz$, con

$C_R(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$



por lo anterior

$$* \left| \int_{C_R} \frac{1}{1+z^2}\, dz \right| \le \int_{C_R} \left| \frac{1}{1+z^2} \right| |dz|$$

y como $|z^2+1| = |z^2 - (-1)| \ge |z|^2 - 1$

$\Rightarrow * \le \int_{C_R} \frac{1}{|z|^2-1}\, |dz|$

pero como $z \in C_R \Rightarrow |z| = R$

$\Rightarrow * \le \int_{C_R} \frac{1}{R^2-1}\, |dz| = \frac{1}{R^2-1} \int_{C_R} |dz|$

$= \frac{1}{R^2-1}\, \text{long}(C_R) = \frac{1}{R^2-1} \cdot \frac{\pi}{2}(2R) =$

$\Rightarrow \left| \int \sim \right| \le \frac{\pi R}{2R^2-2}$

$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \left| \sim \right| \le \lim_{R\to\infty} \frac{\pi R}{2R^2-2} = 0$

$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{1+z^2}\, dz = 0$

Teorema I. Si F es analítica sobre una curva suave $C \subset \Omega$ (Ω región) t.q. $F'(z) = f(z)\ \forall z$ entonces:

$$\int_C f(z)\,dz = F(z_b) - F(z_a)$$
$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Proposición.- Si f tiene antiderivada, entonces ~~son equivalentes~~

1) La integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ es independiente de la trayectoria

2) Si C es curva cerrada entonces $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Teorema I, sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en una región $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ entonces las sig. son equivalentes:

1) $\int_C f(z)\,dz$ es independiente de la curva

2) para toda curva cerrada $\gamma \subset \Omega$

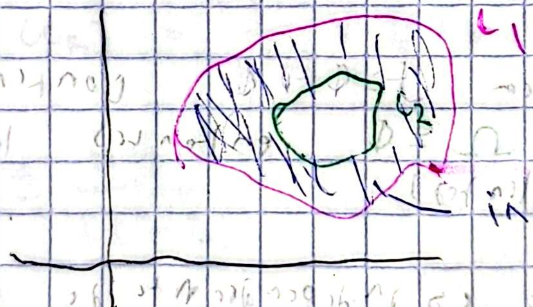
$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

3) $\exists\ F$ analítica en Ω t.q. $F' = f\ \forall z \in \Omega$

Teorema de Cauchy-Goursat.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una región y C una curva cerrada simple en Ω. Si f es analítica sobre y en el interior de la curva C entonces

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

Teorema (Deformación).- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región y $f: \Omega \to \mathbb{C}$. Sean C_1 y C_2 curvas cerradas en sentido positivo t.q C_1 está completamente contenida en $\text{int}\, C_2$

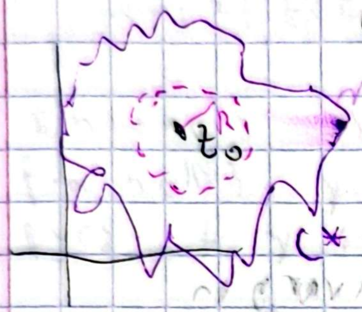


Si f es analítica en $\text{int}\, C_1 \cap \text{ext}\, C_2$ y sobre ambos curvas, entonces

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

Ejemplo.-

$$\int_{C^*} \frac{1}{z-z_0}\, dz = \int_{|z-z_0|=R} \frac{1}{z-z_0}\, dz = 2\pi i$$



pues $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ es analítica en $\text{int}\, C^* \cap \text{ext}\, B_R(z_0)$ y sobre ambas curvas.

Formula integral de Cauchy.- Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y C una curva cerrada simple. Si f es analítica en $\overline{\text{int}\, C}$ entonces

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \quad \forall z_0 \in \text{int}\, C$$

Def.- Se determina la serie de potencias como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad \text{con } a_k \in \mathbb{C},\ z_0 \in \mathbb{C}$$

Existe un único R / $0 \le R \le \infty$ t.q.
si $|z-z_0| < R \Rightarrow$ la serie converge
si $|z-z_0| > R \Rightarrow$ la serie diverge

Teorema.- Toda función analítica f en una región Ω tiene representación en series de potencias alrededor de cada punto $z_0 \in \Omega$ y además

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

Obs) Las series de potencias convergen uniformemente

$$\Rightarrow \int_C \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_C (z-z_0)^k dz$$

$$\text{y} \quad \frac{d}{dz}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{d}{dz}(z-z_0)^k$$

Teorema.- Sea f analítica en una región Ω y $a \in \Omega$, entonces:

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + f_n(z)(z-a)^n$$

donde f_n es analítica en Ω y además

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t-a|=R} \frac{f(w)}{(w-a)^n (w-z)} dw$$

donde $D(a,R) \subset \Omega$

Sea $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con Ω región y f analítica, defino

$$\Omega_1 = \{ z \in \mathbb{C} : f(z) = 0 \wedge f^{(n)}(z) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \}$$

Entonces $\Omega \setminus \Omega_1 = \{ z \in \mathbb{C} : f(z) \neq 0 \vee f^{(n)}(z) \neq 0$ p.a. $n \in \mathbb{N} \}$ y este conjunto es abierto pues f y sus derivadas son continuas.

$\Rightarrow \Omega = \Omega_1 \cup (\Omega \setminus \Omega_1)$ y entonces es unión de dos abiertos disjuntos y como Ω es conexo $\Rightarrow \Omega = \Omega_1$ o $\Omega = \Omega \setminus \Omega_1$

Si pasa lo primero, entonces $f \equiv 0$ y entonces lo que estamos diciendo es que

"Dada una función no nula t.q $f(z_0) = 0$ entonces no puede pasar que todas las derivadas en z_0 se anulen"

Entonces debe existir $k \in \mathbb{Z}^+$ t.q $f^{(k)}(z_0) \neq 0$

Def.- Si $k \geq 1$ es el mínimo entero t.q

$$f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

entonces decimos que z_0 es un cero de orden k

Ejemplo

- $f(z) = \operatorname{sen}(z)$ y $z_0 = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ z_0 es de orden 2, pues $f^{(2)}(z_0) = 0$.

Obs.- Sea $z_0 \in \Omega$ cero de orden k entonces por el teorema anterior

$$f(z) = (z - z_0)^k f_k(z), \quad \text{con } f_k(z_0) \neq 0$$

Teorema.- Los ceros (raíces) de una función analítica son aislados

Teorema.- Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ analítica (región) t.q. $f(z) = 0$ $\forall z \in B$ que tiene un punto de acumulación en Ω
$\Rightarrow$ $f(z) = 0$ en Ω

Def.- (Singularidades) Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$, Ω región, $z_0 \in \Omega$
Decimos que z_0 es una singularidad de f si f no es analítica en z_0.

Si existe $\varepsilon > 0$ t.q. f es analítica $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$, entonces decimos que z_0 es una singularidad aislada

Ejemplos

- $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ z_0 es singularidad aislada

- $f(z) = Ln_\alpha(z)$, las singularidades no son aislados!

Teorema.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región y $f: \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ analítica. Entonces existe una única función analítica $\tilde{f}$ en Ω que coincide con f en $\Omega \setminus \{z_0\}$ si y solo si

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$$

[redacted]

Ejemplos:

- $f(z) = \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$ es singularidad aislada pero $\lim_{z \to 0} (z-0)\frac{1}{z} = 1 \neq 0$

¿Existe $\tilde{f}$ tq. sea analítica en $\mathbb{C} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$?

- f analítica en Ω y $z_0 \in \Omega$, entonces $G(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ no es analítica en z_0

pero $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) G(z) = 0$

Def.- Sea z_0 singularidad aislada de f.
Entonces decimos que z_0 es singularidad removible si y solo si $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe.

Def.- Decimos que f es analítica en $z=\infty$ si $g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$ tiene una singularidad removible en $z=0$

Ejemplo:

- $f(z)=\frac{\sin(z)}{z}$, $z=0$ es sing. aislada removible
- $f(z)=z$, es entera (analítica en $\mathbb{C}$)

pero $f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z}$ no tiene singularidad removible en 0

$\therefore$ $f(z)=z$ no es analítica en ∞

¿Existe f t.q. sea analítica en $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$?

Teorema.- Si f es analítica en $\hat{\mathbb{C}}$, entonces f es constante.

Dem.- Teorema de Liouville

Def.- Sea z_0 singularidad aislada de f. Decimos que z_0 es un polo de orden k si:

- $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ y $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ tiene un cero de orden k en z_0.

$z = \infty$ es un polo de f si $g(z) = f(\frac{1}{z})$ tiene un polo en $z = 0$

~~Obs.- z_0 es polo de orden k de f $\iff$ z_0 es cero de orden k de $\frac{1}{f}$~~

Ejemplo.-

- Como $\sin(z)$ tiene ceros de orden 2 en $z = \pi n$ entonces $\frac{1}{\sin(z)}$ tiene polos de orden 2 en $z = \pi n$.

- $f(z) = z$, tiene polo de orden 1 en $z = \infty$.

Def.- (Función meromorfa). Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ región y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Si f es analítica en Ω excepto en polos, entonces decimos que f es meromorfa

Obs.- f es meromorfa en $\hat{\mathbb{C}}$ si $z = \infty$ es a lo sumo un polo

Obs.- producto y cociente de funciones meromorfas es meromorfas

Teorema.- Si f es meromorfa en $\hat{\mathbb{C}}$, entonces tiene un número finito de polos

Dem.- Sea $S_p = \{$polos (finitos) de $f\}$

- Por hip. $z=\infty$ es singularidad removible o es un polo, en cualquier caso es una singularidad aislada

$\Rightarrow$ f es analítica en $D(\infty, r)$ para $r>0$ por lo que $S_p \subset \overline{D(0,r)}$ (compacto)

Sup. por contradicción S_p es infinito y como $\overline{D(0,r)}$ es compacto $\Rightarrow$ S_p tiene un punto de acumulación en $\overline{D(0,r)}$

Sea p_0 dicho punto de acumulación

$\Rightarrow$ • $D(p_0, \varepsilon) \setminus \{p_0\}$ tiene polos de f $\forall \varepsilon > 0$

• $z = p_0$ es una singularidad no aislada de f

Lo cual contradice que f es meromorfa

Def.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región y $z_0 \in \Omega$ una singularidad aislada de f. $z = z_0$ es singularidad esencial si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \text{ no existe en } \tilde{\mathbb{C}}$$

Def.- Una serie de Laurent alrededor de z_0 es una expresión de la forma

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z-z_0)^{-k}}_{\text{parte principal}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k}_{\text{parte regular}}$$

El residuo de f en z_0 se define como

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1}$$

Teorema.- Si f es analítica en una región Ω que contiene a la corona $r < |z - z_0| < R$ entonces existe una serie de Laurent alrededor de z_0 que converge y coincide con f en dicha corona.
(la convergencia es uniforme en subcoronas cerradas)

Además los coeficientes vienen dados por

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0| = r_0} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} \, dw$$

obs:

- Si z_0 es removible $\Rightarrow$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

- Si z_0 es polo de orden m $\Rightarrow$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} a_{-k} (z-z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

- Si z_0 es esencial $\Rightarrow$

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z-z_0)^{-k}}_{\text{infinitos no cero}} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

Teorema.- Si f es entera y tiene una singularidad no esencial en $z=\infty$ $\Rightarrow$ f es un polinomio

Teorema.- Si $z=z_0$ es un polo de orden k, entonces

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}} \left((z-z_0)^k f(z) \right)$$

