19 de Agosto.

Teorema 0.- Sea f analítica en una región $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, si $f'(z_0) \neq 0$ entonces f preserva ángulos

Def.- Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f \in C^1$. Decimos que f es conforme en z_0 si preserva ángulos y su orientación

Teorema 1.- $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica en z_0, con $f'(z_0) \neq 0$ si y solo si f $(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ es conforme en z_0

Teorema 2.- (Principio del módulo máximo)
Si f es analítica en una región Ω t.q. $|f|$ alcanza su máximo en un punto de Ω entonces f es constante.

Teorema 3.- (Lema de Schwarz) Supongamos que f es analítica en $\mathbb{D}$. Si $f(0)=0$ y $|f(z)| \leq 1$ $\forall z \in \mathbb{D}$
$\Rightarrow |f(z)| \leq |z|$ $\forall z \in \mathbb{D}$

Si además existe $z_0 \in \mathbb{D}$, $z_0 \neq 0$ t.q. $|f(z_0)| = |z_0|$ entonces f es una rotación

Teorema 4.- Las únicas funciones analíticas e invertibles del disco $\mathbb{D}$ en sí mismo que preservan el origen son rotaciones

Teorema 5.- Sea Ω región simplemente conexa, $z_0 \in \Omega$ y $\lambda \neq 0$ número real. Si existe una función analítica e invertible $f: \Omega \to \mathbb{D}$ t.q. $f(z_0)=0$, $f'(z_0) = \lambda$ $\Rightarrow$ f es única

Def. 1.- Sea Ω_1, Ω_2 regiones en $\mathbb{C}$ y $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ función analítica e invertible con inversa analítica

Decimos que f es un isomorfismo analítico o una función biholomorfa. Si $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ entonces f es un automorfismo de Ω

Notación: $Aut(\Omega) = \{ f : \Omega \to \Omega \mid f$ es analítica e invertible

Teorema 6.- Se tiene que

$$Aut(\Omega) = \left\{ f(z) = e^{i\alpha} \cdot \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \; ; \; \begin{array}{l} \alpha \in [0, 2\pi) \\ |z_0| < 1 \end{array} \right\}$$

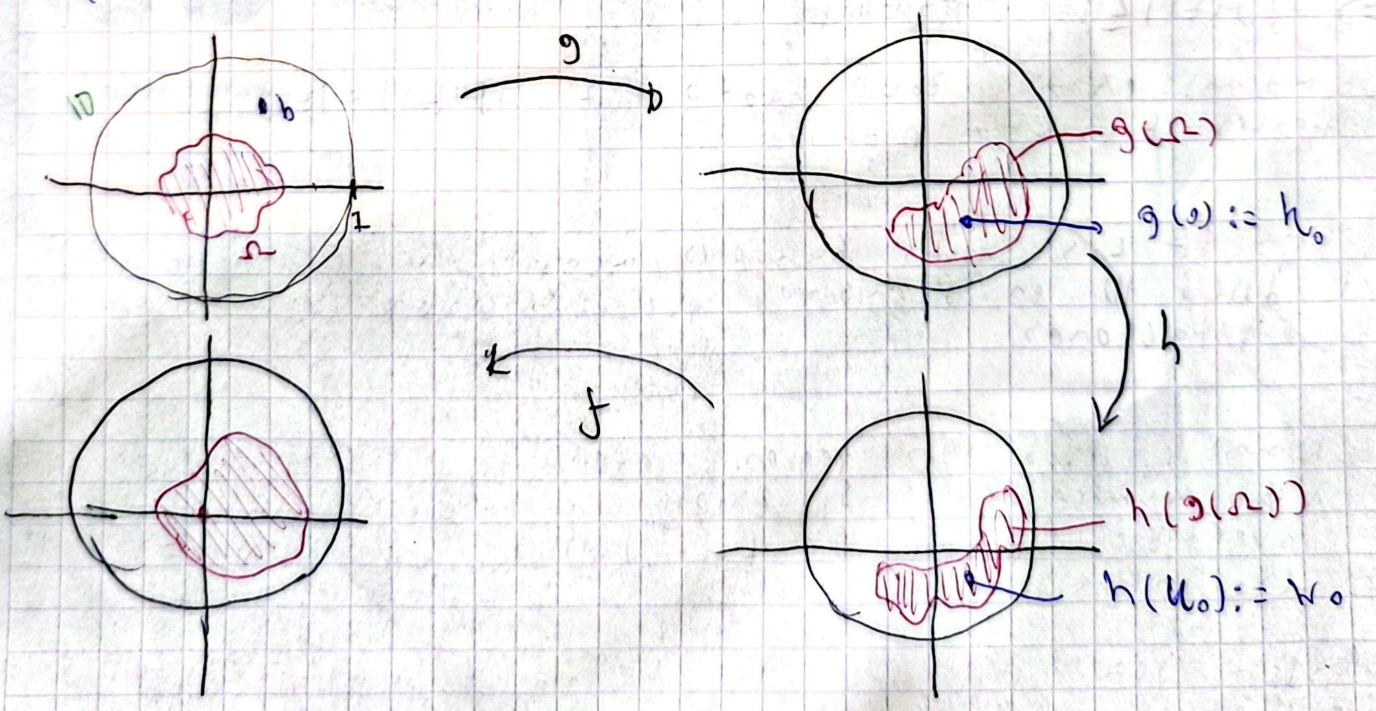
Teorema 7.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región simplemente conexa y $f : \Omega \to \Omega$ analítica. Si $f(z) \neq 0 \; \forall z \in \Omega$ entonces existe una rama analítica $\tilde{f}$ de $\log f(z)$ t.q.

$$e^{\tilde{f}(z)} = f(z) \quad \forall z \in \Omega$$

con $\tilde{f}$ analítica e invertible

Teorema 8.- Sea $\Omega \subset \mathbb{D}$ región simplemente conexa. Si $0 \in \Omega$ entonces existe $\psi : \Omega \to \psi(\Omega)$ analítica e invertible t.q. $\psi(0) = 0$ y $|\psi'(0)| > 1$

Dem.- por hip $\exists\, b \in \mathbb{D} \setminus \Omega$



• $g(z) := \dfrac{z - b}{1 - \bar{b} z}$ (teo 6) $\Longrightarrow$
- $g \in Aut(\Omega)$, $g(z) \neq 0$ i.e, $0 \notin$
- $g(b) = 0$
- $g(\Omega)$ es simplemente conexo

- $h(z) = \sqrt{z}$.

Como $0 \notin g(\Omega)$, defino $g_1(z) = z$ en $g(\Omega) \Rightarrow g_1(z) \neq 0$ $\forall z \in g(\Omega)$ $\therefore$ por teorema 7 existe $\tilde{f}$ t.q.
$e^{\tilde{f}(z)} = g_1(z) = z$ $\therefore$ puedo definir $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\tilde{f}(z)} = h(z)$
y por tanto h es analítica e invertible en $g(\Omega)$

- $f(z) = \dfrac{z - w_0}{1 - \bar{w}_0 z}$ $\underset{\text{Teo 6}}{\Rightarrow}$ es analítica e invertible y $f(w_0) = 0$

- Si definimos $\psi := f \circ h \circ g$, $\psi : \Omega \to \mathbb{D}$ es t.q. es analítica e invertible, puesto que f, g y h lo son y $\psi(0) = f(h(g(0))) = f(h(h_0)) = f(w_0) = 0$

PD $|\psi'(0)| > 1$

$|\psi'(0)| = |(f \circ h \circ g)'(0)| = |f'(w_0) h'(h_0) g'(0)| = \dfrac{1 - |w_0|^2}{(1 - |w_0|^2)^2} \cdot \dfrac{1}{2|\sqrt{h_0}|}$

- $(1 - |b|)^2 = \dfrac{1}{1 - |b|} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{b}} \cdot (1 - |b|^2)$

$= \dfrac{1 + |b|}{2\sqrt{|b|}} > \dfrac{1}{\sqrt{|b|}} > 1$ pues $b \in \mathbb{D} \Rightarrow |b| < 1$ ■

Clase 24 Agosto

Teorema 1: Sea $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ sucesión de funciones analíticas. Si $f_n \to f$ normalmente en $\Omega \Rightarrow f$ es analítica.

Sí

~~Dem.~~

Teorema 2: (Hurwitz) Sea Ω una región y $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ sucesión convergente a f t.q. f_n no se anula en Ω $\forall n \in \mathbb{N}$. Si la convergencia es normal, entonces f no se anula en Ω ó $f \equiv 0$ en Ω

Corolario 1.- Sea Ω región y $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ analíticas e inyectivas que convergen normalmente a f. Entonces f es inyectiva o constante.

Def. 1.- La familia $\mathcal{F} = \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ analíticas} \}$ es normalmente acotada en Ω si para cada compacto K de Ω existe $M \in \mathbb{R}$ t.q.

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in K, \ \forall f \in \mathcal{F}$$

Teorema 3.- (Montel) Sea Ω una región y la familia $\mathcal{F} = \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ analíticas} \}$.
Si $\mathcal{F}$ es normalmente acotada en Ω entonces toda sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ admite una subsucesión $\{f_{n_k}\} \subset \mathcal{F}$ que converge normalmente en Ω

Teorema 4.- Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ región simplemente conexa entonces existe un biholomorfismo (holomorfa e invertible por tanto inversa holomorfa) $f : \Omega \to f(\Omega) \subseteq \mathbb{D}$

Teorema 5 (de la aplicación de Riemann).-
Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ región simplemente conexa. Existe una única $F_0 : \Omega \to \mathbb{D}$ analítica e invertible

Dem.- Si F_0 existe $\Rightarrow$ es única (teorema 5, 19 agosto)

Sea $z_0 \in \Omega$ y consideremos la familia:

$$\mathcal{F} = \{ f : \Omega \to f(\Omega) \subseteq \mathbb{D} \mid f \text{ analítica invertible}, \ f(z_0) = 0 \}$$

- $\mathcal{F}$ es no vacía (ejercicio, hint teorema 4)
- Note que $\mathcal{F}$ es normalmente acotada pues $(*)_1$

$$|f(z)| < 1 \quad \forall z \in \Omega, \ \forall f \in \mathcal{F}$$

Consideremos

$$A_{z_0} = \{ |f'(z_0)| \mid f \in \mathcal{F} \} \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

a) Como $z_0 \in \Omega \Rightarrow \exists \rho > 0$ t.q. $D(z_0, \rho) \subset \Omega$

tenemos $|f'(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,\rho)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz \right|$

$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(z_0,\rho)} \frac{|f(z_0)|}{|z-z_0|^2} |dz| \underset{f \in \mathcal{F}}{<} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(z_0,\rho)} \frac{1}{|z-z_0|^2} |dz|$

$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho^2} \int_{\partial D(z_0,\rho)} |dz| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho^2} \cdot 2\pi\rho = \frac{1}{\rho}$

En resumen $|f'(z_0)| < \frac{1}{\rho} \quad \forall f \in \mathcal{F}$ $\therefore \exists \sup A_{z_0}$ y sea $\alpha_0 = \sup A_{z_0} < \infty$

b) Supongamos que $\alpha_0 = 0 \Rightarrow 0 \leq |f'(z_0)| \leq 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{F}$

pero esto no puede pasar pues f es invertible

$\therefore \alpha_0 \neq 0 \Rightarrow 0 < \sup A_{z_0} < \infty$ $\otimes_2$

por propiedad de supremo existe una sucesión $\alpha_n \in A_{z_0}$ t.q. $\alpha_n \to \alpha_0 \Rightarrow \alpha_n = |f_n'(z_0)|$, $f_n \in \mathcal{F}$

por $\otimes_1$ podemos aplicar el teorema de Montel a $\{f_n\}$. Por lo tanto existe $\{f_{n_k}\} \subset \mathcal{F}$ subsucesión de $\{f_n\}$ que converge normalmente en Ω

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(z) = F_0(z) \quad \forall z \in \Omega$$

Vamos a probar que F_0 es la buscada

1) Como $f_{n_k} \to F_0$ normalmente y f_{n_k} son analíticas

$\Rightarrow F_0$ es analítica

2) $\{f_{n_k}\}$ es sucesión de funciones analíticas e invertibles en Ω y $f_{n_k} \to F_0$ normalmente $\Rightarrow$ por el teo de Hurwitz (Corolario 1, 1 Agosto 24) F_0 es inyectiva (invertible) o constante pero F_0 no es constante (Tarea) $\Rightarrow F_0$ invertible

3) Observimos que $|f_{n_k}(z)| < 1$ $\forall z \in \Omega$, $k \in \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow k \to \infty$, $|F_0(z)| \leq 1$ $\forall z \in \Omega$

pero no puede pasar que p.a $z_0 \in \Omega$, $|F_0(z_0)| = 1$ pues si pasara $\Rightarrow$ por el principio del modulo maximo f sería constante !

