Variable Compleja I

Problema 10

Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

$$\frac{n}{2^{n-1}} = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)$$

Lema

Se cumple que

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} [1 - e^{-2\pi ik/n}]$$

Demostración. –

Sea $P(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$ sabemos (ejercicio 9) que si z_0 es una raiz $n-esima$ de la unidad distinta de 1 entonces $P(z_0) = 0$. Esto me esta diciendo que cada $z = e^{-2\pi ik/n}$ con $k = 1,\dots,n-1$ es raíz del polinomio, por lo que:

$$P(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} [z - e^{-2\pi ik/n}]$$

con lo que evaluando en $z = 1$, se tendra

$$P(1) = 1 + 1 + 1^2 + \cdots + 1^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} [1 - e^{-2\pi ik/n}]$$

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} [1 - e^{-2\pi ik/n}] \quad \blacksquare$$

Problema 10

Sea $n \geq 2$, entonces:

$$\frac{n}{2^{n-1}} = \prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{\pi k}{n})$$

Demostración. –

Tenemos que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{\pi k}{n}) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{Im}[\cos(\frac{\pi k}{n}) + i\sin(\frac{\pi k}{n})] = \prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{Im}[e^{\pi ik/n}]$ pero recordemos que $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{Im}[e^{\pi ik/n}] = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{e^{\pi ik/n} - \overline{e^{\pi ik/n}}}{2i} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2i}[e^{\pi ik/n} - e^{-\pi ik/n}] = \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} [e^{\pi ik/n} - e^{-\pi ik/n}]$$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} [1 - e^{-\pi ik/n - \pi ik/n}] \cdot e^{\pi ik/n} = \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} [1 - e^{-2\pi ik/n}] \cdot e^{\pi ik/n}$$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} [1 - e^{-2\pi ik/n}] \prod_{k=1}^{n-1} e^{\pi ik/n} \underset{Lema}{=} \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-1} n \cdot \prod_{k=1}^{n-1} e^{\pi ik/n}$$

Problema 10

Sea $n \geq 2$, entonces:

$$\frac{n}{2^{n-1}} = \prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{\pi k}{n})$$

continuación...

$= \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-1} n \cdot \prod_{k=1}^{n-1} e^{\pi ik/n}$. Pero como $e^{z} \cdot e^{w} = e^{z+w}$, entonces:

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{\pi ik/n} = e^{\sum_{k=1}^{n-1} \pi ik/n} = e^{\pi i/n \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k} = e^{(\pi i/n)([n-1]n/2)} = e^{\pi i(n-1)/2}$$

$$= (e^{\frac{\pi}{2}i})^{n-1} = i^{n-1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-1} n \cdot \prod_{k=1}^{n-1} e^{\pi ik/n} = \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-1} n \cdot i^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{i^{n-1}} n \cdot i^{n-1} = \frac{n}{2^{n-1}} \quad \therefore \prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{\pi k}{n}) = \frac{n}{2^{n-1}} \quad \blacksquare$$

Variable Compleja I

Problema 11

Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 11

Calcule $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \sqrt{z^2-1}dz$, con la raiz tomada en la rama $(0,2\pi)$.

Solución. –

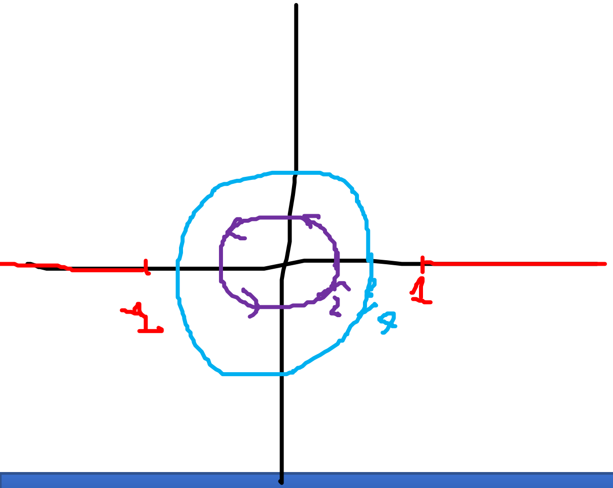
Veamos el dominio de analiticidad de $f(z)=\sqrt{z^2-1}$

Tenemos que $f(z)=\sqrt{z^2-1}=e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)}$, entonces sabemos que el dominio de analiticidad de f sera

$$\mathbb{C}-\left\{z\in\mathbb{C}: z^2-1\in B_0\right\}=\mathbb{C}-\left\{z\in\mathbb{C}: z^2-1=te^{0i},\ t\geq 0\right\}=\mathbb{C}-\left\{z\in\mathbb{C}: z^2-1=t,\ t\geq 0\right\}=\mathbb{C}-\left\{z\in\mathbb{C}: z^2=t,\ t\geq 1\right\}$$

Sea $z\in\mathbb{C}$ tal que $z^2=t,\ t\geq 1 \Rightarrow z^2=t\cdot e^{i0} \Rightarrow z=\pm\sqrt{t}$

$$\therefore\ \mathbb{C}-\left\{z\in\mathbb{C}: z^2-1\in B_0\right\}=\mathbb{C}-\left\{x\in\mathbb{R}: |x|\geq 1\right\}=U$$



Entonces si considero a $f: D(\frac{3}{4},0)\subseteq U\to\mathbb{C}$, es analitica y $\gamma(t)=\frac{1}{2}e^{it}$ con $t\in[0,2\pi]$ esta contenida una curva cerrada, C^1 en D, pues $|\gamma(t)|<\dfrac{3}{4}\ \forall t$

$\therefore$ por el teorema de cauchy como $D(\frac{3}{4},0)$ es simplemente conexo

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}}\sqrt{z^2-1}dz=\int_{\gamma}\sqrt{z^2-1}dz=0$$