Obs:- teniendo $\int_{|z|=1} \cosh(\frac{1}{z})\,dz$, no podemos integrarla con las formas en que sabemos pero la serie de Laurent nos ayudará

$$\Rightarrow \int_{|z|=1} \cosh(\tfrac{1}{z}) = \int_{|z|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \cdot \frac{1}{z^{2k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^{2k}} = \sum \cdot \int_{|z|=1} \frac{1}{(z-0)^{2k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \cdot 0 = 0 \qquad \cancel{\int_{|z|=1} \frac{1}{(z-0)^{n}} = 0 \text{ si } n \neq 1.}$$

pues $2k \neq 1$

Teorema del residuo.- Sea γ curva cerrada simple t.q. f es analítica en int γ excepto en un número finito de puntos $z_1, \ldots, z_n$, entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

Ejemplo:

• $\int_\gamma \frac{dz}{z^2-1}$, con $\gamma: |z|<2$

notemos que $\lim_{z\to 1} (z-1)f(z) = \frac{1}{2}$ y $\lim_{z\to -1} (z+1)f(z) = \frac{1}{-2}$

$\therefore \operatorname{Res}(f,1) = \frac{1}{2}$ $\quad \operatorname{Res}(f,-1) = \frac{1}{-2}$

$$\therefore \int_\gamma \frac{dz}{z^2-1} = 2\pi i\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Teorema: Sea γ curva cerrada simple tal que $f(z)$ analítica en $\overline{\text{int}\,\gamma}$ excepto en algunos puntos interiores

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \, \text{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

Ejemplos:

- $$\int_\gamma \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\,dz \quad ; \ a,b,c \in \text{int}\,\gamma$$

* Usando el teorema del residuo sabemos que $\int_\gamma \sim = 2\pi i\,[\text{Res}(f,a) + \text{Res}(f,b) + \text{Res}(f,c)]$

* Usando lo anterior

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{z}-a\right)\left(\frac{1}{z}-b\right)\left(\frac{1}{z}-c\right)}$$

$$= \frac{z}{(1-az)(1-bz)(1-cz)}$$

y entonces $\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$ es analítica en 0

$\therefore \ \text{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = 0$

$\therefore \ \int_\gamma \sim = 2\pi i\,\text{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = 0$ ∎

$\int_0^{\partial} F(\sin(t), \cos(t))\, dt$

$\int_0^{\pi} \frac{dt}{10+8\cos(t)}$

Tenemos que $J = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{10+8\cos(t)}$

Sea $z = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$

$\Rightarrow \frac{1}{z} = e^{-it} = \cos(t) - i\sin(t)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}[z+\frac{1}{z}] = \cos(t)$ y $\frac{1}{2}[z-\frac{1}{z}] = \sin(z)$

y $dz = ie^{it}dt = iz\,dt$

$\Rightarrow \int \sim = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{ie^{it}[10+8\cos(t)]} dt$

$= \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz(10+8\cdot\frac{1}{2}[z+\frac{1}{z}])}$

$= \int_{|z|=1} \frac{1}{iz10+4iz^2+4i} = \frac{-i}{4}\int_{|z|=1} \frac{1}{(z+2)(z+\frac{1}{2})}$

$= -\frac{i}{4} 2\pi i \operatorname{Res}(f, -\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$

Lema de Jordan

Teorema.- Sea $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en $C_R = \{Re^{it} ; 0 \le t \le \pi\}$, $R>0$, entonces

$$\left|\int_{C_R} e^{iaz} g(z)\, dz\right| \le \frac{\pi}{a} \max_{z\in C_R} |g(z)| \quad a>0$$

Dem.- Tenemos que

$$\int_{C_R} |e^{iaz}||dz| = \int_0^{\pi} |e^{iaRe^{it}}| R\,dt$$

$z = Re^{it} \Rightarrow dz = Re^{it}dt$

$$= R\int_0^{\pi} |e^{iaR\cos(t) - aR\sin(t)}|\,dt$$

$$= R\int_0^{\pi} e^{-aR\sin(t)}\,dt$$

$\leq R\,\dfrac{\pi}{aR} = \dfrac{\pi}{a}$ y así se sigue el resultado.

Ayudante

- Calcular $I = \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos(3x)}{(x^2+1)^2}$

Sol.- Tenemos que $e^{i(3x)} = \cos(3x) + i\sin(3x)$

$\Rightarrow \cos(3x) = Re[e^{3xi}]$

$$\Rightarrow I = Re\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3ix}}{(x^2+1)^2}\,dx\right]$$

$$= Re\left[\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \sim\,dx\right]$$

$$= Re\left[\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{e^{3iz}}{(z^2+1)^2} + \int_{C_R} f\sim\,dz\right]$$

Por el Lema de Jordan

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{i3z}}{(z^2+1)^2}\right| \leq \frac{\pi}{3}\max_{z\in C_R}\left|\frac{1}{(z^2+1)^2}\right| \leq \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{(R^2-1)^2}$$

$\Rightarrow$ si $R \to \infty \Rightarrow \int_{C_R} \sim dz = 0$

Así $I = \operatorname{Re}\left[\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz\right]$

$= \operatorname{Re}\left[\lim_{R\to\infty} 2\pi i \operatorname{Res}(f,i)\right] = \operatorname{Re}\left[2\pi i \operatorname{Res}(f,i)\right]$

y $z=i$ es polo de orden 2, pues $z=i$ es cero de orden 2 de $(z^2+1)^2$

$\Rightarrow \operatorname{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 \frac{e^{i3z}}{(z^2+1)^2}\right]$

$= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{e^{i3z}}{(z+i)^2}\right] = \lim_{z\to i} \frac{i e^{i3z}(3i+3z)}{(z+i)^3}$

$= -\frac{i}{e^3}$

$\therefore I = \operatorname{Re}\left[2\pi i \cdot \frac{-i}{e^3}\right] = \frac{2\pi}{e^3}$ ∎

Def.- (Valor principal de Cauchy): Sea f continua en $\mathbb{R}$, entonces se define su valor principal como

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

Si f es continua en $[a,b]\setminus\{c\}$, entonces

$$P.V. \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{R\to 0^+} \int_a^{c-R} f(x)\,dx + \int_{c+R}^{b} f(x)\,dx$$

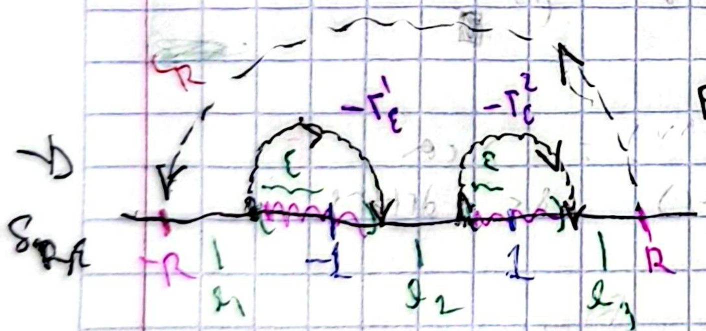
Obs: La existencia de p.v no implica a la convergencia de las integrales impropias.

Ejemplos

- $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ no converge pero $p.v\left(\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx\right)=0$
- $p.v\left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx\right)=0$
- calculemos $I = p.v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2-1}\,dx$.

Tenemos que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2-1}\,dx = Re \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-1}\,dx$

$$= \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left[\int_{-R}^{-1-\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{1+\varepsilon}^{R} f \right]$$



consideremos $-\Gamma_\varepsilon^1$ y $-\Gamma_\varepsilon^2$ pues estan recorridas en sentido horario.

y $S_{R,\varepsilon} = C_R + (-\Gamma_\varepsilon^1) + (-\Gamma_\varepsilon^2) + l_1 + l_2 + l_3$

$$\Rightarrow Re \int_{-\infty}^{\infty} \sim = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left[\int_{S_{R,\varepsilon}} f - \int_{-\Gamma_\varepsilon^1} f - \int_{-\Gamma_\varepsilon^2} f - \int_{C_R} f \right]$$

Como f es analitica en $\overline{\text{int } S_{R,\varepsilon}}$ para R suficientemente grande y ε suficientemente pequeño

$\Rightarrow \int_{S_{R,\varepsilon}} f = 0$ (y por el Lema de Jordan

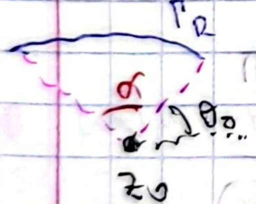
$\int_{C_R} f = 0$ cuando $R \to \infty$ y $\int_{Q_i} f = 0$ pues f analítica en Q_i)

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \sim \; = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon \to 0}} \left[\int_{\Gamma_\varepsilon^1} f + \int_{\Gamma_\varepsilon^2} f \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{\Gamma_\varepsilon^1} f + \int_{\Gamma_\varepsilon^2} f \right]$$

Aquí tenemos un problema, pues no podemos usar el Lema de Jordan.

En general consideramos el arco Γ_R sobre z_0, y g analítica t.q. g no es analítica en z_0 con $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$



entonces quiero saber

$$\lim_{R \to 0^+} \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z - z_0}$$

Sea $F(R) = \frac{1}{\alpha i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$

Sea $z = z_0 + R e^{it}$, con $t \in [\theta_0, \theta_0 + \alpha]$ parametrización de Γ_R $\Rightarrow dz = R i e^{it} dt$

$$\Rightarrow F(R) = \frac{1}{\alpha i} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \alpha} \frac{f(z_0 + R e^{it})}{R e^{it}} \cdot R i e^{it} \, dt$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha} f(z_0 + R e^{it}) \, dt$$

Y quisiéramos que $\lim_{R\to 0} F(R) = \frac{1}{\alpha}\int_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha} f(z_0)$

$= f(z_0) \Rightarrow \lim_{R\to 0^+} F(R) = f(z_0)$

$$\Rightarrow \lim_{R\to 0^+} \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = i\alpha f(z_0)$$

Teorema: Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, $\alpha, \theta_0 \in \mathbb{R}$ y $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en $\overline{D(z_0, r_0)}$ para algún radio. Entonces

$$\lim_{R\to 0^+} \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = i\alpha f(z_0)$$

Regresando tendremos que

$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^1} \frac{e^{iz}}{z^2-1}\,dz \neq$ tenemos que $\theta_0 = 0$ y $\alpha = \pi$

y $g(z) = \frac{e^{iz}}{z-1}$ es analítica en $\overline{D(-1, \varepsilon)}$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^1} \frac{e^{iz}}{z^2-1} = \int_{\Gamma_\varepsilon^1} \frac{\frac{e^{iz}}{z-1}}{z+1} = i\pi g(-1) = i\pi \frac{e^{-i}}{-2}$$

$$y \int_{\Gamma_\varepsilon^2} \frac{e^{iz}}{z^2+1} = \frac{i\pi e^{i}}{2}$$

Por lo tanto $\int_{-\infty}^{\infty} \sim = Re \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{\Gamma_\varepsilon^1} + \int_{\Gamma_\varepsilon^2} \right]$

$= Re \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(i\pi \frac{e^{-i}}{-2} + i\pi \frac{e^{i}}{2} \right) = Re\left[\frac{e^{i}-e^{-i}}{2i} \right]\pi i \cdot i$

$= -\pi \sin(1)$

$\therefore \; P.V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2-1} = -\pi \sin(1)$

Corolario.- Sea g analítica excepto en z_0, entonces

$$\lim_{R\to 0} \int_{\Gamma_R} g(z)\,dz = \alpha i \operatorname{Res}(g, z_0)$$

con α el ángulo del segmento circular centrado en z_0.