$\Rightarrow$ $|F_0(z)| < 1$ $\forall z \in \Omega$ $\Rightarrow$ $F_0(\Omega) \subseteq \mathbb{D}$

Ahora sup. que $F_0(\Omega) \subsetneq \mathbb{D}$

- $F_0(\Omega)$ es simplemente conexo
- $F_0(z_0) = \lim_{k\to\infty} \underbrace{f_{n_k}(z_0)}_{f_{n_k} \in \mathcal{F}} = 0$

$\Rightarrow$ $0 \in F_0(\Omega)$

$\Rightarrow$ Teorema 3, Agosto 19 existe $\psi : F_0(\Omega) \to \mathbb{D}$ t.q $\psi(0) = 0$ y $|\psi'(0)| > 1$ $\triangle$

Notemos además

- $\psi \circ F_0$ es analítica e invertible t.q $\psi \circ F_0 : \Omega \to \mathbb{D}$
- $(\psi \circ F_0)(z_0) = \psi(F_0(z_0)) = \psi(0) = 0$

$\Rightarrow$ $\psi \circ F_0 \in \mathcal{F}$

Por lo tanto $|(\psi \circ F_0)'(z_0)| < \alpha_0$, sin embargo

$|(\psi \circ F_0)'(z_0)| = |\psi'(F_0(z_0))|\,|F_0'(z_0)| = |\psi'(0)|\,\alpha_0$

$\Rightarrow$ $|\psi'(0)|\,\alpha_0 < \alpha_0$ $\Rightarrow$ $|\psi'(0)| < 1$! por $\triangle$

$\therefore$ $F_0(\Omega) = \mathbb{D}$

29 de Agosto

Def.- Si $w: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se define el Laplaciano de w como

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

y se define la ecuación de Laplace como

$$\Delta w = 0$$

Teorema 1.- La ecuación de Laplace permanece invariante bajo cambios de coordenadas analíticos

Def 1.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región y $w: \Omega \to \mathbb{R}$ función de clase C^2. Decimos que w es armónica si

$$\Delta w(x,y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega$$

Lema 1.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región, si $f = u + iv$ es analítica en $\Omega \Rightarrow u, v$ son armónicas en Ω

¿Si u, v son armónicas $\Rightarrow \exists f$ analítica t.q. $Re(f) = u$ y $Im(f) = v$? Investigaremos este problema.

Def.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ región y $u: \Omega \to \mathbb{R}$ armónica en Ω. Si existe $v: \Omega \to \mathbb{R}^2$ t.q. $f = u + iv$ es analítica en Ω, decimos que v es armónica conjugada de

¿Es única la armónica conjugada?

Teorema 2.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ región, $u: \Omega \to \mathbb{R}$ armónica. Si v_1, v_2 son armónicas conjugadas entonces $v_1 - v_2$ es constante en Ω

Dem.- por def. $f_1 = u + v_1 i$, $f_2 = u + v_2 i$ son analíticas en Ω

$\therefore f_1 - f_2 = i(v_1 - v_2)$ es analítica en Ω

pero como v_1, v_2 son funciones a valor real

$\Rightarrow (f_1 - f_2)(\Omega) \subseteq i\mathbb{R} \Rightarrow f_1 - f_2$ es constante

$\Leftarrow$) $i(v_1 - v_2)$ costante $\Rightarrow v_1 - v_2$ constante.

Obs:- Tenemos que $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es armonica pero no tiene armonica conjugada en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

sin embargo u sí tiene armonica conjugada en $Re(z) > 0$

Teorema 3:- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ región simplemente convexa. Si $u: \Omega \to \mathbb{R}$ es armonica entonces existe $v: \Omega \to \mathbb{R}$ tal

$$f = u + iv \text{ es analitica}$$

(existe la conjugada armonica)

31 de Agosto

Corolario 1:- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región y $u: \Omega \to \mathbb{R}$. u es armonica syss u es localmente la parte real de una función analitica.

Dem:- Ejercicio

Lema 1:- Toda función armonica es C^∞

Obs:- Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región simplemente convexa y $u: \Omega \to \mathbb{C}$ es armonica $\Rightarrow$ por teo 3 $\exists v: \Omega \to \mathbb{R}$ t.q $f = u + iv$ es analitica en Ω

$\Rightarrow e^f$ es analitica en Ω

$\Rightarrow$ si $|e^f|$ alcanza su maximo en Ω

$\Rightarrow e^f$ = constante

modulo maximo

pero $|e^f| = e^u$

$\therefore$ Si u alcanza su maximo en $\Omega \Rightarrow e^{f} = $ constante

$\Rightarrow |e^{f}| = $ constante $\Rightarrow e^{u} = $ constante $\Rightarrow u = $ constante.

$\therefore$ Si u es armonica en Ω simp. conexa $\Rightarrow$ alcanza su maximo en $\partial\Omega$

Teorema 1.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ región simplemente conexa y $u: \Omega \to \mathbb{R}$ armonica. Si u alcanza maximo o minimo en $\Omega \Rightarrow u$ es constante.

Teorema 2.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ región y $u: \Omega \to \mathbb{R}$ armonica. Si u alcanza maximo o minimo en Ω entonces u es constante.

Dem.- Sup. que u alcanza maximo M en $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$.

Sean $A = \{(x,y) \in \Omega \mid u(x,y) < M\}$

$B = \{(x,y) \in \Omega \mid u(x,y) = M\}$

$\Rightarrow A \cap B = \emptyset$ y $\Omega = A \cup B$

- A es abierto, pues $A = u^{-1}(-\infty, M)$
- B es abierto.

Tenemos que $B \neq \emptyset$, sea $z_1 \in B$, como Ω es región $\Rightarrow \exists \delta > 0$ t.q $D(z_1, \delta) \subset \Omega$

Ademas $z_1 \in B \Rightarrow u(z_1) = M$ i.e u es armonica y alcanza su maximo en $D(z_1, \delta)$ region simple conexo

$\Rightarrow$ Teo 1 $\Rightarrow u$ es constante en $D(z_1, \delta)$

i.e $u(x,y) = M \quad \forall (x,y) \in D(z_1, \delta) \Rightarrow D(z_1, \delta) \subseteq B$

$\therefore B$ es abierto

i.e. A y B son tq.

- A, B abtos
- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cup B = \Omega$

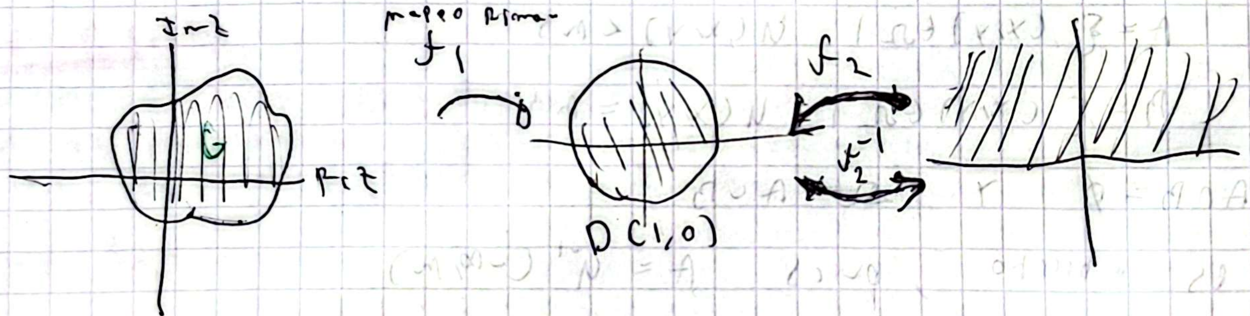
$\Rightarrow$ como Ω es conexo $\Rightarrow$ $\Omega = B$

i.e. $u(x,y) = M$ $\forall (x,y) \in \Omega$. ∎

Ayudante

- Encontrar un mapeo conforme entre una region G y el semiplano superior

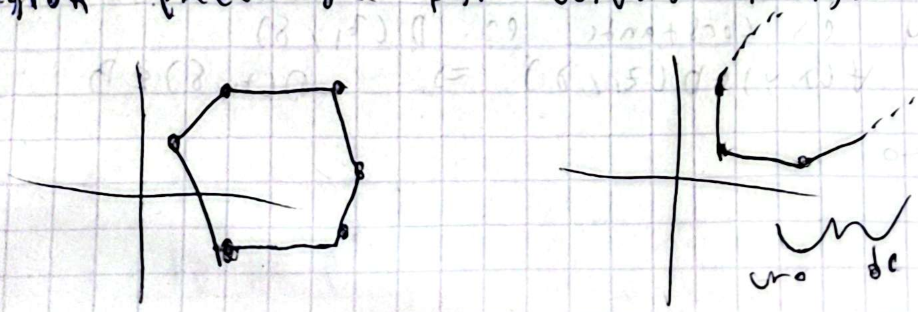
Sol.- Por el teo. del mapeo de Riemann el problema tiene solución



La función buscada sera $f = f_2^{-1} \circ f_1$

Pero esto no me dice como encontrar explicitamente la función i.e.

Def.- Llamamos por región poligonal a ~~una~~ región encerrada por curvas poligonales

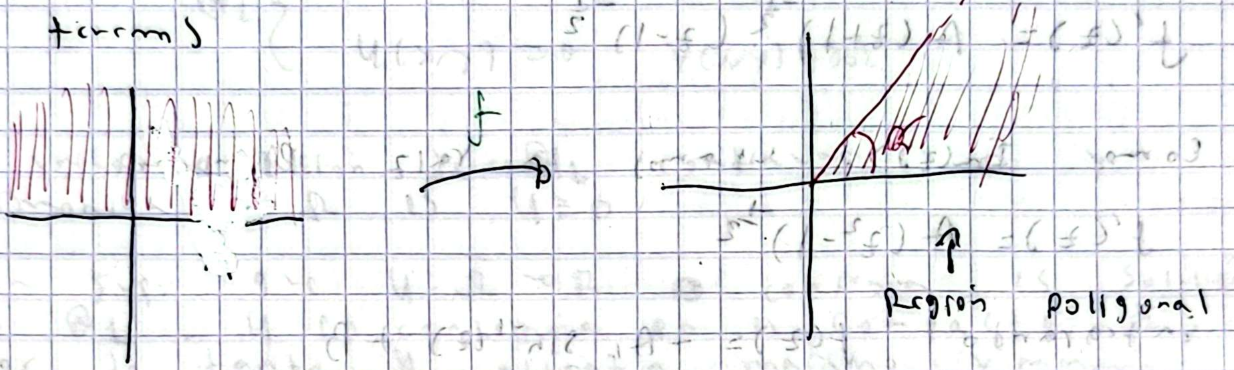


uno de los vertices es ∞

Obs.- Sea $f(z)=(z-x_1)^{\frac{\alpha}{\pi}}$ con $x_1, \alpha \in \mathbb{R}$, $0<\alpha<2\pi$:

Tenemos que f es la composición de una traslación ($T(z)=z-x_1$) y una potencia ($F(z)=z^{\alpha/\pi}$), $f=F\circ T$

$\Rightarrow$ tenemos



¿Conforme?

Tenemos que $f'(z)=\frac{\alpha}{\pi}(z-x_1)^{(\frac{\alpha}{\pi}-1)}$, entonces $f'(z)\neq 0$ si $z=x+iy$, $y>0$.

Proposición.- Sea f analítica en $Im(z)>0$ con derivada

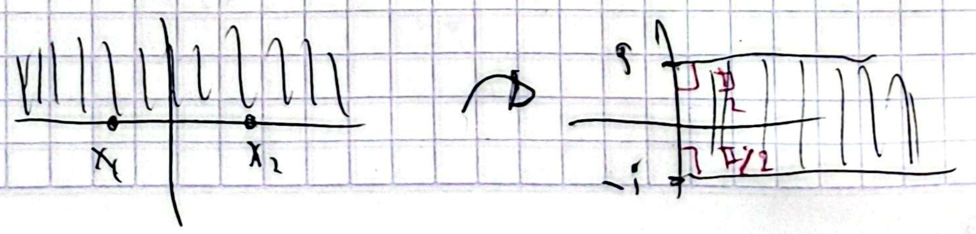
$$f'(z)=A(z-x_1)^{(\frac{\alpha_1}{\pi}-1)}(z-x_2)^{(\frac{\alpha_2}{\pi}-1)}\cdots(z-x_n)^{(\frac{\alpha_n}{\pi}-1)} \quad \circledast$$

Con $x_1<x_2<\dots<x_n$ y $0<\alpha_i<2\pi$ y A constante. Entonces el plano superior es transformado por $f(z)$ en una región poligonal no acotada con ángulos interiores $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$\circledast$ Es llamada fórmula de Schwarz-Cristoffel

Ejemplo.-

1) Usar la fórmula de Sch-Cris para encontrar un mapeo conforme del semiplano $Im(z)>0$ y la región $\Omega=\{z\in\mathbb{C} \mid Re(z)\geq 0,\ |Im(z)|\leq 1\}$



Los ~~ángulos~~ vértices que queremos son $w_1 = -i$
$w_2 = i$ y ángulos $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$

elegimos por practicidad $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$

$\Rightarrow \quad f'(z) = A(z+1)^{-\frac{1}{2}}(z-1)^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow$ Como $Im(z) > 0$ usamos la raíz principal

$\Rightarrow \quad f'(z) = A(z^2-1)^{-1/2}$

$\Rightarrow$ integrando $\quad f(z) = -Ai \sin^{-1}(z) + B$

y por practicidad pedimos $f(-1) = -i$ y $f(1) = i$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = -\frac{2}{\pi} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad f(z) = i\frac{2}{\pi}\sin^{-1}(z)$

2 de septiembre

Teorema 1.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región acotada y el problema

$$\circledast_1 \begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \forall (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0 & \forall (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

La única solución de $\circledast_1$ continua en $\bar{\Omega}$ y armónica en Ω es $u \equiv 0$

