# Recreaciones en Teoría de Números

# Capitulo 3: "Perfección"

Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

23/septiembre/2021

# Números perfectos

## Definición

Los números perfectos son aquellos que son la suma de sus divisores propios.

## Ejemplos

•El primer número perfecto es el numero 6, pues $6 = 1 + 2 + 3$

•El segundo número perfecto es el numero 28, pues $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

En la antigüedad, alrededor del 200 a.c se conocían los primeros 4 números perfectos; 6, 28, 496 y 8128 (los cuales les costo mucho encontrar)

¿Cómo saber cual numero perfecto sigue?

Se conjeturaron propiedades:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $P_1 = 6$ | $P_5 = \#6$ ?? | 6 tiene 1 digito | $\mathrm{P}_5$ tiene 5 digitos?? |
| $P_2 = 28$ | | 28 tiene 2 digitos | |
| $P_3 = 496$ | | 496 tiene 3 digitos | |
| $P_4 = 8128$ | | 8128 tiene 4 digitos | |

# Euclides

Euclides trabajo en los números perfectos y se dio cuenta de una relación...

325 a.c a 265 a.c

$P_1 = 6 \quad = 2 \cdot 3$

$P_2 = 28 \quad = 2 \cdot 14 \quad = 2^2 \cdot 7$

$P_3 = 496 \quad = 2 \cdot 248 \quad = 2^2 \cdot 124 \quad = 2^3 \cdot 62 \quad = 2^4 \cdot 31$

$P_4 = 8128 = 2 \cdot 4064 = 2^2 \cdot 2032 \quad = \ldots = \quad = 2^6 \cdot 127$

Más aun, observo que los primos restantes son:

$3 = 4 - 1 = 2^2 - 1 \qquad 7 = 8 - 1 = 2^3 - 1 \qquad 31 = 32 - 1 = 2^5 - 1 \qquad 127 = 128 - 1 = 2^7 - 1$

$$\Rightarrow \quad P_1 = 2^1 \cdot (2^2 - 1) \quad P_2 = 2^2 \cdot (2^3 - 1) \quad P_3 = 2^4 \cdot (2^5 - 1) \quad P_4 = 2^6 \cdot (2^7 - 1)$$

Esto lo llevo a la pregunta: ¿Cuándo es que $E_n = 2^{n-1}(2^n - 1)$ es un numero perfecto?

Lo que lo llevo al siguiente resultado...

# Euclides

## Teorema de Euclides

Si $2^n - 1$ es primo, entonces $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ es un numero perfecto.

Demostración: (Euclides)
Sea $n$ tal que $q = 2^n - 1$ es primo, y demostraremos que $N = 2^{n-1} \cdot q$ es perfecto.

Tendremos que los divisores propios de $N$ seran:

$$1, 2,\ 2^2, \ldots, 2^{n-1}, q, 2q,\ 2^2 q, \ldots, 2^{n-2} q$$

Entonces la suma de estos divisores sera:

$$\begin{aligned}
&1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + q + 2q + 2^2 q + \cdots + 2^{n-2} q \\
&\qquad = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + q(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}) \\
&\qquad = \frac{2^n - 1}{2 - 1} + q\left(\frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1}\right) = 2^n - 1 + q(2^{n-1} - 1) = 2^n - 1 + q2^{n-1} - q \\
&\qquad = 2^n - 1 + (2^n - 1)2^{n-1} - 2^n + 1 = 2^{n-1}(2^n - 1) = N
\end{aligned}$$

$\therefore$ $N$ es un numero perfecto.

# El legado

Con esto solo bastaba encontrar una $n$ tal que $2^n - 1$ fuera un numero primo para asi encontrar otro numero perfecto sin embargo no fue una tarea facil....

| | | |
|---|---|---|
| $P_5 = 33\ 550\ 336 = 2^{12}(2^{13} - 1)$ | Desconocido | 1456 |
| $P_6 = 8\ 589\ 869\ 056 = 2^{16}(2^{17} - 1)$ | Pietro Cataldi | 1588 |
| $P_6 = 137\ 438\ 691\ 328 = 2^{18}(2^{19} - 1)$ | Pietro Cataldi | 1588 |

Los matematicos notaron que para los numeros perfectos, las potencias de 2 eran siempre numeros primos.