Ej. Calcular $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}\,dx$

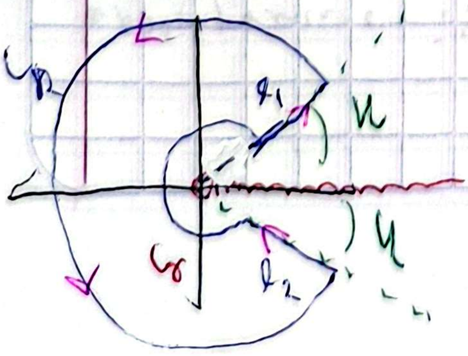
Sol.-

Tenemos que $\int_0^\infty = \lim_{R\to\infty} \int_{[0,R]} \frac{\sqrt[3]{z}}{z^2+1}\,dz$

Acá tendremos que la rama principal no nos servirá.

Así considero la rama $[0, 2\pi]$

y si ~~hiciéramos por def de pot~~ hacíamos



Tenemos que $\ell_1 := \varphi_1(t) = t e^{i\kappa}$, $r < t < R$

$\Rightarrow \varphi'(t) = e^{i\kappa}$

$\Rightarrow \int_{\ell_1} \frac{\sqrt[3]{z}}{z^2+1} dz = \int_r^R \frac{\sqrt[3]{t e^{i\kappa}}}{t^2 e^{i2\kappa}+1}$, donde $\kappa = \arg(\varphi_1(t))$

$= e^{\frac{i\kappa}{3}} \cdot e^{i\kappa} \int_r^R \frac{\sqrt[3]{t}}{t^2 e^{i2\kappa}+1} dt$

$\Rightarrow \lim_{\kappa \to 0^+} \int_{\ell_1} \sim dz = \int_r^R \frac{\sqrt[3]{t}}{t^2+1} dt$

$\Rightarrow \lim_{\kappa \to 0^+} \left(-\int_{-\ell_2} \sim dz \right) = \lim_{\kappa \to 0^+} - \int_r^R \frac{\sqrt[3]{t^2}\, e^{i(2\pi - \kappa)}}{t^2 e^{2i(2\pi-\kappa)}+1} \cdot e^{i(2\pi-\kappa)}$

$= -e^{\frac{2\pi}{3}} \int_r^R \frac{\sqrt[3]{t}}{t^2+1}$

y $\int_{\ell_1}$ y $\int_{\ell_2}$ no se anulan.

Def.– Se define a la transformada de Laplace de una función f como $(f:[0,\infty) \to \mathbb{R})$

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \quad , s \in \mathbb{R}$$

obs.– Hay que suponer que $s \in \mathbb{C} \Rightarrow s = x + iy$
$\Rightarrow F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Queremos ver bajo que condiciones F es analítica.

Def.– Decimos que $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ es de orden α-exponencial si existen $\alpha \in \mathbb{R}$, $M > 0$ t.q

$$|f(t)| < M e^{\alpha t} \quad \forall t \geq 0$$

Proposición.– Si f es integrable en $[0,T]$ $\forall T \geq 0$, y es de orden α-exponencial, $> \alpha$ entonces $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ existe para $R(s) > \alpha$

Dem.– En efecto

$$\int_0^\infty |e^{-st}||f(t)|\, dt \leq \int_0^\infty e^{-(R(s)-\alpha)t}\, dt \quad \text{que existe}$$

pues $R(s) > \alpha \Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ converge absolutamente $\therefore$ converge.

Recordemos: Regla de Leibniz
aunque también basta integrable.

Si $g(x,t)$ es continua en $[a,b]\times[c,d]$
y $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ es continua en $[a,b]\times[c,d]$

entonces: $G(x)=\int_a^b g(x,t)\,dt$ es continua. y

$$G'(x)=\int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Obs.- podemos escribir a la Trans. de Laplace como $F(s)=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}f(t)\,dt$ y sup. que f continua y f de orden exponencial.

Así, si $s=x+yi$, $x>0$, $|f(t)|$

$$\Rightarrow F(s)=\lim_{b\to\infty}\underbrace{\int_0^b e^{-tx}\cos(yt)f(t)\,dt}_{U_b(x,y)}+i\underbrace{\int_0^b -e^{-tx}\sin(yt)f(t)\,dt}_{V_b(x,y)}$$

y notemos que los integrandos son continuos y existen sus parciales

$\Rightarrow$ por Leibniz $U_b(x,y)$ y $V_b(x,y)$ y sus parciales son continuas.

¿si $b\to\infty$ estas propiedades se mantienen?

Def.- Sea $g: \Omega \times [a, \infty] \to \mathbb{R}$, decimos que $\int_a^\infty g(x,t)\,dt$ converge uniformemente, si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N > 0$ t.q $\forall x \in \Omega$ se cumple que

$$\text{si } \beta \geq N \Rightarrow \left| \int_\beta^\infty g(x,t)\,dt \right| < \varepsilon$$

Teorema (Weierstrass) Sea f como antes, si se cumple:

i) para cada $x \in [\beta_1, \beta_2]$, $f(x,t)$ es integrable respecto a t en $[a,c]$, $\forall c > a$

2) Existe una función positiva $M(t)$ en $[a, \infty]$ t.q $|f(x,t)| \leq M(t)$ $\forall t > a$ t.q $\int_a^\infty M(t)\,dt$ converge

~~Entonces $\int_a^\infty$ converge uniformemente~~.

Entonces $\int_a^\infty f(x,t)\,dt$ converge uniformemente en $[\beta_1, \beta_2]$

Teorema: se tiene que $G(x) = \int_a^\infty f(x,t)\,dt$ converge uniformemente en Ω si y solo si $G_n(x) = \int_a^n f(x,t)\,dt$ converge uniformemente en Ω a $G(x)$

Con esto podemos hacer el test M para $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$

1) $g(s,t)=e^{-st} f(t)$ es integrable respecto a t en $[0,T]$ $\forall T>0$ (y para cada s t.q $Re(s)>\alpha$)

2) Ya vimos que $|g(s,t)| \leq M e^{-(x_0-\alpha)t}$ $\forall s\in\mathbb{C}$, $Re(s)\geq x_0>\alpha$

y $\int_0^{\infty} M(t) = \int_0^{\infty} M e^{-(x_0-\alpha)t} < \infty$

$\therefore$ $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ converge uniformemente

y entonces $F_n(x) = \int_0^n e^{-st} f(t)\,dt$ converge uniformemente

Teorema: Sea $f(t)$ continua de orden α-exponencial entonces $F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ converge uniformemente en $\Omega_\alpha = \{s\in\mathbb{C} : Re(s)>\alpha\}$ y por tanto F es continua en Ω_α.

Dem:

- F_n es continua en Ω_α $\forall n\in\mathbb{Z}^+$

- Por lo anterior $F_n \to F$ uniformemente $\therefore$ F es continua

Teorema.- Sea $g(x,t)$ y $\frac{\partial}{\partial x} g(x,t)$ continuas en $\Omega \times [a, c)$ $\forall c > a$ t.q

1) $G(x) = \int_a^\infty g(x,t)\, dt$ converge para algún $x_0 \in \Omega$

2) $\int_a^\infty \frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\, dt$ converge uniformemente

Entonces $G'(x) = \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\, dt$

Teorema.- Sea $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua de orden α-exponencial entonces $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ es analítica en $\Omega_\alpha = \{ s \in \mathbb{C} : Re(s) > \alpha \}$

Teorema.- Sea $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : Re(z) \geq \gamma \}$ t.q $\lim_{|z| \to \infty} F(z) = 0$ entonces

$$F(z_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - \infty i}^{\gamma + \infty i} \frac{F(z)}{z - z_0}\, dz$$

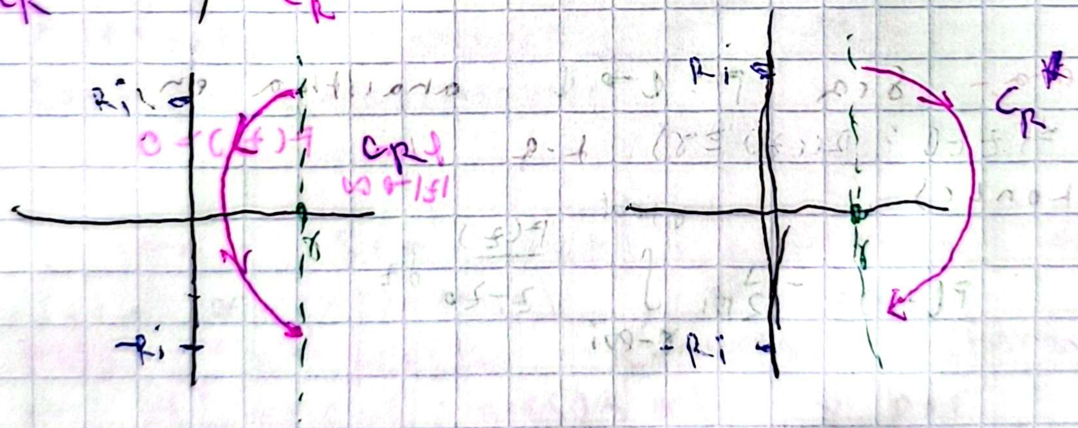
Dem.- Clase 25 de marzo

Def.- Sea $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entonces definimos la Integral de Bromwich como:

$$B_w(\gamma, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-\infty i}^{\gamma+\infty i} F(z) e^{tz} dz$$

Teorema.- Sea F analítica en $\Omega_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > \alpha\}$ si $\lim_{|z| \to \infty} F(z) = 0$ en Ω_α, entonces $B_w(\gamma, t)$ no depende de $\gamma > \alpha$.

Teorema.- Sea $a \in \mathbb{R}^+$ y g continua en C_R y C_R^*



Entonces:

$$\left| \int_{C_R} e^{az} g(z) dz \right| \leq \frac{\pi}{a} e^{a\gamma} \max_{z \in C_R} |g(z)|$$

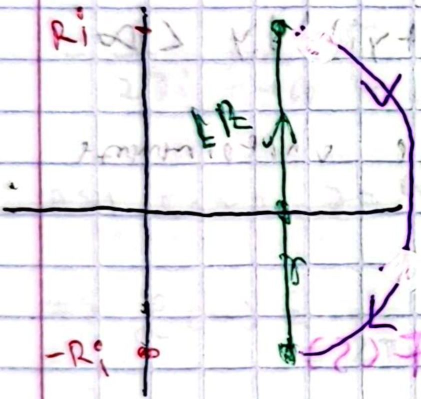
y

$$\left| \int_{C_R'} e^{az} g(z) dz \right| \leq \frac{\pi}{a} e^{-a\gamma} \max_{z \in C_R} |g(z)|$$

Teorema.- Sea $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ analítica en $\Omega_\alpha = \{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > \alpha\}$ t.q. $\lim_{|z|\to\infty} F(z) = 0$, $z\in\Omega_\alpha$ entonces

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-\infty i}^{\gamma+\infty i} F(z)\, e^{tz}\, dz = 0 \quad \forall t<0$$

Dem: Consideramos $S_R' = C_R' + L_R$



Así $\int_{\gamma-\infty i}^{\gamma+\infty i} F(z)e^{tz}\,dz = \lim_{R\to\infty}\left[\int_{\gamma-Ri}^{\gamma+Ri} F(z)e^{tz} + \int_{C_R'} - \int_{C_R'}\right]$

$= \lim_{R\to\infty}\int_{S_R'} \sim - \lim_{R\to\infty}\int_{C_R'} \sim dz$

pero $\int_{S_R'} \sim dz = 0$ pues $F(z)e^{tz}$ es analítica en $\mathrm{int}\, S_R'$ y por el Lema de Jordan

$$\left|\int_{C_R} F(z)e^{tz}\,dz\right| \le \frac{\pi}{-t}\, e^{t\gamma} \max_{z\in C_R}|F(z)|$$

pero por hip $\lim_{|z|\to\infty} F(z) = 0$, $\forall z\in\Omega_\alpha$

$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \max_{z\in C_R}|F(z)| = 0$

$\therefore \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} F(z) e^{tz}\, dz = 0 \quad \forall t<0$

$\therefore \int_{\gamma-\infty i}^{\gamma+\infty i} \text{—}\, dz = 0 \quad \forall t<0$

Teorema de inversión: Sea $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en $\overline{\Omega_\alpha} = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \geq \alpha\}$ t.q.