Dem.- Sup. que $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua es solución de $\circledast_1$. u es continua en el compacto $\bar{\Omega}$, por lo tanto u alcanza máximo y mínimo en Ω (M, m)

- Si M, m se alcanzan en la frontera $\Rightarrow M = m = 0$

$$\Rightarrow 0 \leq m \leq u(x,y) \leq M = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega$$

$$\Rightarrow u \equiv 0$$

- Si M o m se alcanzan en Ω, por teo. 2 (Agosto 3) u es constante, pero por hip. u satisface la condición de frontera por lo cual $u \equiv 0$

Corolario 1.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región acotada y $h : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ función continua. Si existe solución para el problema

$$\circledast_2 = \begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \forall (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = h(x,y) & \forall (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

entonces es única

Teorema 2.- Sea $R>1$. Si $u: D(0,R)\to\mathbb{R}$ es armónica, entonces

$$u(z)=u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\,\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt \quad \forall z\in\mathbb{D}$$

Dem.- $D(0,R)$ es simplemente conexo y u es armónica, por teo 3 (29 Agosto) existe armónica conjugada v:

$$f=u+iv \text{ analítica en } D(0,R)$$

Sea $w\in\mathbb{D}$ (fijo), definimos

$$F_w(\eta):=f(\eta)\,\frac{1-|w|^2}{1-\bar{w}\eta}$$

F_w deja de ser analítica en $\eta=\eta_0=\frac{1}{\bar{w}}$ ($\bar{w}\neq 0$)

Como $w\in\mathbb{D}\Rightarrow \frac{1}{\bar{w}}=\eta_0\in\mathbb{D}^c \Rightarrow |\eta_0|>1$ ($\bar{w}\in\mathbb{D}$)

Si $1<R<|\eta_0| \Rightarrow F_w$ es analítica $\forall\eta\in D(0,R)$ podemos aplicar fórmula integral de Cauchy a F_w

$$\Rightarrow F_w(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\mathbb{D}}\frac{F_w(\eta)}{\eta-z}\,d\eta \quad \blacktriangle$$

parametrizando $\eta=e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$

$$\Rightarrow \blacktriangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,\frac{1-|w|^2}{1-\bar{w}e^{it}}\cdot\frac{1}{1-ze^{-it}}\,dt \quad \forall z\in\mathbb{D}$$

En resumen

$$f(z)\cdot\frac{1-|w|^2}{1-\bar{w}z}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,\frac{1-|w|^2}{1-\bar{w}e^{it}}\cdot\frac{1}{1-ze^{-it}}\,dt$$

Fijando $w=z$ ($\bar{z}\cdot z=|z|^2$)

Escaneado con CamScanner

$\Rightarrow$ como $\overline{\frac{1}{1-\bar{z}e^{it}}} = 1-ze^{-it}$

$$\Rightarrow \;= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-it}|^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt \quad \forall z\in\mathbb{D}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(f) = u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt$$

Def: Sea $|w|=1$ y $z\in\mathbb{D}$, el núcleo de Poisson se define como:

$$K(z,w) = \frac{1-|z|^2}{|w-z|^2}$$

Corolario: Sea $u:\overline{\mathbb{D}}\to\mathbb{R}$ función continua tq u es armonica en $\mathbb{D}$. Para todo $z\in\mathbb{D}$ se cumple

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt$$

Dem: Sea $\{r_n\}\subseteq\mathbb{R}$ sucesión creciente tq $r_n\to 1$ y definimos

$$V_n(z) := u(r_n z)$$

Por hipotesis, u es armonica en $\mathbb{D}$ $\Rightarrow$ V_n es armonica siempre que $r_n z\in\mathbb{D}$ $\Rightarrow$ $z\in D(0,\frac{1}{r_n})$

Es decir V_n es armonica en $D(0,\frac{1}{r_n})$; $\frac{1}{r_n}>1$

Por teorema 2 aplicado a V_n:

$$V_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_n(e^{it}) \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt \quad \forall z \in D$$

$r \to 1$

$\lim_{n\to\infty} V_n(z) = \lim_{r_n \to 1} u(r_n z) = u(z) \quad \forall z \in \bar{D}$

Como $\bar{D}$ es compacto, la convergencia $V_n \to u$ es uniforme

$\Downarrow$

$u(z) = \ldots$ ∎

Obs: si $z = re^{i\alpha}$, $0 \le r < 1$, $-\pi < \alpha \le \pi$

$$\Rightarrow K(e^{it}, z) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha - t)+r^2} = \frac{1-r^2}{|1-re^{i(\alpha-t)}|^2}$$

Sea $P(r,\theta) = \frac{1-r}{|1-re^{i\theta}|^2} = \frac{1-r}{1-2r\cos(\theta)+r^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(e^{it}) \cdot \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(e^{it})\, P(r, \alpha - t)\,dt$$

5 de Septiembre

Teorema 1.- Sea $0 \leq r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$. Se cumplen las sig. propiedades

i) $P(r,\theta) > 0$, $P(r,-\theta) = P(r,\theta)$, $P(r,\theta) = P(r,\theta+2\pi)$

ii) $\displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} P(r,s)\,ds = 2\pi$

iii) Sea $\delta \in (0,\pi)$ fijo. Entonces $\lim_{r\to 1^-} P(r,s) = 0$ uniformemente para todo s t.q. $\delta < |s| < \pi$

Dem.-

i) ✓

ii) Tenemos que $u(x,y) = 1$ es armónica en $\mathbb{D}$ y continua en $\overline{\mathbb{D}}$, por lo tanto el corolario 2 (septiembre 2) aplica:

$$1 = u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt$$

$$\underset{z=re^{i\alpha}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{|1-e^{(\alpha-t)i}|^2}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\alpha-t)\,dt$$

$\Rightarrow$ $s = \alpha - t$ $\Rightarrow$ $\displaystyle 1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} P(r,s)\,ds$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} P(r,s)\,ds = 2\pi$

iii) Supongamos $0 < \delta < s < \pi$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial s}(r,s) = \frac{-2r\sin(s)(1-r^2)}{(1-2r\cos(s)+r^2)^2} < 0 \quad \forall s \in (\delta,\pi)$$

Por lo tanto

$$0 < P(r,s) < P(r,\delta) \quad \forall s \in (\delta,\pi)$$

Por otra parte $P(r,s) = P(r,-s)$ entonces

$$0 < P(r,s) < P(r,\delta) \quad \forall s \text{ t.q. } \delta < |s| < \pi$$

tomando ~~...~~ $r \to 1^-$ se tiene el resultado. ∎

⋮

~~... contin...~~

Teorema 2.- Sea $h: \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ continua, si $u: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ se define como:

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} h(e^{it})\, P(r, \alpha - t)\, dt \qquad \forall \begin{cases} 0 \le r < 1 \\ -\pi \le \alpha < \pi \end{cases}$$

entonces

$$\lim_{r \to 1^-} u(re^{i\alpha}) = h(e^{i\alpha}) \qquad \forall \alpha \in (-\pi, \pi).$$

Teorema 4.- Sea $\alpha \in (-\pi, \pi]$ y $h: \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ continua. Entonces se cumple que

$$\lim_{(r,\theta) \to (1^-, \alpha)} u(re^{i\theta}) = h(e^{i\alpha})$$

9 de septiembre

Teorema 1.- Sea $h: \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ continua. La función

$$U(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(e^{it}) \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt, & z \in \mathbb{D} \\ h(e^{it}), & z = e^{i\alpha} \in \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

es continua en $\overline{\mathbb{D}}$ y además, es la única solución al problema

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in \mathbb{D} \\ u(x,y) = h & (x,y) \in \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

9, 12, 14 sep. En las notas

No me estaba gustando el tema y no lo apunté

19 septiembre

Teorema 1.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región simplemente conexa acotada cuyos puntos de la frontera son simples y $f: \Omega \to \mathbb{D}$ analítica e invertible (Biholomorfismo).

Entonces f puede extenderse a un homeomorfismo

$$\hat{f}: \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}$$

Def. 1.-

- Una curva (continua) cerrada e inyectiva (no se corta a sí misma) se llama curva de Jordan (no necesita ser suave)

  a) $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$ (continua)
  b) $\gamma(0) = \gamma(1)$
  c) $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ $\forall t_1, t_2 \in [0,1]$

Ω es un dominio de Jordan si su frontera es una curva de Jordan

Lema 1.- Todo abierto acotado de $\mathbb{C}$ cuya frontera es una curva de Jordan es simplemente conexo

Objetivo: Los puntos de la frontera de un dominio de Jordan son simples.

Def 2.- Sea $A \subseteq \mathbb{C}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus A$. Decimos que A separa a z_1 y z_2 si z_1, z_2 pertenecen a componentes conexas distintas de $\mathbb{C} \setminus A$.

~~Septiembre 21~~

Teorema 1.- (Janiszewski) Sean $A, B \subseteq \mathbb{C}$ t.q. A es compacto, B cerrado y $A \cap B$ conexo. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus (A \cup B)$ no son separados por A ni por B $\Rightarrow$ tampoco son separados por $A \cup B$

Teorema 2.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región acotada y $a \in \partial\Omega$. Si existe $\varepsilon_0 > 0$ t.q. $D(a, \varepsilon) \cap \Omega$ es conexo para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ entonces a es un punto de frontera simple

Dem.- Sea $\{z_n\}$ sucesión en Ω t.q. $z_n \to a \in \partial\Omega$.

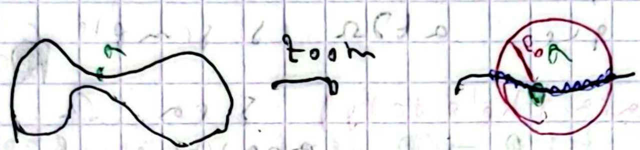
Por hip. existe $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ t.q. $D(a, 2^{-k}) \cap \Omega$ es conexo $\forall k \geq k_0$. Esto permite unir los puntos

$$\{z_{n_k}, \ldots, z_{n_{k+1}}, \ldots\} \quad k \geq k_0$$

mediante caminos de tal forma que se forma una curva continua que cumple la def. de punto frontera

Teorema 3.- Si Ω es dominio de Jordan entonces cada punto de la frontera es simple.

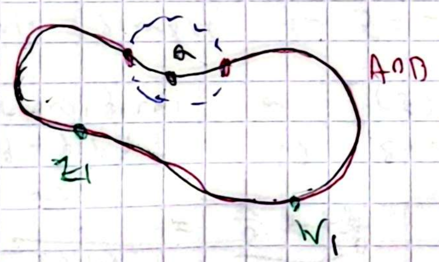
Dem.- Por continuidad de $\partial\Omega$ podemos encontrar $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeño t.q. $D(a,\varepsilon)\cap\partial\Omega$ sea un arco de curva conexo.



Sea $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ y $z,w\in D(a,\varepsilon)\cap\Omega$. P.D. $D(a,\varepsilon)\cap\Omega$ es conexo.

Sean $A=\partial\Omega$ compacto, $B=D^c(a,\varepsilon)=\mathbb{C}\setminus D(a,\varepsilon)$ que es cerrado y además $A\cap B$ es conexo

~~$A\cap B=$~~



Para $z_1,w_1\in A\cap B$ puedo trazar la curva desde z a w esto gracias a que lo que está dentro del disco es conexo. Esto me dice que para cualquiera $z_1,w_1\in A\cap B$ existe un camino que los une $\Rightarrow$ $A\cap B$ conexo por trayectorias $\Rightarrow$ $A\cap B$ conexo.

Notamos que $z,w\in(A\cup B)^c=A^c\cap B^c=(\partial\Omega)^c\cap D(a,\varepsilon)$

a) $A=\partial\Omega$ no separa a z,w, puesto que $(\partial\Omega)^c$ tiene 2 componentes conexas y z,w están en una de ellas a saber Ω.

b) $B=D^c(a,\varepsilon)$ no separa a z,w puesto que $B^c=D(a,\varepsilon)$ conexo y $z,w\in D(a,\varepsilon)$

$\therefore$ Por el teo. 1 z,w no son separados por $A\cup B=\partial\Omega\cup D$

es decir $z, w \in D(a, \varepsilon) \cap \Omega$ están en una misma componente conexa del complemento

$$(A \cup B)^c = (\partial\Omega)^c \cap D(a,\varepsilon) = D(a,\varepsilon) \setminus \partial\Omega$$

i.e., $D(a,\varepsilon) \cap \Omega$ es conexo $\forall\, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$\Rightarrow$ por teo. 2 que $a \in \partial\Omega$ es simple

teorema t = (Carathéodory) Sea Ω dominio de Jordan y $f : \Omega \to \mathbb{D}$ analítica e invertible. Es posible extender f a un homeomorfismo entre $\overline{\Omega}$ y $\overline{\mathbb{D}}$.

Clase 26 septiembre

Def: se define a una transformación de Möbius a una función de la forma

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

con $ad-bc\neq 0$.

Obs. 1 La condición $ad-bc$ es pues $T'(z)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ y así $T'(z)\neq 0$ por lo que será una transformación conforme (que son las que nos interesan)

propiedades:

- si $c=0 \Rightarrow T(z)=Az+B$ (función entera)
- si $c\neq 0 \Rightarrow T$ es analítica en $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$ y además tiene un polo simple en $z=-\frac{d}{c}$
- podemos considerar a $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ con $ad-bc=1$ pues si $ad-bc\neq 1 \Rightarrow$ sea $D=ad-bc$

$$\Rightarrow T(z)=\frac{\frac{az+b}{D}}{\frac{cz+d}{D}}=\frac{\frac{a}{D}z+\frac{b}{D}}{\frac{c}{D}z+\frac{d}{D}}$$ con a',b',c',d' t.q. $a'd'-b'c'=1$

$\therefore$ $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ con $ad-bc=1$ le llamaremos transformación de Möbius a partir de ahora.

