Algebra Moderna II

Teorema Fundamental del Algebra

Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

¿Qué es lo que dice el teorema fundamental del algebra?

Teorema Fundamental De Algebra

–Todo polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ tiene al menos una raiz sobre $\mathbb{C}$

Pero el camino a poder demostrarlo (o siquiera enunciarlo) fue largo en las matematicas...

Veamos un poco de historia enfocada a los polinomios

Los inicios

– Fueron las matematicas indias e islamicas las que sentaron las bases de la escritura moderna por los años 600-1000 NE

– El matematico islam Al-Juarismi en el siglo IX publico

"*Compendio de cálculo por reintegración y comparación*"

donde finalmente "resuelve" la ecuacion de segundo grado. Esto es entre comillas pues realmente da metodos para resolver 6 ecuaciones cuadraticas.

$$ax^2 = bx \qquad ax^2 = c \qquad bx = c \qquad ax^2 + bx = c \qquad ax^2 + c = bx \qquad bx + c = ax^2$$

– Tiempo despues con la aceptacion de las raices, los numeros negativos y el trabajo de Al-Juarismi se desarrollo la solucion general de la ecuacion $ax^2 + bx + c = 0$

La cubica y la cuarta

– En el siglo XI, Omar Jayam en su trabajo "*Tratado sobre la demostración de problemas de álgebra*" identifico 17 ecuaciones cubicas con terminos positivos y dio soluciones geometricas de algunas de ellas. Sin embargo no logro resolver la ecuacion cubica en general.

–No fue sino 400 años despues en el siglo XVI que el matematico Scipione del Ferro hallo un metodo para resolver la ecuacion cubica reducida $x^3 + cx + d = 0$.

– Mantuvo el metodo en secreto hasta que en su lecho de muerte se lo revelo a su estudiante Antonio Maria Del Fiore.

–Niccolò Fontana Tartaglia, luego de un reto de Fiore, redescrubrio el metodo, pero lo guardo para si mismo hasta que finalmente, (despues de mucha insistencia) le mostro el metodo a Gerolamo Cardano quien le prometio no contarlo

La cubica y la cuarta

– Cardano trabajo sobre el trabajo Tartaglia y, en un acto de ingenio, se las arreglo para resolver finalmente la ecuacion cubica general su libro *Ars Magna* en 1545, conocido hoy en dia como El Metodo de Cardano

– Mas aun de manera simultanea Cardano trabajo con su estudiante Ludovico Ferrari para encontrar la solucion de la ecuacion de cuarto grado, lograndolo asi en el mismo año de la publicacion de Ars Magna la simultaneadad de este suceso se debe a que al resolver la ecuacion de cuarto grado optenemos una ecuacion cubica.

Este metodo es llamado hoy en dia como El Metodo de Ferrari.

– En los prosimos siglos surgieron varios metodos para la ecuacion de cuarto grado, entre ellos Euler, Descartes , Lagrange...

¿Y después...?

– Despues de todo esto en los años posteriores se intento encontrar solucion para la ecuacion de quinto grado

– Todo esto aundado a el descubrimiento de los numeros complejos influyo en la pregunta

¿Cuantas soluciones hay para una ecuacion polinomial?

– Antes la respuesta a esta pregunta era "Depende"

– Pero con la aceptacion de los numeros complejos, los numeros negativos y los irracionales cambio la idea

– El primero en darse cuenta fue Rafael Bombelli.

– Cardano se dio cuenta que su metodo daba como resultado raices negativas para varios casos este trabajo con con ellas pero no las entendia del todo.

– Fue Rafael Bombelli quien estudio este "problema"en detalle y se dio cuenta que estas soluciones eran totalmente validas, esto mediante metodos geometricos.

– Con esto quedo en la pregunta en el aire si es que con estos nuevos numeros podriamos encontrar todas las soluciones faltantes

¿Y después...?

– Sin embargo al no tener solucion general de ecuaciones de grado mayor a 4 no habia respuesta a esta pregunta

– Con la incertidumbre de este problema se creo gran emocion por tratar de demostrarlo o negarlo

– La prueba completa fue dada por Carl Friedrich Gauss en su tesis doctoral de 1799
y en años posteriores dio 3 pruebas mas.

– En los siglos posteriores hubieron muchas pruebas usando distitnas ramas de las matematicas mayor mente con argumentos analiticos y usando variable compleja

Pero seguia faltando una prueba puramente algebraica....

– Fue hasta que se desarrollo de manera plena la teoria de anillos que se pudo dar dicha prueba

Conocimiento previo

Daremos un poco de teoria previa.