$\overline{F(z)} = F(\bar{z})$ y $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\alpha+yi)|\, dy < \infty$

Si $\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} e^{tz} F(z)\, dz$ converge uniformemente para $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} e^{tz} F(z)\, dz\right) = F(s)$$

es decir

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} e^{tz} F(z)\, dz$$

Dem: Tenemos que

$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} F(z) e^{tz}\, dz\right)$

$= \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} F(z) e^{tz}\, dz\right) dt$

$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_0^T \left(e^{-st} \int_{-\infty}^{\infty} F(z) e^{tz}\, i\, dy\right) dt$

con $z = \alpha + yi$

y por Fubini como ~~...~~
la integral converge uniformemente y $\overline{F(\bar{z})} = F(\bar{z})$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\sim) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T e^{-st} F(z) e^{zt}\, dt\, (i\,dy)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[F(z) \left(-\frac{1}{z-s} + \frac{1}{z-s} e^{-(s-z)T} \right) \right] i\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-F(z)}{z-s}\, i\,dy + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(z) e^{-(s-z)T}}{z-s}\, i\,dy \right]$$

Así como $z = \alpha + yi \Rightarrow dz = i\,dy$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\sim) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \left[\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} \frac{-F(z)}{z-s}\, dz + \int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} \frac{F(z) e^{-(s-z)T}}{z-s}\, dz \right]$$

por teo. anteriores

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \left[2\pi i\, F(s) + \int \sim \right]$$

y usando la hipótesis y acotando

$$\lim_{T\to\infty} \int \sim = 0$$

$$\therefore \mathcal{L}(\sim) = \frac{1}{2\pi i} \left[2\pi i\, F(s) \right] = F(s)$$ ∎

Teorema: Sea F analítica en $\Omega_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > \alpha\}$, y sea $\gamma > \alpha$.
Si existen constantes $M, r_0, k > 1$ tal que

$$|F(z)| \leq \frac{M}{|z|^k} \quad \text{para } |z| > r_0$$

entonces $\int_{\gamma - \infty i}^{\gamma + \infty i} F(z)\, e^{tz}\, dz$ converge uniformemente

en $t \in \mathbb{R}$ y además $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\gamma + yi)|\, dy < \infty$

Obs: Las condiciones del teorema de inversión son suficientes pero no necesarias.

Def: Sea γ una curva cerrada suave por partes y sea $z_0 \notin \gamma$ (creemos que no es simple), entonces se define el número de vueltas (índice) de γ sobre z_0 como:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz = I(\gamma, z_0)$$

Proposición: Sea γ curva cerrada y $z_0 \notin \gamma$, entonces:

- $I(-\gamma, z_0) = -I(\gamma, z_0)$
- $I(\gamma, z_0) = 0 \quad \forall z_0 \in (\mathrm{int}\,\gamma)^c$

Si γ es simple entonces la función $g(z) = I(\gamma, z)$ es constante en cada región determinada por γ.

Teorema.- Si f es analítica en Ω simplemente convexa excepto por un número finito de singularidades aisladas, $z_1, \dots, z_n$ entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k)\, I(\gamma, z_k)$$

$\forall \gamma$ curva contenida en Ω t.q. γ no pasa por ninguna singularidad

Teorema (principio del argumento) Sea f meromorfa en una región Ω con ceros z_k de orden M_k, $1 \leq k \leq m$ y polos P_k de orden N_k, $1 \leq k \leq n$ entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{m} M_k - \sum_{k=1}^{n} N_k$$

(con multiplicidades)

donde $z_k, P_k \in \operatorname{int} \gamma$

Obs: Si z_0 es cero de orden M, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z)} = M$$ para ε suficientemente pequeño

Teorema: Sea γ una curva cerrada simple y f analítica en $\operatorname{int}\gamma$ t.q $f(z)\neq 0$ en γ. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = I(f(\gamma),0)$$

Teorema. (Rouche) Sea γ curva cerrada simple y f, g analíticas en $\operatorname{int}\gamma$ t.q $|g(z)|<|f(z)|$ $\forall z \in \gamma$ entonces f y $f+g$ tienen el mismo numero de ceros en $\operatorname{int}\gamma$ (contando multiplicidades)

Dem.- Tenemos que $\#$ ceros de $f = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$

y $\#$ ceros $f+g = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(f+g)'}{f+g}dz$

P.D $\#$ ceros f $-$ $\#$ ceros $f+g = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{-(g'f-f'g)}{f\cdot(f+g)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\frac{g'f-f'g}{f^2}}{1+\frac{g}{f}}\,dz$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\left(1+\frac{g}{f}\right)'}{1+\frac{g}{f}}\,dz$$

$= -I((1+\frac{g}{f})(\gamma), 0)$.

Que existe pues como $|g(z)|<|f(z)| \Rightarrow f(z)\neq 0$ $\forall z\in\gamma$.

Solo basta probar que $0 \notin \text{int } (1+\frac{g}{f})(\gamma)$ pues así $I(\sim, 0)=0$

En efecto, como $|g(z)|<|f(z)| \Rightarrow$ $\forall z\in\gamma$

$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|<1$

$\Rightarrow \left|\frac{g(z)}{f(z)}+1-1\right|<1 \Rightarrow \left|\left(\frac{g(z)}{f(z)}+1\right)-1\right|<1$

$\Rightarrow \frac{g(z)}{f(z)}+1 \in D(1,1)$

$\forall z\in\gamma$ $\therefore$ $0\notin \text{int } (1+\frac{g}{f})(\gamma)$

$\therefore I(\sim, 0)=0$ $\therefore$ # ceros f = # ceros $f+g$.

Teorema fundamental del algebra.-

Dem.- Tenemos que $p(z) = \underbrace{a_n z^n}_{f} + \underbrace{a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}_{g}$

y consideramos $|z|<R$

$\Rightarrow |g(z)| \leq |a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + a_1|z| + |a_0|$
$\leq |a_{n-1}|R^{n-1} + \dots + a_1 R + |a_0|$

y para R suficientemente grande

$|g(z)| < |a_n| R^n = |a_n z|^n = |f(z)|$

$\therefore$ f y $f+g=p$ tienen el mismo número de ceros en $D(0,R)$

y como $f(z) = a_n z^n$ tiene n ceros con multiplicidad $(z=0)$

$\Rightarrow$ $p(z)$ tiene n ceros contando multiplicidad

Def.- (Convergencia normal) Sea Ω región y $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ sucesión de funciones.

Decimos que f_n converge a f normalmente (en compactos) en Ω si para todo compacto $D \subseteq \Omega$ $f_n \to f$ uniformemente

Teorema.- Sea Ω una región y $f_n : \Omega \to \Omega$ analítica $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, si $f_n \to f$ normalmente entonces f es analítica en Ω

Teorema.- (Hurwitz) Sea Ω región y $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica para $n \in \mathbb{Z}^+$ t.q $f_n \to f$ normalmente en Ω. Si $z_0 \in \Omega$ es un cero de orden m de f entonces existen $\rho > 0$ y $N_0 \in \mathbb{Z}^+$ t.q $\forall n \geq N_0$, f_n tiene m ceros en $D(z_0, \rho)$ (con multiplicidades). Además estos ceros convergen a z_0 cuando $n \to \infty$.

Dem.- Como z_0 es cero de orden m entonces existe $\rho_1 > 0$ t.q

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \forall z \in D(z_0, \rho_1) \subset \Omega$$

t.q $g(z)$ es analítica y $g(z) \neq 0$ en $D(z_0, \rho_1)$

En particular $g(z_0) \neq 0$ y por tanto existe $\rho > 0$ t.q $|g(z)| \geq \frac{|g(z_0)|}{2}$ $\forall z \in \overline{D(z_0, \rho)}$

en particular

$$|g(z)| \geq \frac{|g(z_0)|}{2} \quad \forall z \in \partial D(z_0, \rho)$$

Notemos que:

$$|f(z)| = |z - z_0|^m |g(z)| = \rho^m |g(z)| \geq \rho^m \frac{|g(z_0)|}{2} = \varepsilon_1$$

$\forall z \in \partial \overline{D(z, \rho)}$

Ahora como $f_n \to f$ normalmente en Ω entonces para ε_1 existe $N_0 \in \mathbb{Z}^+$ t.q si $n \geq N_0 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon_1$ $\forall z \in \overline{D(z, \rho)}$

Notamos que si $z \in \partial D(z_0, \rho)$ entonces

$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon_1 < |f(z)|$

entonces por el teorema de Rouché

$\#$ ceros f en $D(z_0,\rho) = \#$ ceros $\underbrace{(f_n - f) + f}_{f_n}$ en $D(z_0,\rho)$

Def: Sea f analítica en z_0 y $w_0 := f(z_0)$. Decimos que f tiene orden $m \geq 1$ en z_0 si la función $g(z) = f(z) - w_0$ tiene un cero de orden m en z_0.

Teorema: Sea Ω una región que contiene a z_0 y $f: \Omega \to \mathbb{C}$ analítica. Si $w_0 = f(z_0)$ y f tiene orden $n \geq 1$ en z_0, entonces existe $R > 0$, $\rho > 0$ t.q para cada $w \in D(w_0, \rho) \setminus \{w_0\}$ hay n preimágenes distintas $z_k \in D(z_0, R) \subseteq \Omega$ $1 \leq k \leq n$ t.q $f(z_k) = w$

Dem:

Idea: $|w_0 - w| < |f(z) - w_0|$ $z \in \partial D(z_0, R)$

$\#$ ceros de $f(z) - w_0 = \#$ ceros de $f(z) - w$

Como f tiene orden $n \geq 1$

en z_0 que es aislado y por tanto existe $\delta > 0$ t.q

$$f(z) - w_0 = (z-z_0)^n g(z) \quad \forall z \in D(z_0, \delta) \subseteq \Omega$$

g analítica y no nula en $D(z_0, \delta)$

Como g es continua en z_0 y $g(z_0) \neq 0$ entonces podemos encontrar $R < \delta$ t.q $g(z) > \frac{|g(z_0)|}{2}$ para $0 < |z - z_0| \leq R$.

Tomando norma en (*) tenemos:

$$|f(z) - w_0| = |z - z_0|^n |g(z)|$$

$\Downarrow$ si z es t.q $|z - z_0| = R$

$$> R^n \frac{|g(z_0)|}{2}$$

$\Rightarrow$ (**) $|f(z) - w_0| > R^n \frac{|g(z_0)|}{2} \quad \forall z \in \partial D(z_0, R)$

Sea $\rho := R^n \frac{|g(z_0)|}{2}$. Si tomamos $w \in \mathbb{C}$ fijo t.q $|w_0 - w| \leq \rho$ entonces de (**) tenemos que $|w_0 - w| \leq \rho < |f(z) - w_0|$ y entonces por el teorema de Rouché

$$\# \text{ceros } f(z) - w_0 = \# \text{ceros } f(z) - w$$

$\Rightarrow$ orden de f en z_0 = orden de f en z

Las raíces son distintas si R es suficientemente pequeño.

Obs: ~~Ejt~~

- El orden de f es invariante localmente.

- Si f es no constante y analítica en z_0 entonces f tiene como mínimo orden 1 en z_0.

Teorema: Sea Ω región, $f:\Omega \to \mathbb{C}$ analítica y $z_0 \in \Omega$. f es inyectiva en $D(z_0,\rho)$ si y sólo si $f'(z_0) \neq 0$ para algún $\rho > 0$.

de la aplicación abierta

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región y $f:\Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica no constante. Si U es abierto de Ω entonces $f(U)$ es abierto.