Teorema 1: Sean $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ t.q. $c\neq 0$ y $ad-bc\neq 1$. La función $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ es t.q.

$$T:\mathbb{C}\setminus\{-d/c\}\to\mathbb{C}\setminus\{\tfrac{a}{c}\}$$

es biyectiva y su inversa viene dada por $T^{-1}(w)=\frac{dw-b}{-cw+a}$

Def.- (Trasformación extendida), podemos extender una transformación de Möbius a el plano extendido:

- Si $c \neq 0$

$$\tilde{T}(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & z \neq -\frac{d}{c} \\ \infty, & z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c}, & z = \infty \end{cases} \quad \circledast$$

- Si $c = 0$

$$\tilde{T}(z) = \begin{cases} \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}, & z \in \mathbb{C} \\ \infty, & z = \infty \end{cases}$$

Y llamamos $\mathbb{M} = \{ \tilde{T} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \mid T \text{ es como } \circledast \text{ y } ad - bc = 1 \}$

Lema 1.- Sean $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tq $ad - bc = 1$ entonces $\tilde{T} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ definida en $\circledast$, es biyectiva.

Dem.- Ejercicio.

Def.- Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ entonces

- Diremos que f es conforme en $z = \infty$ si $g(z) = f(\frac{1}{z})$ es conforme en $z = 0$
- Sea z_0 un polo de f. Diremos que f es conforme en z_0 si $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ es conforme en $z = z_0$.

Teorema 3.- Sea $c \neq 0$ y $T \in \mathbb{M}$ entonces T es conforme en $z = \infty$ y $z = -\frac{d}{c}$.

Dem.-

• $z=\infty$.

Sea $g(z) = T\left(\frac{1}{z}\right) = \dfrac{a+bz}{c+dz}$, veamos que g es conforme en $z=0$. En efecto:

$$g'(z) = \frac{-(ad-bc)}{(c+dz)^2} = \frac{-1}{(c+dz)^2}$$

g es analítica en $z=0$, $g'(0) = -\frac{1}{c^2} \neq 0 \Rightarrow g$ conforme en $z=0$ $\therefore$ T es conforme en ∞

• $z = -\frac{d}{c}$

Sea $h(z) = \dfrac{1}{T(z)} = \dfrac{cz+d}{az+b} \Rightarrow h'(z) = \dfrac{-(ad-bc)}{(az+b)^2} = -\dfrac{1}{(az+b)^2}$

$\Rightarrow h'\left(-\frac{d}{c}\right) = \dfrac{-1}{\left(a\left(-\frac{d}{c}\right)+b\right)^2} = -c^2 \neq 0$ $\therefore$ h es conforme en $z=-\frac{d}{c}$

$\therefore$ T es conforme en $z = \frac{-d}{c}$. $\blacksquare$

13 de octubre

Teorema 1.- Sean $z_0, z_1, z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ distintos entre sí y $T \in \mathcal{M}$. Si z_0, z_1, z_2 son puntos fijos de T entonces $T = id$ $(T(z) = z \ \forall z \in \mathbb{C})$

Dem.- Tenemos que los puntos fijos de T son soluciones a $T(z) = z$

$$\Rightarrow \frac{az+b}{cz+d} = z \Rightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

pero por hip. hay 3 puntos fijos en $\mathbb{C}$ $\therefore$ $c=0$, $d-a=0$, $b=0$ pues la ecuación cuadrática tiene a lo más 2 soluciones $\Rightarrow d=a$, pero como $ad-bc=1$ $\Rightarrow a^2=1$

• Si $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=1$ $\Rightarrow T(z)=z$

• Si $a=-1$, $b=0$, $c=0$, $d=-1$ $\Rightarrow T(z)=z$

Si pasara que alguno de los z_0, z_1 ó z_2 es ∞
$\Rightarrow T(\infty)=\infty \Rightarrow c=0 \Rightarrow T(z) = Az+B$

Escaneado con CamScanner

lo cual a lo sumo fija un punto si $A \neq 1$
$\Rightarrow$ $A = 1$ $\Rightarrow$ $T(z) = z + B$ la cual tiene puntos fijos
sólo cuando $B = 0$ $\Rightarrow$ $T(z) = z$

Teorema 2.- Sean $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ (distintos)
$w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ (distintos)

Si existe $T \in M$ t.q. $T(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$ entonces
T es única.

Dem.- Sup. que $\exists$ $P \in M$ t.q. $P(z_k) = w_k$

Notemos que $P^{-1} \circ T \in M$ t.q. $(P^{-1} \circ T)(z_k) = P^{-1}(T(z_k))$
$= P^{-1}(w_k) = z_k$

Es decir, $P^{-1} \circ T \in M$ t.q. fija 3 puntos $\therefore$ por
el teo. anterior $P^{-1} \circ T = Id \Rightarrow P = T$

Lema.- Sean $z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ (distintos) y definamos
$S : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ como sigue:

$$S(z) = \begin{cases} \dfrac{(z - z_3)(z_2 - z_4)}{(z - z_4)(z_2 - z_3)} & \text{si } z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \\[2ex] \dfrac{z - z_3}{z - z_4} & \text{si } z_2 = \infty \\[2ex] \dfrac{z_2 - z_4}{z - z_4} & \text{si } z_3 = \infty \\[2ex] \dfrac{z - z_3}{z_2 - z_3} & \text{si } z_4 = \infty \end{cases}$$

S es la única transfor. de Moebius t.q.

$$S(z_2) = 1 \quad , \quad S(z_3) = 0 \quad , \quad S(z_4) = \infty$$

Dem.- Se da por el teo. 2.

Escaneado con CamScanner

Def. (razón cruzada) Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ t.q. z_2, z_3, z_4 son distintos, entonces se define la razón cruzada como el complejo

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

Teorema 3.- Si $z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ (distintos) y $w_2, w_3, w_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ (distintos), entonces existe una única transformación $T \in M$ t.q. $T(z_k) = w_k$.

Dem.- Por Teo. 2 si existe se dará la unicidad de inmediato.

Consideremos $S(z) = [z, z_2, z_3, z_4]$ y $P(w) = [w, w_2, w_3, w_4]$.

Afi. $T = P^{-1} \circ S$ es la transformación buscada.

Notemos que por def. $P(w_2) = 1$, $P(w_3) = 0$, $P(w_4) = \infty$

$\Rightarrow$

$T(z_2) = (P^{-1} \circ S)(z_2) = P^{-1}(S(z_2)) = P^{-1}(1) = w_2$

$T(z_3) = (P^{-1} \circ S)(z_3) = P^{-1}(S(z_3)) = P^{-1}(0) = w_3$

$T(z_4) =$ " " $= w_4$

17 octubre

Productos infinitos

Def.- Sea $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ sucesión [illegible]. Decimos que el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n .$$

converge si:

a) Existe $N \in \mathbb{Z}^+$ t.q $z_k \neq 0 \quad \forall k \geq N$.

b) $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=N}^{n} z_k$ existe y es finito no nulo

Obs.- [illegible] que el producto

1) Si $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge y existe al menos un $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ t.q $z_{k_0} = 0$ $1 \leq k_0 \in N$ ent. $\prod_{n=1}^{\infty} z_k = \prod_{k=1}^{N-1} z_k \prod_{k=N}^{\infty} z_k = 0$

2) Si $z_k \neq 0 \quad \forall k \geq N$ y $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=N}^{n} z_k = 0$ diremos que el producto diverge a 0.

Teorema.- Sea $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ t.q $z_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$ si

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

Dem.- Por def. como $\prod^{\infty}$ converge ent.

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} z_k = p \neq 0$$

$$\Rightarrow z_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lim p_n}{\lim p_{n-1}} = \frac{p}{p} = 1.$$

Teorema.- Sea $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$, $z_n \neq 0$.

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n) \text{ converge}$$

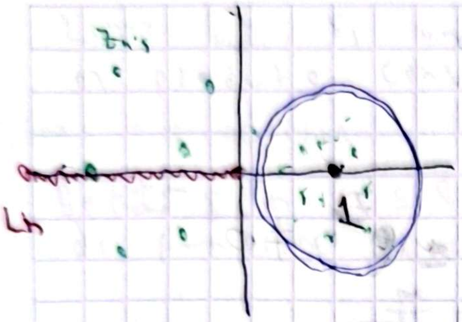
con log cualquier rama

Dem.-

$\Rightarrow$) Como $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge ent. $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$

$\Rightarrow \exists N \geq 0$ t.q si $n \geq N \Rightarrow |z_n - 1| < 1$

$\Rightarrow Re(z_n) > 1 \quad \forall n \geq N$



esto me dice que podemos trabajar con la rama principal del logaritmo.

sea

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} Ln(z_n)$$

Obs.- Es falso el sig. razonamiento

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} Ln(z_n) = \lim_{n\to\infty} Ln\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right) = Ln\left(\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} z_k\right) = Ln\, p$$

pues p podría no caer en la banda $A_{-\pi} = \{a+it \mid t \in (-\pi,\pi)\}$ y Ln no sería continuo ahí

entonces $e^{S_n} = \prod_{k=1}^{n} e^{Ln z_k} = \prod_{k=1}^{n} z_k$

$\Rightarrow \quad S_n = Ln\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right) + 2\pi i k_n \quad (*)_1$, con $k_n \in \mathbb{Z}$, para cada n.

Obs.- por $(*)_1$ tenemos que

$$2\pi i (k_n - k_{n-1}) = S_n - S_{n-1} - \left(Ln\left[\prod_{k=1}^{n} z_k\right] - Ln\left[\prod_{k=1}^{n-1} z_k\right]\right)$$

$$= Ln(z_n) - \left(Ln\left(\prod\right) - Ln\left(\prod\right)\right)$$

tomando $n \to \infty$

$\Rightarrow \quad 2\pi i \lim_{n\to\infty} k_n - k_{n-1} = 0 - Ln\, p + Ln\, p = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} k_n - k_{n-1} = 0 \Rightarrow \{k_n\}$ es sucesión de Cauchy

$\Rightarrow$ converge

$\therefore$ de $(*)$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n =$ converge

⇐) Supongamos que $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(z_k)$ converge a z_0

Tenemos que $\prod_{k=1}^{n} z_k = e^{\sum_{k=1}^{n} \ln(z_k)}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} z_k = \lim_{n\to\infty} e^{\sum_{k=1}^{n} \ln(z_k)} = e^{\lim \cdots} = e^{z_0} \neq 0$$

∴ $\prod_{k=1}^{\infty} z_k$ converge ■

Teorema 3.- Sea $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ t.q. $z_n \neq 0$.
La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

converge absolutamente si y solo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+z_n)$$

converge absolutamente.

Dem.- ~~Si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ conv. abs. ⇒ $|z_n| \to 0$ ⇒ $z_n \to 0$~~

Si vemos (17 de octubre)

Teorema 4.- Sea $a_n \geq 0$ $\forall n$.

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n) \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Dem.- Ejercicio

Def.- Sea $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ t.q. $z_n \neq -1$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.
Decimos que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1+z_n)$ converge absolutamente si

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+|z_n|) \text{ converge}$$

Lema 1.- Si un producto converge absolutamente, entonces el producto converge.

Clase 20 octubre

Def 1.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región y $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ sucesión de funciones. Decimos que el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(z)]$$

converge uniformemente en Ω si

- Existe $N \in \mathbb{Z}^+$ t.q. $f_n(z) \neq -1$ $\forall n > N$, $\forall z \in \Omega$ (i.e. N no depende de z)
- La sucesión de productos parciales

$$\prod_{k=N+1}^{\infty} [1 + f_k(z)]$$

converge uniformemente en Ω a $p(z)$ t.q. $p(z) \neq 0$

Teorema 1.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región y $\{f_n : \Omega \to \mathbb{C}\}$ sucesión de funciones t.q.

a) $|f_n(z)| \leq M_n$ $\forall z \in \Omega$, $\forall n \geq N+1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge

Entonces $\prod_{k=N+1}^{\infty} [1 + f_n(z)]$ converge uniformemente.

Dem.- Por hip. $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ converge uniformemente en Ω (criterio M Weierstrass para series) entonces por teo 4 (17 octubre)

$$\prod_{n=1}^{\infty} [1 + |f_n(z)|] \quad \text{converge} \quad \forall z \in \Omega$$

es decir el producto infinito converge absolutamente $\Rightarrow$ converge (Lema 1, 17 octubre) con esto la función

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(z)] \quad \text{está bien definida}$$

Veamos que la convergencia será uniforme.