Definición 1

Sea $F \,/\, E$ una extensión de campos.

- Decimos que $\alpha \in F$ es algebraico sobre E si $f(\alpha) = 0$ para algun $p(x) \in E[x]$ monico
- Decimos que $F \,/\, E$ es una extensión algebraica si todo elemento de F es algebraico sobre E

Ejemplo. –

Consideremos $\mathbb{C} \,/\, \mathbb{R}$ extension de campos.

- $i \in \mathbb{C}$ es algebraico sobre $\mathbb{R}$, pues considerando $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ dado por $p(x) = x^2 + 1$ tenemos que $p(i) = i^2 + 1 = 0$
- Más aun es una extension algebraica, pues para todo $z = x + iy \in \mathbb{C} \Rightarrow z - x = iy \Rightarrow (z - x)^2 = -y^2$

$\Rightarrow z^2 - 2xz + y^2 = 0$ por lo que considerando $p(z) \in \mathbb{R}[z]$ dado por $p(z) = z^2 - 2xz + y^2$ es un polinomio monico y tal que $p(x + iy) = 0$ $\therefore$ $\forall z \in \mathbb{C}, z$ es algebraico $\therefore$ $\mathbb{C} \,/\, \mathbb{R}$ es extension algebraica.

Conocimiento previo

Esto no deberia impresionar, pues al tomar la extension sobre los reales tenemos mucho con lo que trabajar.

Lo anterior es falso si tomamos un campo mas pequeño, por ejemplo la extension $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ que ya no es extension algebraica. Se puede demostrar que, por ejemplo, $\pi \in \mathbb{C}$ no es algebraico sobre $\mathbb{Q}$ (cuya demostracion es complicada)

Ahora recordemos los siguientes resultados

Proposición 1

Sea $F(\alpha)/F$ extensión de campos. Entonces α es algebraico sobre F si y solo si $F(\alpha)/F$ es finita.

Corolario 1

Sea F/E una extensión de campos finita, entonces F/E es una extension algebraica

Dem. – Sea $\alpha \in F$.

Por definicion tenemos que $F(\alpha)$ es subcampo de F y en particular sera subespacio vectorial por lo que

$[F(\alpha):E] \leq [F:E] < \infty$ entonces por la proposicion 1 $\Rightarrow$ F/E es algebraica. ■

Obs. – Si α es algebraico sobre F entonces $F(\alpha)$ es extension algebraica de F

Conocimiento previo

Corolario 2

Supongamos que α, β son algebraicos sobre F. Entonces $\alpha \pm \beta, \alpha\beta$ y $\alpha\beta^{-1}$ son algebraicos.

Dem. – Notemos que $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \ \alpha\beta^{-1} \in F(\alpha,\beta)$ entonces bastara demostrar que $F(\alpha,\beta)$ es extension algebraica.

Como α es algebraico sobre F entonces por la proposicion 1 $\Rightarrow$ $F(\alpha)/F$ es finita

Por otro lado como β es algebraico sobre F y $F(\alpha)/F$ es extension, entonces β es algebraico sobre $F(\alpha)$

entonces por la proposicion 1 $\Rightarrow F(\alpha,\beta)/F(\alpha)$ es finita $\therefore$ por la Formula del Grado tenemos que

$$[F(\alpha,\beta) : F] = [F(\alpha,\beta) : F(\alpha)][F(\alpha) : F] < \infty$$

$\Rightarrow$ $F(\alpha,\beta)/F$ es finita y por el corolario 1 $\Rightarrow$ es algebraica $\blacksquare$

Todo esto fue para obtener el siguiente resultado que nos servira mas adelante

Conocimiento previo

Proposición 2

Sea F / E extension y sea $K = \{k \in F : k \text{ es algebraico sobre } F\}$, entonces K es subcampo de F.

Dem. – En efecto, $p(x) = x - 1$ y $q(x) = x$ son tales que $p(1) = 0$ y $q(0) = 0$ por lo que $1, 0 \in K$ y $\forall \alpha, \beta \in K$ tenemos por el corolario anterior que $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha\beta^{-1} \in K$ por tanto es subcampo de K ■

Otro resultado importante es el siguiente (sin prueba)

Teorema 1

Si F es algebraico sobre K y K es algebraico sobre E entonces F es algebraico sobre E

Ahora veamos otras definicioenes interesantes, que campturan la idea de tener un campo donde existan raices de polinomios

Conocimiento previo

Definición 2

Decimos que el campo $\overline{F}$ es una cerradura algebraica de F si $\overline{F}$ es algebraico sobre F y todo polinomio $f(x) \in F[x]$ se factoriza linealmente en $\overline{F}$

Definición 3

Decimos que el campo F es algebraicamente cerrado si todo polinomio $f(x) \in F[x]$ tiene al menos una raíz en F

No es obvio que existan campos algebraicamente cerrados ni que exista una cerradura algebraica de un campo dado F
Pero se puede demostrar su exsitencia, cosa que no demostraremos aqui.