Teorema (fórmula de inversión). Sea Ω región t.q. $z_0 \in \Omega$ y $f: \Omega \to \mathbb{C}$ analítica definimos $w_0 = f(z_0)$. Si $f'(z_0) \neq 0$ entonces existen $R, \rho > 0$ t.q.

$$f^{-1}(D(w_0, \rho)) \subset D(z_0, R)$$

además f es inyectiva en $f^{-1}(D(w_0,\rho))$ y su inversa $f^{-1}: D(w_0,\rho) \to f^{-1}(D(w_0,\rho))$ es analítica en $D(w_0,\rho)$ y satisface

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{z f'(z)}{f(z)-w} dz \qquad w \in D(w_0,\rho)$$

Dem: por teorema pasado aplicado a Ω existen $R, \rho > 0$ t.q. $\forall w \in D(w_0,\rho)$ la ecuación $f(\eta) = w$ tiene un único cero $\eta = z \in D(z_0,R)$, pues $f'(z_0) \neq 0$ y por tanto f tiene orden 1 localmente en $D(z_0,R)$, así

$$f^{-1}: D(w_0,\rho) \to f^{-1}(D(w_0,\rho)) \subset D(z_0,R)$$

$$w \to \eta = z$$

Calculemos ahora $\frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta - z_0| = R} \frac{\eta f'(\eta)}{f(\eta)-w} d\eta$

La función del integrando deja de ser analítica en $\eta = z$, $\eta = z$ es polo simple

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \, \mathrm{Res}\left(\frac{\eta f'(\eta)}{f(\eta)-w}, z \right)$$

$$= \lim_{\eta \to z} (\eta - z) \frac{\eta f'(\eta)}{f(\eta)-w}$$

$$= \lim_{\eta \to z} \frac{\eta f'(\eta)}{\frac{f(\eta)-w}{\eta - z}} = \frac{z f'(z)}{f'(z)} = z$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta - z_0| = R} \frac{\eta f'(\eta)}{f(\eta)-w} \, d\eta = z = f^{-1}(w) \quad (*)$$

Teorema (de la función implícita).

Sea Ω región de $\mathbb{C}^2$ y $F: \Omega \to \mathbb{C}$ continua en Ω t.q

1) $F(z,w)$ es analítica $\forall w$ fijo

2) Existe $(z_0, w_0) \in \Omega$ t.q

- $F(z_0, w_0) = 0$
- $\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(z_0,w_0)} \neq 0$

Entonces existe $\delta > 0$ y $g: D(w_0, \delta) \to \mathbb{C}$ t.q $g(w_0) = z_0$ y $F(g(w), w) = 0$

Dem: Sea $h(z) = F(z, w_0)$, es analítica en Ω y

$$h'(z) = \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(z, w_0)}$$

$\Rightarrow h'(z_0) = \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(z_0,w_0)} \neq 0$, $h(z_0) = F(z_0,w_0) = 0$

por tanto $z = z_0$ es un cero de orden 1 para $h(z)$; y como los ceros son aislados, $\exists R > 0$ t.q.

$$h(z) = F(z,w_0) \neq 0 \quad \forall z \in \overline{D(z_0,R)}$$

En particular, $F(z,w_0)$ alcanza mínimo ρ_0 no nulo en $\partial D(z_0,R)$ y por tanto

$$|F(z,w_0)| > \rho_0/2 \quad \forall z \in \partial D(z_0,R)$$

Como F es continua, entonces es uniformemente continua en $\overline{D(z_0,r)}$ por tanto existe $\delta > 0$ t.q.

$$|w-w_0| < \delta, \Rightarrow |F(z,w) - F(z,w_0)| < \rho_0/2$$
$\forall z \in D(z_0,R)$

En conclusión tenemos que para cada $w \in D(w_0,\delta)$ se cumple que

$$|F(z,w) - F(z,w_0)| < \rho_0/2 < |F(z,w_0)| \quad \forall z \in \partial D(z_0,R)$$

$\therefore$ # ceros de $F(z,w_0)$ = # ceros $F(z,w)$ en $D(z_0,R)$

$\Rightarrow$ 1 = # ceros $F(z,w)$ en $D(z_0,R)$

es decir, para cada $w \in D(w_0,\delta)$ existe un único $z \in D(z_0,R)$ t.q. $F(z,w) = 0$

Lema.- Sea $F: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ continua tq $F(\eta, w_0) \neq 0$ $\forall \eta \in \partial D(z_0, R)$ entonces existe $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ con $(\varepsilon << R)$ tq $F(\eta, w) \neq 0$ $\forall (\eta, w) \in C_{\varepsilon,R}(z_0) \times D(w_0, \delta)$ donde $C_{\varepsilon,R}(z_0) = \{ \eta \in \mathbb{C} \mid R-\varepsilon < |\eta - z_0| < R+\varepsilon \}$

Dem: Sea $(\eta_1, w_1) \in U$ (abierto de $\mathbb{C}^2$), entonces $\exists\, \alpha, \beta > 0$ tq

$$D(z_1, \alpha) \times D(w_1, \beta) \subset U \qquad (*)$$

Para cada $\eta \in \partial D(z_0, R)$ tenemos que $F(\eta, w_0) \neq 0$ y como F es continua para cada η fijo existe $U_\eta \subset \mathbb{C}^2$ de (η, w_0) tq $F(\eta, w) \neq 0$ $\forall (\eta, w) \in U_\eta$

Por $(*)$ existen α_η, β_η tq $F(\eta, w) \neq 0$ $\forall (\eta, w) \in D(\eta, \alpha_\eta) \times D(w_0, \beta_\eta) \subset U_\eta$

~~Definición~~ Definamos $\mathcal{F}_{\eta, w_0} = \{ D(\eta, \alpha_\eta) \times D(w_0, \beta_\eta) ; \eta \in \partial D(z_0, R) \}$

y notemos que $\mathcal{F}_{\eta, w_0}$ es un recubrimiento abierto de $C = \partial D(z_0, R) \times \{w_0\}$ en $\mathbb{C}^2$ que es compacto entonces existe una subcolección finita $\tilde{\mathcal{F}}_{\eta, w_0}$ que también recubre a C

$$C \subseteq \bigcup_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} D(\eta_i, \alpha_i) \times D(w_0, \beta_j)$$

tomando $0 < \varepsilon < \min \alpha_i$

$0 < \delta < \min \beta_j$

entonces $F(h,w) \neq 0 \quad \forall (h,w) \in C_{\varepsilon,R}(z_0) \times D(w_0,\delta)$

Teorema: Bajo las condiciones del teorema de la función implícita tenemos que dicha función implícita se puede representar de la sig. manera

$$(*) \quad g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|h-z_0|=R} \frac{h\, \partial_h F(h,w)}{F(h,w)}\, dh \qquad \forall w \in D(w_0,\delta)$$

Dem: por el lema anterior, la integral está bien definida, esto es

$$G(h) = \frac{h\, \partial_h F(h,w)}{F(h,w)}, \quad w \text{ fijo.}$$

es analítica en $\overline{D(z_0,R)}$ excepto en $h = z$ que es un polo simple.

Aplicando teo. del residuo

$$\Rightarrow (*) = \frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i \operatorname{Res}(G(h), z)\right] = \operatorname{Res}(G(h), z)$$

$$= \lim_{h\to z} (h-z) \frac{h \frac{\partial F}{\partial h}\big|_{(h,w)}}{F(h,w)} = \lim_{h \to z} \frac{h \frac{\partial F}{\partial h}\big|_{(h,w)}}{\frac{F(h,w)}{h-z}}$$

$$= \frac{h \frac{\partial F}{\partial h}(h,w)}{\frac{\partial F}{\partial h}(h,w)} = h \quad \text{pues } F(z,w) = 0$$

¿Qué se necesita para que g sea analítica?

Se necesita además de que F sea analítica respecto a la primera variable que sea analítica respecto a la segunda variable

Def: Una variedad topológica 2-dimensional es un espacio (de) Hausdorff X t.q. todo punto ($\forall x \in X$) tiene un entorno abto U, homeomorfo a un abto de $\mathbb{R}^2$

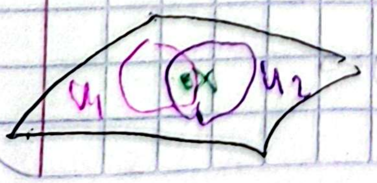
(Hausdorff ⇒ 2 puntos distintos tienen vecindades distintas)

Def: Sea X una V.T 2-dim. y sea $f: X \to \mathbb{C}$. Decimos que f es analítica en $x \in X$ si

$$f \circ \phi^{-1} \text{ es analítica en } \phi(X)$$

donde ϕ es un homeomorfismo de $x \in U \subseteq X$
$\to \phi(U) \subseteq \phi(X)$

Obs: Esta definición tiene un detalle que es que para cada $x \in X$ puede existir dos abiertos distintos que lo contengan y los dos me darán dos



homeomorfismos distintos y podría pasar que $f\circ\phi_1^{-1}$ sea analítica y $f\circ\phi_2^{-1}$ no lo sea.

Objetivo: Queremos que la analiticidad sea una propiedad intrínseca a f y a la superficie, i.e, ϕ no debe depender de los homeomorfismos.

Obs.- ϕ induce un sistema coordenado en U, entonces queremos que la analiticidad no dependa de las coordenadas. $\phi \circ \phi = \phi\circ\phi$

Ejemplo:

- Sea $S^1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ y $U = S^1\setminus\{(-1,0)\}$. y sea $\phi(x,y) = \frac{y}{x+1}$

ϕ es un homeomorfismo y $\phi^{-1}(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ es continua

Def.- Sea X una V.T. 2 dimensional, $U\subseteq X$ abierto y $\phi: U \to \phi(U)\subseteq\mathbb{C}$ un homeomorfismo al abierto $\phi(U)\subseteq\mathbb{C}$

1) A par (U,ϕ) se le llama Carta

2) Una familia de cartas $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ se le denomina Atlas de X si

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = X$$

3) Sup. $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, el homeomorfismo

$$\phi_{ij} := \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_i(U_i \cap U_j)$$

es una función que va de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ se le llamará función de transición.

Teorema.- Sea X una V.T 2-dimensional dotada de un Atlas, $A = \{(U_\alpha, \phi_\alpha), \alpha \in A\}$ t.q. las funciones de transición son analíticas $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$. Entonces la def. de analiticidad es independiente del cambio de coordenadas, i.e.

$f \circ \phi_\alpha^{-1}$ es analítica $\Rightarrow f \circ \phi_\beta^{-1}$ es analítica.

Def.- Una V.T - 2 dimensional X es una superficie de Riemann si existe un atlas cuyas funciones de transición son todas analíticas. En tal caso hablamos de Atlas complejo.

Obs.- Una superficie de Rieman es una variedad 1-dimensional compleja.

Ejemplos

- ~~$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$~~
- $X = \mathbb{R}^2$, con $A = \{U = \mathbb{R}^2, \phi\}$, $\phi(x,y) = x+iy$

Teorema.-

Dada $F: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ continua, t.q. F es analítica respecto a cada variable. Si $\frac{\partial F}{\partial z}$ y $\frac{\partial F}{\partial w}$ no se anulan simultáneamente (no hay puntos críticos) entonces

$$S = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid F(z,w) = 0\}$$

es una superficie de Riemann.

Dem.- El conjunto de soluciones de $F(z,w)=0$ forman a lo sumo un conjunto de dimensión compleja 1.