P.D. $P_n(z) = \prod_{k=1}^{n} [1+f_k(z)]$ es sucesión de Cauchy uniforme en Ω

Sean $m, n \in \mathbb{Z}^+$ t.q. $m < n$ p.d.

$$\left.\begin{aligned} P_n(z) - P_m(z) &= \sum_{k=m}^{n-1} [P_{k+1}(z) - P_k(z)] \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} P_k(z)[1+f_{k+1}(z) - 1] \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} P_k(z) f_{k+1}(z) \end{aligned}\right\} \circledast_1$$

Notemos que

$$|P_k(z)| = \left| \prod_{n=1}^{k} [1+f_n(z)] \right| = \prod_{n=1}^{k} |1+f_n(z)| \leq \prod_{n=1}^{k} [1+|f_n(z)|]$$

$$\leq \prod_{n=1}^{\infty} [1+|f_n(z)|] \quad (\text{pues } 1+|f_n(z)| \geq 1 \ \forall n)$$

$$\leq \prod_{n=1}^{\infty} e^{|f_n(z)|} \quad (\text{pues } 1+x \leq e^x \ \forall x)$$

$$= e^{\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|} \leq e^{\sum_{n=1}^{\infty} M_n} = e^M \quad (\text{por hip})$$

$\Rightarrow |P_k(z)| \leq e^M \quad \forall z \in \Omega \quad (*_2)$

Por otra parte $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ converge uniformemente en Ω

$\therefore$ podemos tomar m suficientemente grande t.q. $\forall \varepsilon > 0$

$$\sum_{k=m}^{n-1} |f_{k+1}(z)| < \frac{\varepsilon}{e^M} \quad \forall z \in \Omega \quad (*_3)$$

∴ usando (1), (2) y (3)

⇒

$$\Rightarrow |p_n(z) - p_m(z)| \le \sum_{k=m}^{n-1} |p_k(z)|\,|f_{k+1}(z)|$$

$$\le \sum_{k=m}^{n-1} e^{M} |f_{k+1}(z)| < e^{M} \cdot \frac{\varepsilon}{e^{M}} = \varepsilon$$

∴ $\{p_n\}$ es de Cauchy uniforme en Ω ∴ converge uniformemente ∴ $\prod_{n=1}^{\infty} [1+f_n(z)]$ converge uniformemente. ■

Ejemplos:

• $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ converge en $\overline{D(0,R)}$ $\forall R>0$

Dem.- sea $z \in \overline{D(0,R)}$ $\Rightarrow |z| \le R$. Y sea $f_n(z) = -\frac{z^2}{n^2}$ p.t.

a) $|f_n(z)| = \frac{|z|^2}{n^2} \le \frac{R^2}{n^2} := M_n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$

∴ por teo. ant. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ conv. unif. en $\overline{D(0,R)}$. Además como cada producto parcial es analítico en $\mathbb{C}$, tengo una sucesión de funciones analíticas que convergen normalmente en compactos de $\mathbb{C}$ ∴

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

es analítica en $\mathbb{C}$.

Corolario.- Bajo las hip. del teo 1 si además cada f_n es analítica en Ω, entonces

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(z)]$$

es analítica en Ω

Teorema 2.- Bajo las hip. del teo. 1 si además f_n es analítica en Ω $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ y

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(z)], \quad z \in \Omega$$

entonces:

$f(z_0) = 0$ para $z_0 \in \Omega \iff f_n(z_0) = -1$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$

Dem.-

$\Rightarrow)$ Supongamos que $f(z_0) = 0 \Rightarrow$ por def. 1 (17 octubre)

$$\begin{cases} a) \ \exists N \in \mathbb{Z}^+ : \ f_k(z_0) + 1 \neq 0 \quad \forall k \geq N \\ b) \ \prod_{k=N}^{\infty} (1 + f_k(z_0)) \text{ es finito y no nulo} \end{cases}$$

Definamos $g(z) = \prod_{k=N}^{\infty} [1 + f_k(z)]$

$$= \lim_{n \to \infty} \prod_{k=N}^{n} [1 + f_k(z)]$$

$\Rightarrow$ por teo. 1 y las hip. que $g(z) \prod_{k=N}^{\infty} [1 + f_k(z)]$ converge uniformemente y por tanto g es analítica en Ω y t.q. $g(z_0) \neq 0$ (a) y b))

$\therefore$ por continuidad ~~...~~ $\exists \delta > 0$ t.q.

$g(z) \neq 0 \quad \forall z \in D(z_0, \delta)$

$$\Rightarrow f(z) = \underbrace{\prod_{k=1}^{N-1} [1 + f_k(z)]}_{h_N(z)} \underbrace{\prod_{k=N}^{\infty} [1 + f_k(z)]}_{g(z)}$$

Así tenemos que $g(z) \neq 0 \ \forall z \in D(z_0, \delta)$ y por hip

$f(z_0) = 0 \Rightarrow h_N(z_0) = 0$

$\Rightarrow \exists \, 1 \leq k \leq N$ t.q. $f_k(z_0) = -1$

$\Leftarrow]$ Si $f_q(z_0) = -1$ entonces

$$f(z) = \prod_{k=1}^{N-1} [1 + f_k(z)] \underbrace{\prod_{k=N}^{\infty} [1 + f_k(z)]}_{\text{finito}}$$

$\exists N \in \mathbb{Z}^+$ t.q. $1 + f_k(z) \neq 0 \quad \forall k \geq N$, $\forall z \in \Omega$ por def. de conv. uniforme

$\Rightarrow 0 < q < N \Rightarrow$ Def. de producto $\Rightarrow f(z_0) = 0$ ■

24 de octubre

Teorema 1.- Sea $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{n}) e^{z/n}$, entonces f es entera y se anula únicamente en $\mathbb{Z}^+$.

Dem.- Sea $R > 0$, veamos que el producto infinito converge uniformemente en $D(0, R)$.

i) Podemos tomar N sufic. grande t.q. $N \geq 2R$, por lo tanto

$$\left|\frac{z}{n}\right| \leq \frac{R}{n} < 1 \quad \forall n \geq N, \forall z \in D(0, R)$$

es decir

$$(1 - \frac{z}{n}) e^{z/n} \neq 0 \quad \forall n \geq N, \forall z \in D(0, R)$$

ii) Para ver que el producto $\prod_{n=N+1}^{m} (1 - \frac{z}{n}) e^{z/n}$ converge uniformemente, usaremos el criterio M (producto) y para ello reescribimos el producto como

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n}) e^{z/n} = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + \underbrace{(1 - \frac{z}{n}) e^{z/n} - 1}_{f_n}]$$

a) $|f_n(z)| = |(1 - \frac{z}{n}) e^{z/n} - 1| = |e^{\operatorname{Ln}(1 + \frac{z}{n}) + \frac{z}{n}} - 1|$ ■

esto último es válido pues $z \in D(0, R)$ y $n \geq N \geq 2R$.

$$\Rightarrow |f_n(z)| \leq e^{|\operatorname{Ln}(1 + \frac{z}{n}) + \frac{z}{n}|} - 1, \quad (*)_1$$

Por otro lado

$$\operatorname{Ln}(1 + w) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} w^k, \quad |w| < 1$$

$$\Rightarrow \quad \ln(1+w) - w = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{w^k}{k} (-1)^{k+1}$$

Así por (i) tenemos que $w = \frac{z}{n}$ es tq $|w| = |\frac{z}{n}| < 1$ por lo tanto

$$\left|\ln\left(1-\frac{z}{n}\right) + \frac{z}{n}\right| = \left| -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{n}\right)^k \right| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{R}{n}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2}\frac{R^2}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{R}{n}\right)^k = \frac{1}{2}\frac{R^2}{n^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{R}{n}}$$

$$\leq \frac{1}{2}\frac{R^2}{n^2}\cdot 2 \quad \left(\text{pues } \frac{R}{n} < \frac{R}{N} \leq \frac{1}{2}\right)$$

En resumen $\left|\ln\left(1-\frac{z}{n}\right) + \frac{z}{n}\right| \leq \frac{R^2}{n^2} \quad \forall n \geq N, \ \forall z \in D(0,R)$

$\therefore$ usando $\circledast 1$ tenemos que

$$|f_n(z)| \leq e^{\frac{R^2}{n^2}} - 1$$

$\downarrow$ $\{\ e^x - 1 \leq x e^x \quad \forall x \geq 0 \ \}$

$$\leq \frac{R^2}{n^2} e^{\frac{R^2}{n^2}}$$

$\downarrow$ $\frac{R^2}{n^2} < 1$

$$\leq \frac{R^2}{n^2} e^1$$

$$\therefore \quad |f_n(z)| \leq \underbrace{\frac{R^2}{n^2} e}_{M_n} \quad \forall n \geq N, \ \forall z \in D(0,R)$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \quad \therefore$ por criterio M

$\prod_{n=N+1}^{m} (1 + f_n(z))$ converge uniformemente.

$\therefore$ por (i) y (ii) (Teo 1, 20 octubre) $\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}$ converge uniformemente en $D(0,R)$

$\therefore$ por teo 2 (20, octubre) f es analítica en $D(0,R)$, $\forall R>0$

$\therefore$ el producto infinito converge normalmente en $\mathbb{C}$ $\therefore$

f es entera, y $f(z_0)=0 \iff \cancel{f_n(z_0)=0} \to \left(1-\frac{z_0}{n}\right)e^{z_0/n}=0$

$\iff z_0 = n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ ∎

Teorema 2 (producto de Weierstrass) Dada una sucesión $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ sin puntos de acumulación finitos, existe una función entera cuyos únicos ceros son $z=a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Dem: S.p.d.g podemos suponer $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ $\therefore$ si algún $a_{k_0}=0$ entonces la función pedida sería

$$z^k f(z)$$

donde f es la función que genera que se anula en los demás a_n's distintos de cero.

Podemos ordenar los elementos de la sucesión así:

$$0<|a_1|\leq|a_2|\leq\cdots\leq|a_n|\leq\cdots$$

Definimos $P_n(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k=\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n$

Y afirmamos que

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{P_n(z)}\right]$$

es la función que cumple lo pedido. Demostración como tarea (se hace lo mismo que el ejemplo). ∎

Obs: Se pide que $\{a_n\}$ no tenga puntos de acumulación pues si los tuviera entonces f sería función entera que coincide con $g(z)\equiv 0$ en un conjunto con un punto de acumulación $\therefore$ por el principio de continuación analítica $f\equiv 0$.

Obs.- La función del teo. anterior no excluye la posibilidad de que un cero tenga multiplicidad mayor a 1 pues podría pasar que $a_k = a_{k+1}$ para algunos $k \in \mathbb{Z}^+$.

Obs.- ¿Es la función del teorema 2 única? **No**

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{n}\right)^2+\dots+\frac{1}{n}\left(\frac{z}{n}\right)^n}$$

son enteras t.q. se anulan únicamente en $\mathbb{Z}^+$ (f da un ejemplo, g se obtiene del teo.)

Teorema 3.- Si f y g son funciones enteras cuyos ceros coinciden en ubicación y multiplicidad entonces existe una función entera $\phi(z)$ t.q.

$$f(z) = e^{\phi(z)}\, g(z)$$

Dem.- Tarea.

Ejemplo.-

- Teníamos que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{z^2}{n^2}\right]$ es una función entera y además sus ~~únicos~~ ceros son en $z = n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ por lo que la función

$$g(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{z^2}{n^2}\right]$$

es entera t.q. $g(z)=0$ únicamente cuando $z \in \mathbb{Z}$.

Además por otro lado $\sin(\pi z) = 0 \iff z \in \mathbb{Z}$.

Así tenemos que $\sin(\pi z)$ y $g(z)$ son dos funciones enteras que coinciden en ubicación de ceros y multiplicidad, por lo que por el teo. 3

existe ϕ entera t.q.

$$\sin(\pi z) = e^{\phi(z)} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

¿Quien es ϕ?

26 de octubre

Teorema 1.- Sea $z \in \mathbb{C}$ entonces se cumple

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Dem.- Por lo anterior mencionado sabemos que

$$\sin(\pi z) = e^{g(z)} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad \text{con } g \text{ entera}$$

... muy muy largo (clase 26 de octubre)

Def. 1.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, f es meromorfa si f es analitica excepto en polos

Teorema 2.- Una función es meromorfa si y solo si, es el cociente de funciones enteras.

Dem.-

$\Rightarrow$] Sea f meromorfa $\Rightarrow$ por teo 2 (25 octubre) $\exists h$ entera cuyos ceros coinciden en ubicación y orden con los polos de f $\therefore$

$$g(z) = f(z) h(z)$$

es analitica con singularidades removibles en los polos de f, i.e. g es analitica $\Rightarrow$ $f = g/h$

$\Leftarrow$] Sea $f(z) = \frac{g(z)}{q(z)}$ con g, q enteras $\Rightarrow$ los singularidades de f emergen de los ceros de q $\therefore$ son unicamente polos.

31 octubre

Obs: $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}$ es analítica con polos en $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$
(Tarea)

- podríamos preguntarnos por una función que sus polos ocurran únicamente en $\mathbb{Z}^+$

$$\Rightarrow ¿ f^+(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-n} ?$$

No converge para ninguna $z \in \mathbb{C}$:(, pero

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right]$$

si es analítica con polos en $\mathbb{Z}^+$

¿Qué tengo que sumar?

Mittag-Leffler

Teorema 1 Sea $\{b_k\} \subset \mathbb{C}$ sucesión sin puntos de acumulación y definamos para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ el polinomio

$$P_k(w) = a_1^{(k)} w + a_2^{(k)} w^2 + \dots + a_{n_k}^{(k)} w^{n_k}, \quad a_{n_k}^{(k)} \neq 0.$$

Entonces existe una función meromorfa f con polos en $\{b_k\}$ de tal manera que la parte principal del desarrollo de Laurent de f (a b_k) viene dado por $P_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right)$, es decir,

desarrollo de Laurent

$$f(z) = P_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right) + h(z) \quad \leftarrow \text{en cada } b_k.$$

con h analítica.