**Proposición**

Si $n$ es compuesto, entonces $2^n - 1$ es compuesto

Demostración:

Supongamos que $n$ es par $\Rightarrow n = 2b \Rightarrow 2^n - 1 = 2^{2b} - 1 = (2^b)^2 - 1 = (2^b - 1)(2^b + 1)$ que es compuesto.

Si $n$ es impar pero compuesto $\Rightarrow n = ab \Rightarrow 2^n - 1 = 2^{ab} - 1$
$= (2^b)^a - 1 = (2^b - 1)((2^b)^{a-1} + (2^b)^{a-2} + \cdots + 2^b + 1)$ que es compuesto.

# Euler y los números perfectos pares

Euclides $(250\ a.c)$: Si $2^n - 1$ es primo, entonces $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ es un numero perfecto.

¿Son todos los numeros perfectos?

NO

**Teorema de Euclides (revisado)**

Si $2^n - 1$ es primo, entonces $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ es un numero perfecto PAR.

¿Esta construccion me da todos los numeros perfectos pares?

2000 años despues, Euler demostro que efectivamente, todos los numeros perfectos pares se optienen con esta formula, es decir:

$1707 - 1783$

**Teorema de Euler (números perfectos)**

Si $N$ es un numero perfecto par, entonces $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ para algun $n \in \mathbb{N}$

**Teorema de Euclides-Euler**

$N$ es un numero perfecto par $\Leftrightarrow N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ con $2^n - 1$ primo.

# Números perfectos impares

¿Existen numeros perfectos impares?

No se sabe...

Si existiera algun numero perfecto impar, tendria que cumplir condiciones muy extremas algunas son:

- N tendria que ser mayor a $10^{1500}$
- N no podria ser divisible por 105
- $N \equiv 1 \pmod{12}$ o $N \equiv 117 \pmod{468}$ o $N \equiv 81 \pmod{324}$
- N tiene al menos 101 factores primos y al menos 10 factores primos distintos

etc...

# Primos Mersenne y su calculo

Fue W. W. R. Ball quien adopto el nombre de números de Mersenne a los enteros de la forma $2^n - 1$ en honor al matematico frances Marin Mersenne, quien estudio este tipo de numeros.

**Definición**

Se le llaman numeros primos de Mersenne a los primos de la forma $M_n = 2^n - 1$

Asi la busqueda de numeros perfectos se centro en la busqueda de primos de Mersenne esto pues si $M_p$ es un primo de Mersenne, entoonces $2^{p-1}M_p$ es un numero perfecto

Actualmente se conocen 51 primos de Mersenne, el mas grande conocido se descubrio el 7 de Diciembre del 2018, $M_{82,589,933}$ el cual tiene $24,862,048$ digitos.

$$2^{82589933} - 1$$

**is prime!**

# Números perfectos impares

**Teorema de Euclides-Euler**

$N$ es un numero perfecto par $\Leftrightarrow$ $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ con $2^n - 1$ primo.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamoos que $N$ es un numero perfecto par $\Rightarrow$ $2N = \sigma(N)$

Por otro lado, como $N$ es par, entonces $N = 2^k \cdot x$ para algun $k \in \mathbb{N}$, asi:

$$2N = \sigma(N) = \sigma(2^k x) = \sigma(2^k)\sigma(x) \quad \text{pues } (2^k, x) = 1$$

entonces

$$2(2^k x) = 2N = (2^{k+1} - 1)\sigma(x) = (2^{k+1} - 1)(x + s)$$

$$\Rightarrow \; 2^{k+1}x = 2^{k+1}x + 2^{k+1}s - x - s \quad \Rightarrow \; 0 = 2^{k+1}s - x - s$$

$$\Rightarrow \; x = (2^{k+1} - 1)s \; \Rightarrow \; 2^{k+1} - 1 = \frac{x}{s}$$

Esto me dice que $s$ es divisor propio de $x$, y como se definio $s$ es la suma de los divisores propios de $x$ por lo que $s$ debe ser un unico divisor propio, con lo que el unico valor posible de $s$ es 1, $\therefore \; x = 2^{k+1} - 1$