Sea $(z_0, w_0) \in S$, entonces $F(z_0, w_0) = 0$ y sup. que $\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(z_0,w_0)} \neq 0$

$\Rightarrow$ por el teo. de la función implícita existe $\delta > 0$ y $g: D(w_0, \delta) \to \mathbb{C}$ analítica t.q. 1) $z_0 = g(w_0)$

2) $F(g(w), w) = 0 \quad \forall w \in D(w_0, \delta)$

Consideramos $U_{(z_0,w_0)} = \{(g(w), w) : w \in D(w_0, \delta)\}$

y $\phi = \pi_2|_{U(z_0,w_0)}$ t.q. $\pi_2(g(w), w) = w$

1) $U(z_0, w_0)$ es abto pues $U_{(z_0,w_0)} = S \cap g(D(z_0,\delta)) \times D(z_0,\delta)$

y al ser $g(D(z_0,\delta))$ abto (Teo. aplic. abta) $\Rightarrow U$ es abto en S.

2) $(\pi_2|_{U(z_0,w_0)})^{-1}(w) = (g(w), w)$

$\Rightarrow \pi_2|_U$ es homeomorfismo

$\therefore \ (U_{(z_0,w_0)}, \pi_2|_{U(z_0,w_0)})$ es una carta. Lo mismo para el otro caso.

Es claro que tenemos el atlas

$A = A_1 \cup A_2$, donde,

$$A_1 = \{ (U_{(z_0,w_0)}, \pi_2|_{U(z_0,w_0)}) \mid \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(z_0,w_0)} \neq 0 \}$$

$$A_2 = \{ (U_{(z_0,w_0)}, \pi_1|_{U(z_0,w_0)}) \mid \frac{\partial F}{\partial w}\Big|_{(z_0,w_0)} \neq 0 \}$$

para ver que el atlas es complejo debemos mostrar que las funciones de transición son analíticas

Caso 1.- cartas de un mismo tipo

Caso 2.- cartas superpuestas de distinto tipo

Tarea. ∎

Ejemplos:

- $S_1 = \{ (z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid e^z - w = 0 \}$

sea $F(z,w) = e^z - w$, $\frac{\partial F}{\partial z} = e^z$ y $\frac{\partial F}{\partial w} = -1$

No hay puntos críticos $\therefore$ S_1 es superficie de Riemann

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región y $f: \Omega \to \mathbb{C}$ analítica. El punto $z_0 \in \Omega$ se llama punto crítico de f si $f'(z_0) = 0$ y a $f(z_0)$ le llamamos valor crítico asociado a z_0.

Obs.- Se tiene la función $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in \mathbb{R}$

- $g(1) \to \infty$ serie armónica
- $g(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Se tiene que $g(x) < \infty$ $\forall x > 1$

¿podemos extender?

Nos preguntamos por el dominio de

$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$

- $G(i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^i} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{i(-\ln(n))}$ pero

$e^{i(-\ln(n))} \in D(0,1)$ $\forall n \to |e^{i(-\ln(n))}| = 1$

$\therefore$ diverge.

Teorema.- $G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ es analítica en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 1\}$

Dem.- Tenemos que $G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{z\ln(n)}}$

Basta ver que $f_m(z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{e^{z\ln(n)}}$ converge normalmente en Ω.

En efecto sea D compacto en Ω y consideremos la función $g(z) = Re(z)$ $\forall z \in D$.

Como g es continua en D (compacto) $\Rightarrow$ g alcanza su mínimo en D; es decir $1 < p = Re(z_0) \leq Re(z)$.

- $\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{|n^z|} = \frac{1}{n^{Re z}|n^{i Im z}|} = \frac{1}{n^{Re z}} \leq \frac{1}{n^p}$ $\forall z \in D$

- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge (pues $p > 1$)

$\therefore$ por el criterio M-Weierstrass la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ converge uniformemente en D $\therefore$ converge normalmente en D y al ser $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^z}$ analítica en Ω

$\Rightarrow$ $G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ es analítica en Ω

Teorema: (principio de continuación analítica)
Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión con un punto de acumulación p en una región $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si f y g son analíticas en Ω t.q. $f(z_n) = g(z_n)$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ entonces $f(z) = g(z)$ $\forall z \in \Omega$

Dem: Sea $h(z) = f(z) - g(z)$ analítica en Ω y tomemos $\Omega_1 = \{z \in \Omega \mid h(z) = 0$ y $h^{(n)}(z) = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+\}$ y entonces

$\underbrace{\Omega = \Omega_1}_{\text{abto}} \cup \underbrace{(\Omega \setminus \Omega_1)}_{\text{abto}}$ $\Rightarrow$ ó $\Omega = \Omega_1 \Rightarrow h \equiv 0$ ✓
ó $\Omega = \Omega \setminus \Omega_1 \Rightarrow \Omega_1 = \emptyset$

Como p es punto de acumulación de z_n existe $z_{n_k} \to p$ y $h(p) = h(\lim_{k\to\infty} z_{n_k})$

$= \lim_{k\to\infty} h(z_{n_k}) = 0$

$\therefore$ p es cero de h ~~$z_n \to p$~~

Si suponemos que $\Omega_1 \neq \emptyset$ entonces existe $k \in \mathbb{Z}^+$ t.q $h^{(k)}(p) = 0$

$\Rightarrow z = p$ es un cero aislado de h !

pues $\forall \delta > 0$, $D(p,\delta) \setminus \{p\}$ contiene elementos de z_n en donde $f(z_n) = 0$.

$\therefore$ $h = 0$ $\Rightarrow f(z) = g(z)$

Corolario.- Sean f y g analíticas en una región Ω t.q $f = g$ en U = abierto no vacío de Ω entonces $f(z) = g(z)$ $\forall z \in \Omega$.

Def.- Sea Ω_1 región y $f_1 : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ analítica; llamamos a (f_1, Ω_1) par analítico. Decimos que (f_2, Ω_2) es una extensión analítica directa de (f_1, Ω_1) si

1) $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$

2) $f_1(z) = f_2(z)$ $\forall z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$

Ejemplo.

- $\left(\frac{1}{1-z}, \mathbb{C}\setminus\{1\}\right)$ es ext. ana. directa de $\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n, D(0,1)\right)$

Obs.-

1) La extensión analítica es una relación reflexiva sobre el conjunto de pares analíticos, i.e,

si $(f_1,\Omega_1) \to (f_2,\Omega_2)$ entonces $(f_2,\Omega_2) \to (f_1,\Omega_1)$

2) Si (f_1,Ω_1) admite una continuación analítica f_2 a una región Ω_2, entonces esta extensión es única. (principio de continuación analítica)

3) No siempre podemos extender analíticamente por ejemplo $f_1(z) = \frac{1}{z}$, $\Omega_1 = D(0,1)\setminus\{0\}$ no existe extensión analítica de Ω_1 a $\Omega_2 = D(0,1)$.

Def.- Sea $A = \{(f_1,\Omega_1), \dots, (f_n,\Omega_n)\}$ t.q (f_k,Ω_k) y (f_{k+1},Ω_{k+1}) son extensiones analíticas una de otra $\forall$, $k=1,\dots,n-1$. Entonces al conjunto A le llamamos una cadena

Def.- Sea la cadena $A = \{(f_1,\Omega_1), \dots, (f_n,\Omega_n)\}$. Decimos entonces que (f_n,Ω_n) es una extensión analítica indirecta de (f_1,Ω_1)

Def: Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ curva (spp) y una cadena $\{(f_k, \Omega_k)\}_{k=1}^{n}$ t.q.

1) $\gamma(a) \in \Omega_1$
2) $\gamma([a,b]) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k$

En tal caso decimos que (f_n, Ω_n) es una extensión analítica de f_1, Ω_1 a lo largo de γ.

Lema: Sea $\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3 \neq \emptyset$ t.q. (f_2, Ω_2) ext. analítica de (f_1, Ω_1) y (f_3, Ω_3) ext. analítica de (f_2, Ω_2)

$\Rightarrow (f_3, \Omega_3)$ es ext. analítica de (f_1, Ω_1).

Teorema: Sea (f_1, Ω_1) par analítico y $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ curva t.q. $\gamma(a) \in \Omega_1$, entonces (f_1, Ω_1) admite una única extensión analítica a lo largo de γ.

Dem: Sea $\{(f_1, \Omega_1), (g_2, \Omega_2), \dots, (g_n, \Omega_n)\}$ la cadena a lo largo de γ y sea $\{(f_1, \Omega_1), (h_2, \tilde{\Omega}_2), \dots, (h_m, \tilde{\Omega}_m)\}$ otra cadena a lo largo de γ.

Sean $g_1 = f_1$, $\Omega_1 = \Omega_1$ $h_1 = f_1$, $\tilde{\Omega}_1 = \Omega_1$

P.D] $g_n(z) = h_m(z) \quad \forall z \in \Omega_n \cap \tilde{\Omega}_m$

por hip existen $\{t_k\}$ y $\{s_k\}$ particiones del intervalo $[a,b]$ t.q

1) $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ y $\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset \Omega_k$ además $(g_k, \Omega_k) \to (g_{k+1}, \Omega_{k+1})$

2) $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$ t.q $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subset \tilde{\Omega}_j$ y $(h_j, \tilde{\Omega}_j) \to (h_{j+1}, \tilde{\Omega}_{j+1})$

Argumentando por contradicción.
Supongamos que existen pares (k, j) t.q

a) $[t_k, t_{k+1}] \cap [s_j, s_{j+1}] \neq \emptyset$

b) $(g_k, \Omega_k) \not\to (h_j, \tilde{\Omega}_j)$

i.e, $g_k \neq h_j \quad \forall z \in \Omega_k \cap \tilde{\Omega}_j$

Ahora, de todas las parejas (k, j) que satisfacen a) y b) sea (k_0, j_0) t.q k_0 sea mínimo ($k_0 > 1$, pues $g_1 = f_1 = h_1$)

Sup. que $t_{k_0} \geq s_{j_0}$. Como $[t_{k_0}, t_{k_0+1}] \cap [s_{j_0}, s_{j_0+1}] \neq \emptyset$

Notemos que $\gamma(t_{k_0}) \in \Omega_{k_0} \cap \Omega_{k_0-1} \cap \tilde{\Omega}_{j_0}$
Como (k_0, j_0) satisface a) y b) con k_0 mínimo entonces

$(g_{k_0-1}, \Omega_{k_0-1}) \to (h_{j_0}, \tilde{\Omega}_{j_0})$

$\Downarrow$

$(g_{k_0}, \Omega_{k_0}) \to$ por Lema

pero esto contradice (b)

∴ no existen (k, j) que satisfacen (a) y (b)

∴ $\exists\, [t_k, t_{k+1}] \cap [s_j, s_{j+1}] \neq \emptyset$

$\Rightarrow (g_k, \Omega_k) \to (h_j, \tilde{\Omega}_j)$

en particular para $k = n-1$ y $j = m-1$

$$(g_n, \Omega_n) \to (h_m, \tilde{\Omega}_m)$$

Teorema: No es posible extender analíticamente hacia singularidades esenciales y polos

Obs: Existen extensiones analíticas que dependen de la trayectoria

Def: Sea (f, Ω) par analítico (en región), z es un punto regular de f si existe una extensión analítica desde $z_0 \in \Omega$ hasta z a lo largo de una curva γ

Ejemplo,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \Omega = D(0,1)$$

Los puntos regulares son

$\{z \in \mathbb{C} : z \neq 1\}$

* De $g(z) = \ln z$ en $\Omega = \mathbb{C} \setminus B$

los puntos regulares son:

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Teorema (monodromía) Sea f analítica en z_0 y $\bar{\Omega}$ el conjunto de puntos regulares. Si γ y η son dos curvas en $\bar{\Omega}$ t.q.

(1) $\gamma(a) = \eta(a) = z_0$
$\gamma(b) = \eta(b) = z_1$

(2) Existe una homotopía entre γ y η totalmente contenida en $\bar{\Omega}$

Entonces la función resultante de continuar analíticamente f desde z_0 a z_1 a lo largo de η y γ es la misma.