Dem: SPG sup. que $b_k \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ y además que están ordenados así:

$$0 < |b_1| \leq |b_2| \leq \dots \qquad b_k \to \infty$$

la candidata natural a la función meromorfa buscada es

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[P_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right) + ? \right]$$

Si la serie converge entonces f es la función del teorema ¿Qué pasa si no converge?

Notemos que para $k \in \mathbb{Z}^+$ fijo, $P_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right)$ es analítica en $D(0,|b_k|)$ por lo tanto existe la serie de Maclaurin:

$$P_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{(k)} z^j$$

la serie converge uniformemente en $D(0,|b_k|/2)$ por lo cual existe $n_k \in \mathbb{Z}^+$ t.q. $\forall n \geq n_k$

$$\left| P_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right) - \sum_{j=0}^{n} c_j^{(k)} z^j \right| \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall z \in D(0,|b_k|)$$

Afirmamos que la función buscada es:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[P_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right) - q_k(z) \right]$$

con

$$q_k(z) = \sum_{j=0}^{n_k} c_j^{(k)} z^j$$

∴ Clase 31 octubre $\sum$ converge uniformemente ∴ por el criterio M es analítica en $\mathbb{C}\setminus\{b_k\}$ y satisface lo pedido

Funciones Elípticas

3 de Noviembre

¿Cual es la naturaleza de una función periódica en $\mathbb{C}$?

Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $P_f = \{ w \in \mathbb{C} \mid f(z+w) = f(z), \forall z \in \mathbb{C} \}$

En el caso real por ejem. $f(x) = \operatorname{sen}(x)$
$\Rightarrow P_f = \{ 2\pi k ; k \in \mathbb{Z} \}$ es un conjunto discreto (sin puntos de acumulación) y hay un elemento con modulo minimo.

Teorema 1.- Si $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (región) es periódica no constante ($P_f \neq \emptyset$) entonces P_f es discreto

Dem.- sup. que P_f tiene un punto de acumulación $p \in P_f \Rightarrow \exists \{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$ t.q. $z_n \to p$ y sea

$$g(z) := f(p) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

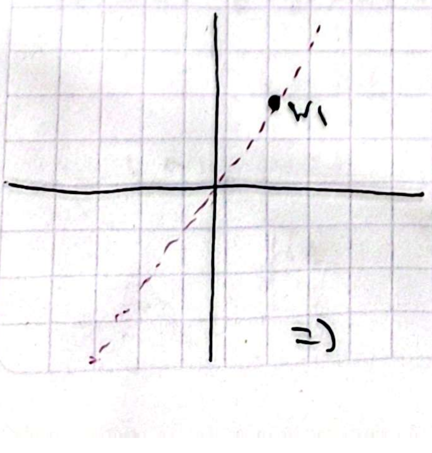
$$\Rightarrow f(z_n) = f(z_n + p) \overset{\text{periodicidad}}{=} f(p) = g(z_n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

∴ f, g son analíticas t.q. coinciden en punto de acumulación de Ω
$f \equiv g$ (principio de continuación analítica) ∴ f es constante !

■

Obs.- por teo 1 P_f es un conjunto discreto.

Sea pues $w_1 \in P_f$ t.q. $|w_1|$ sea mínimo.
Supongamos que $\lambda w_1 \in P_f$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ y representemos



$\lambda = [\lambda] + \{\lambda\}$. Como w_1 es periodo $\Rightarrow$ $w_1[\lambda]$ es periodo (pues $[\lambda] \in \mathbb{Z} \Rightarrow w_1[\lambda] = \underbrace{w_1 + \dots + w_1}_{[\lambda]}$)

∴ P_f es grupo con la suma
∴ como $\lambda w_1 \in P_f$ y $w_1[\lambda] \in P_f$

$$\Rightarrow w_1(\lambda - [\lambda]) = w_1\{\lambda\} \in P_f \quad !!!$$

pero esto no es posible pues $1 \leq \lambda \leq |w_1| < |w_1|$ y w_1 era el mínimo $\therefore$ se tiene lo que se sigue.

Lema 2.- Sea $w_1 \in P_f$ t.q. $|w_1|$ es mínimo.

$$\lambda w_1 \in P_f \iff \lambda \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

Dem.- Con lo anterior queda probado.

Así si encontramos un periodo w_1 de f entonces los periodos serán:

$$P_f' = \{ n w_1 \mid n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \}$$

Ahora sup. que $P_f \setminus P_f' \neq \emptyset$, sea $w_2 \in P_f \setminus P_f'$ t.q. $|w_2|$ sea mínimo, entonces el conjunto

$$\{ m w_2 : m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \}$$

(usando el mismo argumento) es un conjunto de periodos y al ser un grupo entonces no simultáneamente 0

$$\hat{P}_f = \{ n w_1 + m w_2 : n, m \in \mathbb{Z},\ n^2 + m^2 \neq 0 \}$$

w_1, w_2 son linealmente independientes en $\mathbb{Q}[\mathbb{R}]$

$\Rightarrow \hat{P}_f \subseteq P_f$. Sup. que existe $w \in P_f$ t.q. $w \notin \hat{P}_f$, como w_1, w_2 son L.I. en $\mathbb{Q}[\mathbb{R}]$ $\exists\, a, b \in A$ t.q. $w = a w_1 + b w_2$.

Podemos tomar $\hat{w} = [a + \frac{1}{2}] w_1 + [b + \frac{1}{2}] w_2 \Rightarrow \hat{w} \in P_f$

$\Rightarrow w - \hat{w} = a' w_1 + b' w_2$ donde $|a'| \leq \frac{1}{2}$, $|b'| \leq \frac{1}{2}$ y así

$w - \hat{w}$ es otro periodo t.q. $|w - \hat{w}| \leq \frac{1}{2}|w_1| + \frac{1}{2}|w_2| < |w_2|$!!! w_2 es de periodo mínimo en $P_f \setminus P_f'$

$\therefore\ P_f \setminus \hat{P}_f = \emptyset \Rightarrow P_f = \hat{P}_f$

Lema 2.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ no constante, entonces f puede tener a lo mucho 2 periodos (linealmente independientes en $\mathbb{R}$)

Def. 1.- Sea $L \subset \mathbb{C}$. Decimos que L es un retículo si existen 2 números complejos (vectores en $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$) linealmente independientes que generan a L como un grupo abeliano con la suma i.e.

$$L = \{ n w_1 + m w_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \} = \mathbb{Z} w_1 + \mathbb{Z} w_2$$

y decimos que w_1 y w_2 son dos periodos fundamentales

Obs.- Sea f con periodos w_1, w_2 ($\mathbb{R}$, L.I) el conjunto de todos los periodos de f viene dado por L.

Si $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ t.q.

$$z - w \in L \iff f(z) = f(w)$$

Así definimos la relación de equivalencia

$$z \equiv w \ (\text{mod } L) \iff z - w \in L$$

$$\Rightarrow [z] := \{ w \in \mathbb{C} \mid z - w \in L \}$$

$$\Rightarrow \mathbb{C}/_L = \{ [z] \mid z \in \mathbb{C} \}$$

Def. 2.- Sea f doblemente periódica con periodos w_1, w_2 ($\mathbb{R}$-L.I) entonces el paralelogramo fundamental se define como el conjunto

$$\Pi = \{ t_1 w_1 + t_2 w_2 \mid 0 \leq t_1, t_2 \leq 1 \}$$

Teorema 2.- Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entera t.q. f es doblemente periódica, Entonces f es constante.

Dem: Sean w_1, w_2 los periodos y

$R = \{ t_1 w_1 + t_2 w_2 \mid 0 \leq t_1, t_2 \leq 1 \}$ el paralelogramo fundamental

Como f es entera en $\overline{R}$ $\Rightarrow$ f es continua en $\overline{R}$ $\Rightarrow$ f acotada en $\overline{R}$. Como f es doblemente periodica entonces $\forall z \in \mathbb{C}$ $\exists w_z \in L = \mathbb{Z} w_1 + \mathbb{Z} w_2$ t.q. $z - w_z \in R$

$\Rightarrow |f(z)| = |f(z - w_z + w_z)| = |f(z - w_z)| \leq C \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\therefore$ f es acotada en $\mathbb{C}$ $\therefore$ como es entera $\Rightarrow$ f constante ∎

7 de noviembre

Def: Decimos que una función $f: \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es una función Elíptica si f es meromorfa y doblemente periodica, i.e.

- $f(z + w) = f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$ con $w \in L$ (retículo)
- $L := \mathbb{Z} w_1 + \mathbb{Z} w_2$

Teorema 1: Sea $f: \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ función elíptica. f tiene un numero finito de polos modulo L. (en el paralelogramo fundamental hay finitos) y además

$$\sum_{z_k \in R} \operatorname{Res}(f, z_k) = 0$$

z_k polos en R (paralelogramo fundamental)

Dem: Sea $R = \{ w_1 t_1 + w_2 t_2 \mid 0 \leq t_1, t_2 \leq 1 \}$.

Sabemos que el conjunto de polos de f es un conjunto discreto en $\mathbb{C}$, por lo tanto, su intersección con $\overline{R}$ es finito. En consecuencia, podemos trasladar R por un factor $\delta \in \mathbb{C}$ adecuado t.q. $\partial(\delta + R)$ este libre de polos ($\delta + R := R_\delta$)

Así, como f es analítica en $\overline{R}_\delta$ excepto por polos en $\operatorname{int}(R_\delta)$, el teorema del residuo aplica:

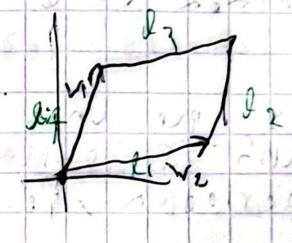
① ... $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R_\delta} f\,dz = \sum_k \mathrm{Res}(f, z_k)$

donde z_k, $k=1,\dots,p$ son los polos de f en $\mathrm{int}(R_\delta)$

Por otro lado

$$\int_{\partial R_\delta} f = \int_{l_1} + \int_{l_2} + \int_{l_3} + \int_{l_4}$$ con l_i los lados del paralelogramo

• $\int_{l_1} f(z) = \int_{l_1} f(z+w_1) \overset{u=z+w_1}{=} -\int_{l_3} f(u)\,du$



• $\int_{l_2} = -\int_{l_4}$

$$\int_{\partial R_\delta} f = 0$$

∴ sustituyendo $\sum_k \mathrm{Res}(f, z_k) = 0$

Def.- Sea $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ función elíptica. Definimos su **orden** como el número de polos módulo L (contando multiplicidades)

$$\mathrm{Ord}(f) = \#\text{ polos (cont. multiplicidad)}$$

Ejercicio.- Si f es elíptica $\Rightarrow$ $\mathrm{ord}(f) \geq 2$

Una función elíptica es al menos de orden 2.

Obs.- Las funciones elípticas más simples son:

• f tiene un polo de orden 2 en R

• f tiene 2 polos simples en R.

Teorema 2.- Sea $f: \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ una función elíptica no constante. f toma todos los valores $c \in \mathbb{C}$ tantas veces como su orden.

Dem.- Sea $S_c = \{ z \in \mathbb{C} \mid f(z) = c \}$ que es discreto

$\Rightarrow S_c \cap R_s$ es finito y polos$(f) \cap R_s$ finito

$\exists s$ t.q ∂R_s no tiene puntos de S_c ni polos de f

por el teo. del índice

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_s} \frac{f'(z)}{f(z) - c}\, dz = N - P$$ con $N = \#$ de raíces de $f(z) = c$ (mult.)
$P = \#$ polos de f (mult.)

pero como f es elíptica

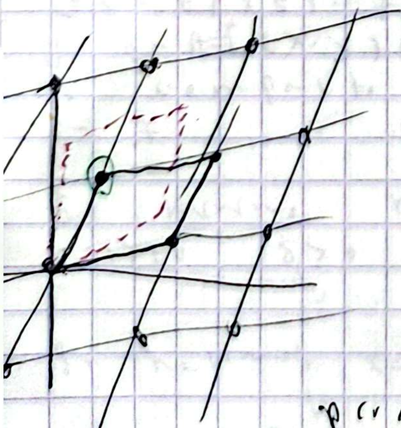
$$\Rightarrow g(z) = \frac{f'(z)}{f(z) - c} \text{ es elíptica}$$

$$\Rightarrow \text{teo } 1 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{R_s} \sim dz = \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f - c}, z_k\right)$$

$\Rightarrow$ sustituyendo

$\Rightarrow N = P \Rightarrow N = \operatorname{ord}(f)$ ⊠

Obs.- Quiero construir una función doblemente periódica que ~~que a cada solo tenga un punto por área~~ tenga un único polo de orden 2 en el paralelogramo fundamental.



Puedo construir una función que ~~tenga un polo~~ tenga un polo en cada punto del retículo y como puedo desplazar el p.f. tendremos que en únicamente 1 punto de él tendrá un polo.

Como los puntos del retículo son contables podríamos aplicar el teo. de Mittag-Leffler

pero solo me dice que existe más no me da la forma de darla.

19 de Noviembre

O puedo hacerlo lo más sencillo posible.