Proposición 3

Sea $\overline{F}$ una cerradura algebraica de F, entonces $\overline{F}$ es algebraicamente cerrado.

Dem. – Sea $f(x) \in \overline{F}[x]$. PD] f tiene al menos una raiz en $\overline{F}$.

Sea $f(x) \in \overline{F}[x]$ y α raiz de $f(x)$

Conocimiento previo

Notemos que $\overline{F}(\alpha)$ es extension algebraica de $\overline{F}$ pues $f(\alpha)=0$ y por tanto α es algebraico sobre $\overline{F}$

y ya teniamos que $\overline{F}$ es extension algebraica de F entonces por el Teorema 1 $\Rightarrow$ $F(\overline{\alpha})$ es extension algebraica sobre F

$\Rightarrow$ α es algebraico sobre F

Por lo tanto tenemos que α es algebraico sobre F y es algebraico sobre $\overline{F}$ pero como $\overline{F}$ es extension algebraica de F $\Rightarrow$ $\alpha \in \overline{F}$ $\blacksquare$

Teorema 2

Sea F un campo, entonces existe K un campo algebraicamente cerrado que contiene a F

Para dicha demostracion se hace uso del Lema de Zörn a un conjunto en especial o pensar en anillos mas grandes.

Todo lo que hemos hecho hasta ahora es para demostrar el siguiente resultado.

Conocimiento previo

Proposición 4

Sea F un campo, y K / F una extension de campo tal que K es algebraicamente cerrado. Sea

$$\bar{F} = \{k \in K : \ k \text{ es algebraico sobre } F\}$$

Entonces $\bar{F}$ es una cerradura algebraica para F

Dem. – Tenemos por el teorema anterior que la extension K existe.

Ahora, por la proposicion 2 sabemos que $\bar{F}$ es subcampo de K y por su definicion es una extension algebraica sobre F

Solo resta ver que todo polinomio $f(x) \in F[x]$ se factoriza en $\bar{F}$

En efecto sea $f(x) \in F[x]$ y como K es algebraicamente cerrado tendrmeos que $f(x)$ se factoriza linealmente en K
pero si α es raiz de $f(x)$ entonces α es algebraico sobre F $\Rightarrow$ $\alpha \in \bar{F}$ por lo que los factores $x - \alpha \in \bar{F}[x]$
y entonces $f(x)$ se factoriza linealmente sobre $\bar{F}$ $\blacksquare$

Tenemos todo lo necesario para demostrar el teorema fundamental del algebra

Teorema Fundamental del Algebra

Todo polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene al menos una raiz en $\mathbb{C}$

Dem. – El teorema es equivalente a probar que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado.
Consideremos el campo $F = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y la extension algebraica (ejemplo del inicio) $\mathbb{C} / F$ entonces por el teorema 2 existe K extension algebraicamente cerrada tal que $K / \mathbb{C} / F$

$\Rightarrow \; \bar{F} = \{z \in \mathbb{C} : \; z \text{ es algebraico sobre } F\} = \mathbb{C}$ es una cerradura algebraica de F

por lo que por la proposicion 3, $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado $\blacksquare$

Bibliografía

- https://nrich.maths.org/2515

- https://polynomialshistory.weebly.com/history.html

- https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_de_segundo_grado

- https://www.youtube.com/watch?v=T647CGsuOVU&list=PLiaHhY2iBX9g6KIvZ_703G3KJXapKkNaF

- https://www.youtube.com/watch?v=VN7nipynE0c&t=309s

- https://www.britannica.com/science/algebra/Islamic-contributions

- https://www.britannica.com/science/algebra/The-fundamental-theorem-of-algebra

- THE FUNDAMENTAL THEOREM OF ALGEBRA: A SURVEY OF HISTORY AND PROOFS, Linda hand Noel, Bachelor of Science, University of Missouri-Rolla, Rolla, Missouri

- David S. Dummit, Richard M. Foote - Abstract Algebra (2004, Wiley)

- Notas del curso Algebra Moderna II