Obs (Teorema)

1) Si $\bar{\Omega}$ es simplemente conexo entonces existe una única extensión analítica de f (analítica en z_0) a todo $\bar{\Omega}$

2) Si $\bar{\Omega}$ no es simplemente conexo el teorema será válido en subregiones simplemente conexas de $\bar{\Omega}$

3) Las condiciones del teorema son suficientes, no necesarias.

Teorema.- Sea f analítica en z_0. Si f puede extenderse analíticamente a lo largo de $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ desde $\gamma(a) = z_0$ hasta $\gamma(b) = z_1$, entonces existe $\delta > 0$ t.q. para cualquier otra curva $\mu : [a,b] \to \mathbb{C}$ que satisface

1) $\mu(a) = z_0$, $\mu(b) = z_1$

2) $|\gamma(t) - \mu(t)| < \delta \quad \forall t \in [a,b]$

la continuación analítica a lo largo de μ desde z_0 a z_1 resulta en la misma función obtenida con la extensión analítica a lo largo de γ hasta z_1.

Dem.- Sea f_t una extensión analítica por series de potencias a lo largo de γ hasta z_1

1) $f_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) (z - \gamma(t))^n \quad , z \in D(\gamma(t), R(t))$

2) $f_a(z) = f(z)$ analítica en $D(z_0, R_0)$, $R_0 = R(a)$

3) para t_1, t_2 suficientemente cercanos $(f_{t_1}, D(\gamma(t_1), R(t_1))) \to (f_{t_2}, D(\gamma(t_2)), R(t_2))$

Sabemos que $R(t)$ es una función continua de $t \in [a,b]$ (Tarea)

y tq $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ con $\gamma([a,b])=[x_1,x_2]$,
con $x_1>0$

Sea $\delta>0$ y $\kappa:[a,b]\to\mathbb{C}$ cualquier otra curva tq

1) $|\kappa(t)-\gamma(t)|<\delta \quad \forall t\in[a,b]$
2) $\kappa(a)=z_0$, $\kappa(b)=z_1$

⋮ clase 20 de mayo

Como corolario se da el Teorema de monodromía.

Teorema: Supongamos que $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ tiene radio de convergencia $R<\infty$, entonces f tiene al menos un punto no regular en $\partial D(z_0,R)$

Dem: podemos s.p.g. que $z_0=0$.
Sabemos que $R=\sup\{r: f$ es analítica en $D(0,r)\}$

Sup. por contradicción que, $\forall z\in\partial D(0,R)$, z es regular, entonces para cada $w_\alpha\in\partial D(0,R)$ existe f_α definida en un disco Ω_α centrado en w_α t.q. $(f, D(0,R))\to(f_\alpha,\Omega_\alpha)$ extensión analítica. $(\Omega:=D(0,R))$

c) Notemos que $\{\Omega_\alpha \mid w_\alpha\in\partial D(0,R)\}$

es una cubierta abta de un compacto $\partial D(0,R)$ $\therefore \exists$ subcubierta finita $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ de $\partial D(0,R)$

Por otro lado $\tilde{\Omega} = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_m \cup \Omega$ es un conjunto de puntos regulares simplemente conexo

$\Rightarrow$ por el Teo. de monodromía la función

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \Omega = D(0,R) \\ f_k(z), & z \in \Omega_k \end{cases}$$

es analítica en $\tilde{\Omega}$.

Como $\partial D(0,R) \subset \tilde{\Omega} \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ t.q. $D(0,R+\varepsilon) \subset \tilde{\Omega} \Rightarrow f(z)$ analítica en $D(0,R+\varepsilon)$ $\therefore \Rightarrow R+\varepsilon < R$!

pues R era el supremo $\therefore$ debe de existir un $z \in \partial D(0,R)$ no regular. ∎

Teorema.- Supongamos que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia $R < \infty$. Si $\lim_{r \to R^-} f(re^{i\theta_0})$ no existe o no es finito entonces el punto $z = Re^{i\theta_0}$ no es regular.

Teorema.- Se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty t^{z-1} \frac{e^{-kt}}{e^t-1}\,dt = 0$$

Dem.- Tenemos que

$$\left|\int_0^\infty t^{z-1} \frac{e^{-kt}}{e^t-1}\,dt\right| \leq \int_0^\infty t^{Re(z)-1} \frac{e^{-kt}}{e^t-1}\,dt$$

Se tiene que $\int_0^1 t^{Re(z)-1} \frac{e^{-kt}}{e^t-1}\,dt$ converge uniformemente (tarea)

$\Rightarrow$ dado $\varepsilon>0$ $\exists\, \delta>0$ t.q.

$$\int_0^\delta \frac{e^{-kt}}{e^t-1} t^{Re(z)-1}\,dt < \varepsilon/2 \qquad \forall k\in\mathbb{Z}^+$$

por otra parte

$$\int_\delta^\infty \frac{e^{-kt}}{e^t-1} t^{Re(z)-1}\,dt \leq e^{-k\delta} \int_\delta^\infty \frac{t^{Re(z)-1}}{e^t-1}\,dt$$

Note que $\lim_{k\to\infty} e^{-k\delta} \int_\delta^\infty \sim dt = 0$

$\Rightarrow$ dado el $\varepsilon>0$ $\exists\, k_0\in\mathbb{Z}^+$ t.q. si $k\geq k_0$ entonces

$$e^{-k\delta}\int_\delta^\infty \frac{t^{Re(z)-1}}{e^t-1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

~~Y se tiene que~~ $\Rightarrow$ si $k\geq k_0$ $\int_\delta^\infty \frac{e^{-kt}}{e^t-1} t^{Re(z)-1}\,dt < \varepsilon/2$

En resumen para $\varepsilon > 0$, $\exists K_0 \in \mathbb{Z}^+$ es t.q.

$$\int_0^\infty \frac{e^{-Kt}}{e^t - 1} t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt = \int_0^{\delta} \cdots dt + \int_{\delta}^{\infty} \cdots dt$$

$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Teorema.- Si $z \in \Omega = \{z \mid \operatorname{Re}(z) > 1\}$ entonces

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

Recordamos que $\Gamma(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$

Dem.- Tenemos que

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx, \quad x \in \mathbb{R}$$

Sea $x = nt$, $n \in \mathbb{Z}^+$ $\Rightarrow dx = n\,dt$,

$$\Rightarrow \Gamma(z) = \int_0^\infty n^z t^{z-1} e^{-nt} dt, \text{ y como}$$

$$\Gamma(z) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty t^{z-1} e^{-nt} dt$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{K} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty t^{z-1} \sum_{n=1}^{K} e^{-nt} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty t^{z-1} \frac{1 - e^{-Kt}}{e^t - 1} dt$$

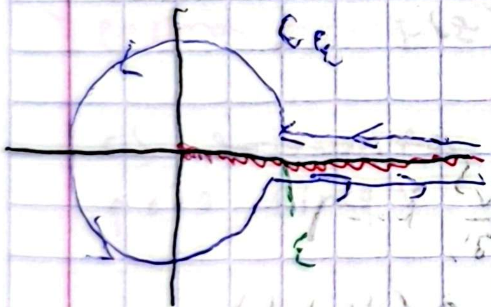
Escaneado con CamScanner

$$= \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt - \cancel{\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty t^{z-1}\frac{e^{-Nt}}{e^t-1}\,dt}$$

$\to 0$ cuando $N\to\infty$ Teo. anterior

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt \quad \circledast$$

Teorema.- Sea $0<\varepsilon<2\pi$ fijo y la rama 0 del logaritmo, además consideramos la curva C_ε



Si $\operatorname{Re}(z)>1$ fijo, entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{w^{z-1}}{e^w-1}\,dw = \left(e^{2\pi i z}-1\right)\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt$$

Dem.- Sea $G(w,z)=\frac{w^{z-1}}{e^w-1}$.

$$\int_{C_\varepsilon} G = \underbrace{\int_{\gamma_+} G}_{a)} + \underbrace{\int_{|w|=\varepsilon} G}_{b)} + \underbrace{\int_{\gamma_-} G}_{c)}$$

a) Tenemos que $-\gamma_+$ está parametrizada por $w(t)=t$ con $t\in[\varepsilon,\infty)$
$\Rightarrow dw = dt$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_+} G\,dw = -\int_{-\gamma_+} G\,dw = -\int_\varepsilon^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt$$

cuando $\varepsilon \to 0$ $= \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$.

b) $\left| \int_{|w|=\varepsilon} \phi(z,w) dw \right| \leq \int_{|w|=\varepsilon} \frac{|w^{z-1}|}{|e^w - 1|} |dw|$

- $|w^{z-1}| = \left| e^{(z-1)\ln_0(w(t))} \right|$

$= \left| e^{(z-1)[\ln(\varepsilon) + it]} \right|$

$= e^{(Re(z)-1)\ln(\varepsilon) - Im(z) t}$

$= \varepsilon^{Re(z)-1} \cdot e^{-Im(z) t}$

$\leq C \cdot \varepsilon^{Re(z)-1}$

- $|e^w - 1| = \left| w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \dots \right|$

$\geq \frac{|w|}{2}$ $\quad 0 < |w| < 1$

$\Rightarrow \frac{1}{|e^w - 1|} \leq \frac{2}{|w|} \leq \frac{2}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \left| \int_{|w|=\varepsilon} \sim \right| \leq \int_{|w|=\varepsilon} \frac{|w^{z-1}|}{|e^w - 1|} dw$

$\leq C \varepsilon^{Re(z)-1} \cdot \frac{2}{\varepsilon} \int_{|w|=\varepsilon} |dw|$

$\leq C_1 \varepsilon^{Re(z)-1} \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$

y más en los vídeos

En resumen, dada $\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt$

existe una función entera f_0 t.q.

$$\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt = \frac{f_0(z)}{e^{2\pi i z}-1} \quad \text{con } Re(z)>1$$

$$\Rightarrow \zeta(z) = \underbrace{\frac{1}{\Gamma(z)[e^{2\pi i z}-1]} f_0(z)}_{\text{esto es analítico en una región más grande.}}, \quad Re(z)>1$$

Teorema: $F(z) = \frac{1}{\Gamma(z)(e^{2\pi i z}-1)} \int_{C_\varepsilon} \frac{w^{z-1}}{e^w-1}\,dw$

es ~~holomorfa~~ meromorfa con un único polo simple en $z=1$.

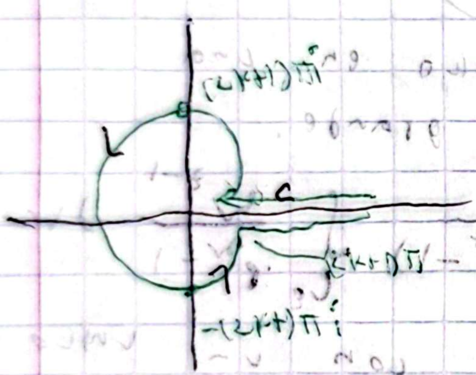
Proposición: $F(z)$ del teorema anterior es extensión analítica de $\zeta(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^z}$.