Si $w \in L \Rightarrow \frac{1}{(z-w)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-w)$ podríamos pensarlo como candidato pero esto lo necesito para cada $w \in L$ entonces el candidato natural será:

$$(*)_1 \quad \sum_{w \in L} \frac{1}{(z-w)^2}$$ ¿converge?

No converge en general pues por ejemplo si tomo $w_1 = 1$, $w_2 = i \Rightarrow w \in L \Rightarrow w = n + im$

$$\therefore \left| \frac{1}{(z-w)^2} \right| \underset{m \gg 1}{\leq} \frac{1}{|w|^2} = \frac{1}{m^2+n^2}$$

pero $\sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{m^2+n^2}$ diverge

por lo que no convergería normalmente.

Necesitamos un término en $(*)_1$ para forzar la convergencia

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{w \in L \\ w \neq 0}} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

Evitamos $w=0$ para que no haya indeterminación en la suma y por ello agregamos sacando el factor $\frac{1}{z^2}$ fuera.

Tenemos que ver que esto sí es analítico.

Escaneado con CamScanner

Lema 1.- Se tiene que $S = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0,0\}} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ converge si y solo si $\alpha > 1$.

Dem.- La demostración se basa en probar el hecho de notar que

$$\int_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \, dx\,dy \quad \text{converge syss} \quad S \quad \text{converge}$$

por lo que haciendo el cambio $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin\theta$

$$\Rightarrow \int_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \int_0^{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{r}{r^{2\alpha}} \, dr\,d\theta = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^{\alpha}} \quad \text{conv.} \iff \alpha > 1$$

■

Lema 2.- Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ $(\mathbb{R}\text{-L.I})$ y L el retículo asociado. La serie

$$\sum_{w \in L^*} \frac{1}{|w|^s}, \quad s > 2 \quad \text{converge.} \qquad (L^* = L \setminus \{0\})$$

Dem.- Consideramos

$$f(x,y) = \frac{|x w_1 + y w_2|^2}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$$

Afirmación f tiene un mínimo $\delta > 0$.

En efecto f es homogénea de grado 1, i.e., $f(xt, yt) = f(x,y)$ entonces es suficiente considerar f en $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ para este conjunto es compacto $\therefore$ al ser f continua existe mínimo en A.

El mínimo no puede ser cero, en consecuencia existe $\delta > 0$ t.q. $\frac{|x w_1 + y w_2|^2}{x^2+y^2} \geq \delta \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

Si hacemos $x = n$ y $y = m$ con $(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \Rightarrow$

$$\frac{1}{|n w_1 + m w_2|^2} \leq \frac{1}{\delta(m^2+n^2)}$$

a) $\frac{1}{|w|^s} \leq \frac{1}{\delta^{s/2}} \cdot \frac{1}{(m^2+n^2)^{s/2}}$

$\Downarrow$ Lema 4 $\sum \frac{1}{(m^2+n^2)^{s/2}}$ conv $\Leftrightarrow$ $s/2 > 1$

$\therefore \sum_{w \in L^*} \frac{1}{|w|^s}$ conv. $\Leftrightarrow$ $s > 2$. ■

Teorema 1.- Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ (L.I) y L el retículo asociado. La función

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in L^*} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

es meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos únicamente en L, cada uno de los cuales es de orden 2.

Dem.- Veamos la convergencia normal.

Sea $R > 0$ fijo. Tomemos $m, N \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grandes t.q.

$$2R < |w_0| \quad , \quad w_0 = N w_1 + N w_2$$

$\Rightarrow$ $|z| \leq R < \frac{|w|}{2}$ $\forall w \in L$, con $|w| > |w_0|$, $\forall z \in D(0, R)$

$\circledast_3$

$$\Rightarrow f(z) - \frac{1}{z^2} = \underbrace{\sum_{\substack{w \in L^* \\ |w| \leq |w_0|}} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]}_{f_0} + \underbrace{\sum_{\substack{|w| > |w_0| \\ w \in L^*}} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]}_{g}$$

P.D. g conv. uniformemente en $D(0, R)$

En efecto

$$*) \left| \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right| = \frac{|z|\,|2w - z|}{|z-w|^2 |w|^2} \overset{\circledast_3}{\leq} \frac{|z| \left(2|w| + |w|/2 \right)}{|z-w|^2 |w|^2}$$

$$|z-w| \geq |w|-|z| \geq |w| - \frac{|w|}{2} = \frac{1}{2}|w|$$

$$\leq \frac{R\left(2|w| + \frac{|w|}{2}\right)}{\left(\frac{|w|}{2}\right)^2 |w|^2} = \frac{10R}{|w|^3}$$

$\therefore \left| \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right| \leq \frac{10R}{|w|^3} \quad \forall z \in D(0,R), \ |w| > |w_0|, \ w \in L^*$

y por Lema 2

$\sum_{\substack{w \in L^* \\ |w|>|w_0|}} \frac{10R}{|w|^3}$ converge $\therefore$ por el criterio M de Weierstrass aplica y la serie g converge uniformemente en $D(0,R)$

Por otro lado f_0 es suma finita de funciones meromorfas con polos en $L \cap D(0,R)$ cada uno de orden 2.

Como R es arbitrario, la serie completa $f_0 + g$ converge normalmente en $\mathbb{C} \setminus L^*$ y como cada término es analítico en $\mathbb{C} \setminus L^*$ entonces $f_0 + g$ define una función analítica en $\mathbb{C} \setminus L^*$ ~~con polos en~~ $\therefore$ f es meromorfa en $\mathbb{C}$

Con esto nos queda la pregunta ¿f es elíptica?

Lema 3.- La función f del teo. 1 es par

Dem.-

$f(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in L^*} \left[\frac{1}{(-z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$ pero si $w \in L^* \Rightarrow -w \in L^*$

$\therefore \sum_{w \in L^*} = \sum_{-w \in L^*} \therefore f(-z) = f(z) \therefore$ es par

Obs: por el teo. $\neq$, sabemos que f es analítica en $\mathbb{C} \setminus L^*$ $\therefore$ entonces

$$f'(z) = -\frac{2}{z^3} + \sum_{w \in L^*} \frac{-2}{(z-w)^3} \leftarrow \text{conv. uniformemente}$$

$$= \sum_{w \in L} \frac{-2}{(z-w)^3}$$

$\therefore$ $f'(-z) = -f'(z)$ $\therefore$ f' es impar.

Sea $p \in L$ ent.

$$f'(z+p) = -2 \sum_{w \in L} \frac{1}{(z+p-w)^3}$$

$w \in L$ y $p \in L \Rightarrow p-w \in L$ y lo recorre todo

$$= -2 \sum_{w \in L} \frac{1}{(z-w)^3} = f'(z)$$

$\therefore$ f' es meromorfa doblemente periódica con periodos en L.

por otro lado

$$[f(z+p) - f(z)]' = f'(z+p) - f(z) = 0$$

$\therefore$ $f(z+p) - f(z) \equiv$ constante

Sea p periodo fundamental ent. $p/2 \notin L$

$\Rightarrow z = -\frac{1}{2}p \Rightarrow f(-\frac{1}{2}p+p) - f(-\frac{1}{2}p) \equiv$ constante

$$\Rightarrow f(z+p) - f(z) = f(-\tfrac{1}{2}p+p) - f(-\tfrac{1}{2}p) \quad \forall z$$

$$= f(\tfrac{1}{2}p) - f(-\tfrac{1}{2}p) = f(\tfrac{1}{2}p) - f(\tfrac{1}{2}p)$$

f par

$\therefore \quad f(z+p)-f(z)=0 \quad \therefore \quad f(z+p)=f(z)$

Y esto es valido para ambos periodos fundamentales

$\therefore$ f es doblemente periodica, es decir:

~~(meromorfa y doblemente periodica)~~

Teorema 2: La función f del teorema 1 es Eliptica de orden 2.

Def 1: Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ $(\mathbb{R}-L.I)$ y $L=\mathbb{Z}w_1+\mathbb{Z}w_2$ el reticulo asociado. Definimos a la función $\wp$-Weierstrass como la función Eliptica

$$\wp_L(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{w\in L^*}\left[\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right] \qquad L^*=L\setminus\{0\}$$

Clase 15 Noviembre

Obs: Por todo lo anterior tenemos que la función $\wp_L$ tiene las sig. propiedades

- $\wp_L$ es par, doble periodica con periodos w_1 y w_2.
- $\wp_L$ es función Eliptica de orden 2
- $\wp_L'(z)=\sum_{w\in L}\frac{-2}{(z-w)^3}$ es función Eliptica, impar, de orden 3 con periodos w_1 y w_2.

¿Cual es la serie de Laurent de $\wp_L(z)$?

Obs: $\frac{1}{z-w}=\frac{-1}{w(1-\frac{z}{w})}=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{w^{n+1}}z^n, \quad |z|<|w|$

$\Rightarrow$ Derivando: $\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{w^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{w^{n+2}}z^n, \quad |z|<|w|$

$\therefore$ sustituyendo en $\wp_L(z)$

$$\Rightarrow \wp_L(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in L^*} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{w^{n+2}} z^n \right)$$

Ejercicio ¿por qué podemos intercambiar las series?

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1) \left(\sum_{w \in L^*} \frac{1}{w^{n+2}} \right) z^n \right] \quad , \quad |z| < r_0$$

$r_0 := \min \{ |w| \mid w \in L^* \}$

Def:- Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$-L.I.) y L el retículo asociado entonces definimos

$$G_m := \sum_{w \in L^*} \frac{1}{w^m} \quad , \quad m \geq 3$$

llamadas, series de Einstein.

obs:- G_m converge absolutamente $\forall m \geq 3$

Lema 1:- Se tiene que

$$\wp_L(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) G_{2(n+1)} z^{2n}$$

Dem:- Se usa el hecho de que $\wp_L$ es par y el desarrollo anterior.

¿Podemos caracterizar a las funciones elípticas de periodos $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$?

Def (Campo de funciones elípticas) Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ (R - L.I) y L el retículo asociado. El conjunto de funciones elípticas con periodos w_1, w_2 denotado por:

$$K(L) = \{ f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}} \mid f \text{ es elíptica con periodos } w_1 \text{ y } w_2 \}$$

Lema 2.- $(K(L), +, \cdot)$ es campo.

Dem:- Inmediata.

Teorema 1.- Sea $\mathbb{R}at = \{ R : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid R$ es función racional$\}$ el campo de las funciones racionales y sea f elíptica no constante con periodos w_1 y w_2 (R - L.I). La transformación $T_f : \mathbb{R}at \to T_f(\mathbb{R}at) \subseteq K(L)$ definida como

$$T_f(R) = R \circ f$$

es isomorfismo de campos.

Dem:-

- $T_f(\mathbb{R}at)$ es subcampo de $K(L)$ (por Lema 2)
- $T_f(R_1 + R_2) = (R_1 + R_2) \circ f = R_1 \circ f + R_2 \circ f = T_f(R_1) + T_f(R_2)$
- $T_f(R_1 \cdot R_2) = (R_1 \cdot R_2) \circ f = (R_1 \circ f)(R_2 \circ f) = T_f(R_1) \cdot T_f(R_2)$
- PD T_f es inyectiva.

Sean $R, \tilde{R} \in \mathbb{R}at$ t.q $R \neq \tilde{R} \Rightarrow \exists z_0 \in \mathbb{C}$ t.q $R(z_0) \neq \tilde{R}(z_0)$ $(*)$.

Como f es elíptica, no constante $\Rightarrow$ f toma todos los valores complejos (Teo. 2, Ñ Nov) $\Rightarrow \exists w_0 \in \mathbb{C}$ t.q $z_0 = f(w_0)$.

$\therefore$ De $(*)_2$, se tiene que

$$R(f(w_0)) \neq \tilde{R}(f(w_0)) \Rightarrow R \circ f \neq \tilde{R} \circ f \Rightarrow T_f(R) \neq T_f(\tilde{R})$$

$\therefore$ T_f es inyectiva ∎

Obs.- Si defino $\mathbb{C}(f) = T_f(\mathbb{R}at)$ ent.

$\mathbb{C}(f) = \{ g \in K(L) \mid g = R \circ f, \ R \in \mathbb{R}at \}$ ⊛3

Teorema 2.- Sea L el retículo generado por $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ (R-LI)

a) Si $z_0 \notin L$ y $2z_0 \in L \Rightarrow \wp_L'(z_0) = 0$

b) Los ceros de $\wp_L'$ en $\overline{R}$ (R, paralelogramo fundamental) son simples y vienen dados por

$$\frac{w_1}{2}, \quad \frac{w_2}{2}, \quad \frac{w_1+w_2}{2}$$ ⊛4

Dem.-

a) $\wp'(z_0) = \wp'(z_0 - 2z_0)$ (pues $2z_0 \in L$)

$= \wp'(-z_0)$

$= -\wp_L'(z_0)$ ($\wp'$ impar)

$\therefore \wp'(z_0) = 0$

b) Por lo anterior $z = \frac{w_1}{2}, \frac{w_2}{2}, \frac{w_1+w_2}{2}$ son ceros de $\wp_L'$ en $\overline{R}$.

P.D. son los únicos.

Sabemos que

$$\wp_L'(z) = \sum_{w \in L} \frac{-2}{(z-w)^3}$$

Usando el teo 2 (7 noviembre) como $\wp_L'(z)$ es de orden 3 entonces toma a lo sumo 3 veces todos los valores complejos en $\overline{R}$, la ecuación

$$\wp_L'(z) = 0$$

tiene a lo más 3 soluciones en R y como $\frac{w_1}{2}$, $\frac{w_2}{2}$, $\frac{w_1+w_2}{2}$ vimos que son ceros entonces estos son los únicos, y como son distintos serán ceros simples.

Teorema 3.- Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$-L.I.), L el retículo asociado y f una función par con periodos w_1, w_2. Si $z=0$ no es ni polo ni cero de f entonces

$$f(z) = c \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{\wp_L(z) - \wp(a_k)}{\wp_L(z) - \wp(b_k)}$$

donde c es una constante y a_k, b_k son los ceros y polos de f respectivamente.

Dem.- obs: Este teorema nos dice que $f \in \mathbb{C}(\wp_L)$

Sean $a_1, \dots, a_n$ y $b_1, \dots, b_n$ los ceros y polos de f (contando multiplicidades) en R (paralelogramo fundamental).

Obs Si $\wp_L'(a_k) \neq 0$ y $\wp_L'(b_k) \neq 0$ entonces

- a_k es un cero simple de $\wp_L(z) - \wp_L(a_k)$
- b_k es un polo simple de $\dfrac{1}{\wp_L(z) - \wp_L(b_k)}$

$\Big\}$ $\circledast_5$

entonces podemos definir

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} \prod_{k=1}^{n} \frac{\wp_L(z) - \wp_L(a_k)}{\wp_L(z) - \wp_L(b_k)}$$

Las únicas singularidades de g en R son los polos y los ceros de f. Por $\circledast_5$ estas singularidades son removibles, es decir, g es analítica en R. Además, g es doblemente periódica con periodos w_1 w_2 pues f y $\wp_L$ lo son. $\therefore$ g es entera

$\therefore$ por teo 2 (3 nov) $g \equiv \frac{1}{c}$ constante $\blacksquare$

Ejercicio ¿Qué pasa si $\wp_L'(a_k) = 0$ o $\wp'(b_j) = 0$? en la demostración anterior.

Corolario 1: Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ $(\mathbb{R}-L.I)$, L retículo asociado y f una función par, elíptica. Entonces existe $Q \in \mathbb{R}at$ t.q

$$f = (Q \circ \wp_L)(z) \qquad (f \in \mathbb{C}(\wp_L))$$

Dem: Si f tiene un cero de orden $2m$ en $z=0$ entonces, $z=0$ no es ni cero ni polo de $(\wp_L(z))^m f(z)$. Por teo. 3 existe $Q \in \mathbb{R}at$

$$(\wp_L(z))^m f(z) = Q(\wp_L(z))$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(\wp_L(z))^m} Q(\wp_L(z))$$

Lo mismo puede hacerse para un polo de orden $2p$ en $z=0$ (potencia negativa).

Ejercicio: ¿Por qué el orden de los polos y ceros se asumen pares?

Noviembre 17

Teorema 1.- Sea $f: \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ elíptica con periodos $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$-L.I). Entonces, existen funciones racionales Q_1, Q_2 t.q

$$f(z) = Q_1(\wp_L(z)) + Q_2(\wp_L(z))\,\wp_L'(z)$$

donde $L = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$, i.e $K(L) = \mathbb{C}(\wp_L) + \mathbb{C}(\wp_L)\wp_L'$

Dem.- para cualquier función f sabemos que

$$f(z) = \underbrace{\frac{f(z)+f(-z)}{2}}_{\text{par}} + \underbrace{\frac{f(z)-f(-z)}{2}}_{\text{impar}}$$

$$= f_{par}(z) + f_{impar}(z)$$

Corolario 1 (15 Nov) existe $Q_1 \in \mathbb{R}at$ t.q

$$f_{par} = Q_1 \circ \wp_L$$

$$= Q_1(\wp_L(z)) + f_{impar}(z) = Q_1(\wp_L(z)) + f_{im}(z) \cdot \frac{\wp_L'(z)}{\wp_L'(z)}$$

$\frac{f_{im}(z)}{\wp_L'(z)}$ es par $\therefore \exists\, Q_2$ t.q $\frac{f_{im}}{\wp'} = Q_2 \circ \wp_L$

$$= Q_1(\wp_L(z)) + Q_2(\wp_L(z))\,\wp_L'(z) \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.- Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$-L.I) y L el retículo asociado. La función $\wp_L(z)$ satisface

$$[\wp_L'(z)]^2 = 4\wp_L^3(z) - g_2\wp_L(z) - g_3$$

donde
$$g_2 = 60\,G_4 = 60 \cdot \sum_{w \in L^*} \frac{1}{w^4}$$

$$g_3 = 140\,G_6 = 140 \sum_{w \in L^*} \frac{1}{w^6}$$

Dem.- Del Lema 1 (Nov 15) tenemos que

$$\circledast_1 \quad \wp_L(z) = \frac{1}{z^2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\,G_{2(n+1)}\,z^{2n}}_{\text{analítico}}$$

$\Rightarrow$

$$\wp_L'(z) = -\frac{2}{z^3} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n)(2n+1)\, G_{2(n+1)}\, z^{2n-1}$$

$\Rightarrow$

$$[\wp_L'(z)]^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{4}{z^3}\sum_{n=1}^{\infty} (2n)(2n+1)\, G_{2(n+1)}\, z^{2n+1} + [\cdots]^2$$

$$= \frac{4}{z^6} - \frac{24}{z^2} G_4 + [\cdots] \quad \circledast_2$$

Ignoro lo analítico

Por otro lado

$$4\wp_L^3(z) = 4\left[\frac{1}{z^2} + [\cdots]\right]^3$$

$$= 4\left[\frac{1}{z^6} + 3\cdot\frac{1}{z^4}[\cdots] + 3\frac{1}{z^2}[\cdots]^2 + \cdots\right]$$

$$= 4\left[\frac{1}{z^6} + \frac{9G_4}{z^2} + \cdots\right] \quad \circledast_3$$

y

$$60\, G_4\, \wp_L(z) = \frac{60 G_4}{z^2} + \cdots \quad \circledast_4$$

Definamos ahora

$$H(z) = (\wp_L'(z))^2 - 4(\wp_L(z))^3 + 60\, G_4\, \wp_L(z)$$

Es claro que H es elíptica con periodos w_1, w_2.

Por otra parte de $\circledast_1, 2, 3, 4$ se tiene que

$$H(z) = -140\, G_6 + \sum_{n=1} a_n z^n \quad \circledast_5$$

Es decir H es entera $\therefore$ por teo 2 (3 Nov)

H es constante y de $\circledast_5$ esta constante debe de ser -1406 [illegible]

Inspiración

Obs.- Sean $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ y sea

$$S = \{ (z,v) \in \mathbb{C}^2 \mid v^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3 \}$$

En variable 2 vimos que es una superficie de Riemann.

$\boxed{\text{Si } g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0 \Rightarrow \text{existe un retículo } L \text{ t.q. } g_2 = 60 \sum_{w \in L^*} \frac{1}{w^4},\ g_3 = 140 \sum_{w \in L^*} \frac{1}{w^6} \text{ (Lo demostraremos después)}}$

$\therefore$ por el teo 2, una eventual parametrización de S es

$$\begin{cases} z = \wp_L(t) \\ v = \wp_L'(t) \end{cases} \quad t \in R \quad (\wp_L(t), \wp_L'(t)) \in S$$

R paralelogramo fundamental

pues ~~como~~ esta parametrización cumple la ecuación de S por teo 2.

Esto es pues, por ejemplo, para integrales de la forma $\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz$ las parametrizaciones $(\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ me ayuda a resolverlas

entonces yo quisiera poder encontrar una parametrización para polinomios cúbicos y así poder resolver integrales del tipo $\int \frac{1}{\sqrt{4z^3 - z + 1}} dz$

Si $\begin{matrix} z = \wp_L(t) \\ v = \wp_L'(t) \end{matrix} \Rightarrow (z,v) \in S$ ¿Al revez se cumple?

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Teorema 3.- La función $T: \mathbb{R}^* \to S(g_2, g_3)$ definida como

$$T(t) = (\wp_L(t), \wp_L'(t))$$

Es una biyección.

Dem.- Está bien def. por lo anterior mencionado.

Sean $z, t_1 \in \mathbb{R}^*$ t.q. $T(z) = T(t_1)$

$\Rightarrow (\wp_L(z), \wp_L'(z)) = (\wp_L(t_1), \wp_L'(t_1))$ $\circledast_6$

En particular $\wp_L(z) = \wp_L(t_1)$ $\circledast_7$ (ecuación en variable z)

$\Rightarrow$ por teo 2 (Nov 7), $\circledast_7$ tiene 2 soluciones en $\mathbb{R}$ (mod L). Por paridad, tenemos

$z = t_1$ y $z = -t_1$ son soluciones

($-t_1 \notin \mathbb{R}$ pero sabemos que $\exists w^* \in \mathbb{R}^*$. $-t_1 - w^* \in L$ $\Rightarrow z = -t_1 = w^*$ (mod L)

Si $z = -t_1$ de $\circledast_6$ (segundas componentes)

$\Rightarrow \wp'(z) = -\wp'(z) \Rightarrow \wp'(z) = 0$

por teo 2 (Nov 15) $z = w_1/2$, $z = w_2/2$, $z = \frac{w_1 + w_2}{2}$

$\Rightarrow 2z \in L \Rightarrow z - (-z) \in L \Rightarrow z - t_1 \in L \to z \equiv t_1$ (mod L)

En resumen $T(z) = T(t_1) \Rightarrow z = t_1$ $\therefore$ T es inyectiva

Por otro lado sea $(t_1, t_2) \in S(g_1, g_2)$ entonces

$t_2^2 = 4t_1^3 - g_2 t_1 - g_3$

por Teo 2 (Nov 7) $\exists z_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $\wp(z_0) = t_1$

por teo 2 (Hoy)

$$4(\wp_L(z_0))^3 - g_2 \wp_L(z_0) - g_3 = (\wp_L'(z_0))^2$$

$\Rightarrow 4t_1^3 - g_2 t_1 - g_3 = [\wp_L'(z_0)]^2$

$\Rightarrow \quad t_2^2 = [\wp_L'(z_0)]^2 \Rightarrow t_2 = \wp_L'(z_0)$

$\therefore T(z_0) = (t_1, t_2) \therefore T$ es sobre ∎

Nov. 27.-

Recordamos varias cosas de cursos pasados

Def. 1.- Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ analítica, $z_0 \in \Omega$ t.q $f(z_0) = 0$. El orden de z_0 es el mínimo $n \in \mathbb{Z}^+$ t.q $f^{(n)}(z_0) \neq 0$

obs: si z_0 es cero de orden $n \Rightarrow \exists g$ entera t.q $f(z) = (z-z_0)^n g(z)$

Proposición.- Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$, región, $z_0 \in \mathbb{C}$ (punto crítico) $f'(z_0) = 0$ z_0 es cero de orden $n-1$ de f'. Entonces existen n ramas distintas para f^{-1} (fijando el argumento)

Def 2.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región y $f: \Omega \to \mathbb{C}$ analítica no inyectiva. Decimos que $b \in \hat{\mathbb{C}}$ es punto de ramificación de f^{-1} si existe $a \in \mathbb{C}$ t.q

1). $b = f(a)$

2) $z = a$ es un cero de $f(z) - b$ de orden n, $n \geq 2$.

Ejemplo.-

Por teorema 2 (Nov 15) $z_1 = \frac{w_1}{2}$, $z_2 = \frac{w_2}{2}$, $z_3 = \frac{w_1+w_2}{2}$ son ceros simples de $\wp_L'$, por lo tanto, $z = z_k$ son ceros de orden 2 de la función

$$\wp_L(z) - \wp_L(z_k) \qquad k = 1, 2, 3$$

En consecuencia

$\wp_L(z_k)$ son puntos de ramificación de $\wp_L^{-1}$

esto me ayudará a tomar una rama correcta más bien, se que podré tomarla

Teorema 1.- Sea $L = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$ ($w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ L.I) y $\wp_L$, si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ es una curva que no pasa por $\{\frac{w_1}{2}, w_2/2, \frac{w_1+w_2}{2}\}$ mod L t.q $z = \gamma(0)$, $a = \gamma(1)$ entonces

$$\int_{\wp_L \circ \gamma} \frac{dk}{\sqrt{4k^3 - g_2 k - g_3}} = z - a$$

$$g_2 = 60 \sum_{w \in L^*} \frac{1}{w^4}$$

$$g_3 = 140 \sum_{w \in L^*} \frac{1}{w^6}$$

Dem.-

Como conozco los puntos de ramificación entonces puedo encontrar una rama donde la integral tenga sentido, entonces

$$\int_{\wp_L \circ \gamma} \frac{1}{\sqrt{\quad}} dv \underset{\substack{v = \wp_L(t) \\ dv = \wp_L'(t)\,dt}}{=} \int_\gamma \frac{\wp_L'(t)\,dt}{\sqrt{4\wp_L(t)^3 - g_2 \wp_L(t) - g_3}}$$

$$\overset{\text{Teo 2 Nov 17}}{=} \int_\gamma \frac{\wp_L'(t)}{\sqrt{\wp_L'(t)^2}}\,dt \underset{\text{rama adecuada}}{=} \int_\gamma \frac{\wp_L'(t)}{\wp_L'(t)}\,dt = \gamma(1) - \gamma(0)$$

$$= z - a$$