A la función F se llamamos la función zeta de Riemann

Teorema.- para todo $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ la función ζ de Riemann satisface la ecuación funcional

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z)\, \zeta(1-z)$$

Dem: Sea $z = s \in \mathbb{R}^-$ fijo y $k \in \mathbb{Z}^+$. Consideremos la curva C_k definida como sigue:



y consideremos

$$\int_{C_k} \frac{w^{s-1}}{e^w - 1}\, dw$$

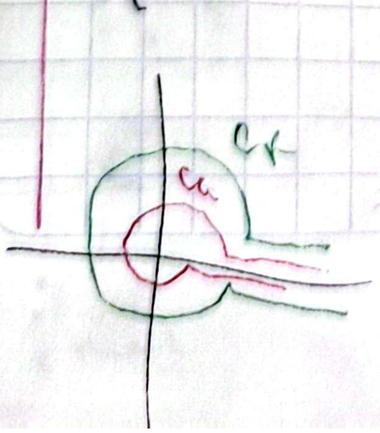
$$w^{s-1} = e^{(s-1)\ln_0(w)}$$

Obs:

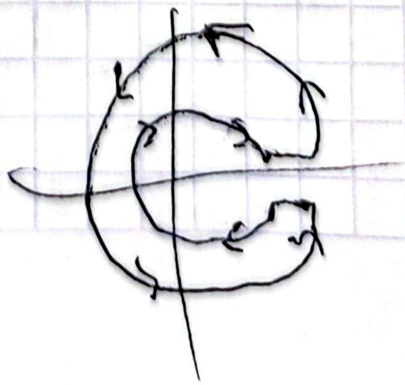
1) Los polos simples de $G(s,w) = \frac{w^{s-1}}{e^w-1}$ dentro de C_k son: $z = \pm 2\pi i n$, $n = 1, 2, \dots, k$

2) $w = 0$ es un punto de ramificación (Teo. del residuo no aplica)

Sea $0 < \varepsilon < 2\pi$ y consideremos la curva C_ε



$C_k + (-C_\varepsilon)$ $\Rightarrow$



Aplicando el Tpo. del residuo a la curva $C_K + (-C_\varepsilon)$

$$\Rightarrow \int_{C_K - C_\varepsilon} \frac{w^{s-1}}{e^w - 1}\, dw = 2\pi i \sum_{n=1}^{K} \operatorname{Res}\left(\frac{w^{s-1}}{e^{w}-1}, \pm 2\pi i n \right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{w^{s-1}}{e^{w}-1}, \pm 2\pi i n \right) = \lim_{w \to \pm 2\pi i n} \frac{w^{s-1}}{e^{w}-1} (w \mp 2\pi i n)$$

$$= \cancel{\lim_{w\to\pm 2\pi i n}} (\pm 2\pi i n)^{s-1} = e^{(s-1)(\ln(2\pi n) + i \arg_0(\pm 2\pi i n))}$$

$$= e^{(s-1)\left(\ln(2\pi n) + i \cdot \begin{cases} \frac{\pi}{2}, + \\ \frac{3\pi}{2}, - \end{cases}\right)}$$

$$= (2\pi)^{s-1} \frac{1}{n^{1-s}} e^{(s-1) i \cdot \begin{cases} \frac{\pi}{2}, + \\ \frac{3\pi}{2}, - \end{cases}}$$

$$\Rightarrow \int_{C_K - C_\varepsilon} \sim dw = 2\pi i \sum_{n=1}^{K} (2\pi)^{s-1} \frac{1}{n^{1-s}} e^{(s-1) i \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \end{cases}}$$

$$= 2\pi i \left[(2\pi)^{s-1} e^{(s-1) i \frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{K} \frac{1}{n^{1-s}} + (2\pi)^{s-1} e^{(s-1) i \frac{3\pi}{2}} \sum_{n=1}^{K} \frac{1}{n^{1-s}} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{C_K - C_\varepsilon} \sim dw = (2\pi)^{s-1} \sum_{n=1}^{K} \frac{1}{n^{1-s}} \cdot \left[e^{(s-1)\frac{\pi}{2} i} + e^{(s-1)\frac{3\pi}{2} i} \right]$$

$$= (2\pi)^{s-1} \sum_{n=1}^{K} \frac{1}{n^{1-s}} \cdot e^{(s-1) i \pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} s\right)$$

$$= -2(2\pi)^{s-1} e^{s\pi i} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^{1-s}}$$

Tomando $k \to \infty$ en ambos lados

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{k\to\infty} \int_{C_k - C_\varepsilon} \frac{w^{s-1}}{e^{w}-1}\, dw = -2(2\pi)^{s-1} e^{s\pi i} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

Ahora

$$\left| \int_{C_k} \frac{w^{s-1}}{e^{w}-1}\, dw \right| \leq \int_{C_k}$$

$\frac{?}{?}$ (lado 3) de mayo

Teorema (principio del módulo máximo)

Sea f analítica en una región Ω t.q $|f|$ alcanza máximo en algún punto de Ω, (entonces) $\exists$ f es constante.

Dem.- Supongamos por contradicción que f es no constante.

Sea $z_0 \in \Omega$, por el teorema de la aplicación abierta, f es una aplicación abierta entonces dado $\varepsilon > 0$ t.q $D(z_0, \varepsilon) \subset \Omega$ $f(D(z_0, \varepsilon))$ es abierto

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ t.q $D(f(z_0), \delta) \subseteq f(D(z_0, \varepsilon))$.

Consideramos $w = w_0 + \epsilon w_0$, $\epsilon > 0$
$\Rightarrow |w| = (\epsilon + 1)|w_0|$

para $\epsilon = \dfrac{\delta}{2|w_0|} \Rightarrow$ 1) $|w - w_0|$ es 2) $|w| > |w_0|$

$w \in f(D(z_0, \varepsilon)) \Rightarrow \exists z \in D(z_0, \varepsilon)$ t.q
$w = f(z)$, reemplazando en 2)
$\Rightarrow |f(z)| > |f(z_0)|$!!!

Corolario.- Sea Ω una región. Si f es continua en $\bar{\Omega}$ y analítica en $\Omega \Rightarrow |f|$ alcanza máximo en $\partial\Omega$

Lema de Schwarz: Sea f analítica en $D(0,1)$ con $f(0)=0$ y $|f(z)|\leq 1$ $\forall z\in D(0,1)$ entonces $|f(z)|\leq |z|$ $\forall z\in D(0,1)$

Más aún, si existe $z_0\neq 0\in D(0,1)$ t.q. $|f(z_0)|=|z_0|$ entonces f es una rotación, i.e. $f(z)=e^{\alpha i}z$ p.a. $\alpha\in\mathbb{R}$

Corolario: Las únicas funciones analíticas e invertibles del $D(0,1)$ en sí mismo, $f: D(0,1)\to D(0,1)$ que preserva el origen ($f(0)=0$) son rotaciones.

Obs.- Si $f: D(0,1)\to D(0,1)$ analítica e invertible $\Rightarrow$ f^{-1} es analítica.

Notación: $\mathbb{D}=D(0,1)$

Obs. por lo anterior tenemos que

$$\mathrm{Aut}_0(\mathbb{D})=\{f:\mathbb{D}\to\mathbb{D} \mid f \text{ es analítica e invertible } \} \ f(0)=0\ \}$$

$$\Rightarrow (\mathrm{Aut}_0(\mathbb{D}),\circ)\cong(\{e^{i\alpha},\alpha\in[0,2\pi)\},\cdot)$$

$$\cong(S^1,\cdot)$$

Teorema.- Sea Ω región simplemente conexa. Supongamos que existe $f: \Omega \to \mathbb{D}$ analítica e invertible, entonces f es única.

Dem.- Tomemos $z_0 \in \Omega$ t.q. $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) = \lambda \neq 0$ (pues f invertible).

Supongamos que $f_1 : \Omega \to \mathbb{D}$ y $f_2 : \Omega \to \mathbb{D}$ son analíticas e invertibles t.q. $f_1(z_0) = 0 = f_2(z_0)$ y $f_1'(z_0) = \lambda = f_2'(z_0)$

Consideremos $f_1 \circ f_2^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.
Como f_1, f_2 son analíticas e invertibles
$\Rightarrow$ $f_1 \circ f_2^{-1}$ es analítica e invertible, además $(f_1 \circ f_2^{-1})(0) = f_1(z_0) = 0$

$\therefore$ $f_1 \circ f_2^{-1}$ es una rotación

$\Rightarrow (f_1 \circ f_2^{-1})(z) = e^{i\alpha} z \quad \forall z \in \mathbb{D}$

$\Rightarrow f_1'(f_2^{-1}(z)) \cdot (f_2^{-1})'(z) = e^{i\alpha} \quad \forall z \in \mathbb{D}$

$\Rightarrow f_1'(f_2^{-1}(z)) \cdot \dfrac{1}{f_2'(f_2^{-1}(z))} = e^{i\alpha}$

$\underset{z=0}{\Rightarrow} f_1'(z_0) \cdot \dfrac{1}{f_2'(z_0)} = e^{i\alpha}$

$\Rightarrow \lambda \cdot \dfrac{1}{\lambda} = e^{i\alpha} \Rightarrow e^{i\alpha} = 1$

$\therefore$ $f_1(f_2^{-1}(z)) = z \Rightarrow f_1(z) = f_2(z) \quad \forall z \in \mathbb{D}$

Teorema.- Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ región simplemente conexa. Entonces existe f analítica e invertible $f: \Omega \to f(\Omega) \subset D(0,1)$

Dim.- Como $\mathbb{C} \setminus \Omega \neq \emptyset$ entonces existe $h_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Definamos $g(z) := z - h_0$ que claramente no se anula en Ω $\Rightarrow$ por teo 1 de clase 6 de mayo existe una rama analítica $\tilde{f}$ del logaritmo de g, i.e.,

$$e^{\tilde{f}(z)} = g(z) \quad \forall z \in \Omega$$

definamos ahora una rama analítica de la función $\sqrt{z-h_0}$,

$$h(z) := \sqrt{z-h_0} = e^{\frac{1}{2}\tilde{f}(z)}$$

Notemos que h satisface

a) $h^2(z) = e^{\tilde{f}(z)} = z - h_0$

$\Rightarrow z = (h(z))^2 + h_0 \quad (*)$

b) $h(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$

c) h es analítica e invertible

visto que $h(z_1) = h(z_2) \Rightarrow$

$z_1 = h^2(z_1) - h_0 = h^2(z_2) + h_0 = z_2$

(*)

En particular h es homeomorfismo
$\therefore$ $h(\Omega)$ es simplemente conexo

veamos que $h(\Omega) \cap [-h(\Omega)] = \emptyset$

sup. que $\exists w_0$ t.q $w_0 = h(z_1)$ y $w_0 = -h(z_1)$
con $z_0 \in \Omega$ y $z_1 \in \Omega$

$\Rightarrow$ por (a)

$$z_0 = (h(z_0))^2 + h_0 = (-h(z_1))^2 + h_0 = z_1$$

$\Rightarrow z_0 = z_1$

$\Rightarrow w_0 = h(z_0) = h(z_1) = -w_0 \Rightarrow w_0 = -w_0$

$\Rightarrow w_0 = 0$! pues por (b) $h(z) \neq 0$

$\therefore$ $h(\Omega) \cap [-h(\Omega)] = \emptyset$ $(*_2)$

Sea $w_0 \in h(\Omega)$. como h es analítica y no constante $\Rightarrow h(\Omega)$ es abierto
por tanto existe $\varepsilon > 0$ t.q.

$$\overline{D(z_0, \varepsilon)} \subset h(\Omega)$$

$(*_3)$

Afirmamos que $|-h(z) - w_0| > \varepsilon$ $\forall z \in \Omega$
esto pues se cumple (b) $(*_2)$

Finalmente definamos

$$f(z) = \frac{\varepsilon}{h(z) + w_0} \quad / z \in \Omega$$

es analítica e invertible en Ω por $(*_3)$

p.D) $f(\Omega) \subseteq \mathbb{D}$ p.D) $|f(z)|<1$

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{1(z)+10} \right| < \frac{1}{3} \qquad \therefore f(\Omega) \subseteq \mathbb{D}.$$

Teorema Arzela-Ascoli: Sea $E \subset \mathbb{C}$ conjunto compacto y la familia

$$\mathcal{F} := \{ f : E \to \mathbb{C} ; f \text{ continua} \}$$