MATEMÁTICAS

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Variable Compleja III

Proyecto: La función zeta en los números naturales

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En el año 1735 Leonhard Euler dio solución al famoso problema de Basilea planteado unos años antes por el matemático italiano Pietro Mengoli, este resultado fue suficiente para ser reconocido como un gran matemático por el extravagante método usado para su solución. En la época de estudio de Euler ya se sabia que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

era convergente (en general cualquier $p-$serie) y mas aun en 1689 Jakob Bernoulli[1] ya había probado que el valor de dicha serie era menor a 2, por lo que era natural hacerse la pregunta ¿A que valor exacto converge? (problema de Basilea) Fue aquí donde Euler usando unos métodos dudosos en su tiempo mostró que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

que a primera vista es un resultado muy bello, sin embargo, este resultado fue cuestionado por los métodos usados para dar con el, métodos que hablaremos mas adelante.

En su mismo trabajo Euler extendió su método a otras potencias pares, obteniendo los valores exactos hasta la potencia 12

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, .., \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{12}} = \frac{691\pi^{12}}{638512875}$$

y tiempo despues usando el mismo método para el problema de Basilea, productos infinitos y otras herramientas Euler encontró una formula para cualquier potencia par[2], siendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}$$

donde B_n son los números de Bernoulli que discutiremos mas adelante.

[1] (1654-1705) Celebre matemático reconocido por sus aportaciones al calculo y a la probabilidad
[2] Normalmente se le atribuye este resultado, pues sus métodos fueron facilmente generalizables

Otro de los famosos resultados que obtuvo Euler acerca de esta serie es el llamado *Producto de Euler* el cual nos da una estrecha relación con los números primos, este es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{pk}\right)^{-1}$$

el cual tiene múltiples demostraciones que no veremos aquí pero es importante saberla por su bella expresion.

Todos estos resultados pasaron a la historia por su gran belleza y conexión con los números primos pasando por el conocimiento de celebres matemáticos hasta llegar a Bernhard Riemann (1826-1866) quien retomo el trabajo de Euler dándole una generalización en su tesis de doctorado de 1859 traducida al español como «*Sobre el número de primos menores que una cantidad dada*» en ella estudia a la función

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},\ s \in \mathbb{C}$$

desde el punto de vista de la variable compleja, obteniendo resultados profundos en la distribución de primos. La tesis de doctorado de Riemanmn es reconocida como uno de los mas grandes trabajos en teoría de números. En este documento nos adentraremos en la teoría actual de la variable compleja para definir a la función Zeta de Riemann y, ademas, estudiar el valor de la función en los enteros obteniendo resultados muy bellos.

Capítulo 2

Los numeros de Bernoulli

En este capitulo introduciremos la definicion de los numeros de Bernoulli como consecuencia natural de encontrar una formula para las sumas de potencias, veremos sus propiedades basicas y sus aplicaciones en el desarrollo de Laurent de algunas funciones.

2.1. Definicion y propiedades

Unos resultados basicos que se ven en los primeros cursos de una carrera en matematicas son las formulas para las sumas de enteros, cuadrados y cubos consecutivos

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 1^2+2^2+\ldots+n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ 1^3+2^3+\ldots+n^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \end{aligned}$$

donde nos surge una pregunta natural ¿Hay una formula general? es decir, ¿Podemos obtener una formula exacta para el valor de la suma

$$1^m+2^m+\ldots+n^m$$

con m cualquier entero positivo?. Y la respuesta a esta pregunta es afirmativa.

Definición 2.1. Sea $m \in \mathbb{Z}^+$, definimos la suma de las m-esimas potencias de los primeros $n-1$ naturales como

$$S_m(n) = 1^m + 2^m + \ldots + (n-1)^m$$

para cada $n > 1$.

El hecho de tomar la suma hasta $n-1$ en vez de hasta n es por mera conveniencia de cuentas que nos ayudaran en el siguiente resultado.

Proposición 2.1. *Se cumple la relacion de recurrencia*

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\left[n^{m+1} - 1 - \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m+1}{i} S_i(n)\right]$$

para todo $n > 1$ *y* $m \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración. Se tiene que

$$S_{m+1}(n+1)=\sum_{k=1}^{n}k^{m+1}=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)^{m+1}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i}k^i=1+\sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i}S_i(n)$$

de donde

$$\begin{aligned}S_{m+1}(n+1)&=1+\sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i}S_i(n)\\ S_{m+1}(n)+n^{m+1}&=1+(m+1)S_m(n)+S_{m+1}(n)+\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i}S_i(n)\\ n^{m+1}&=1+(m+1)S_m(n)+\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i}S_i(n)\end{aligned}$$

despejando se obtiene lo querido. □

De este resultado podemos obtener «facilmente» las primeras formulas exactas para las sumas de potencias:

$$\begin{aligned}S_1(n)&=\frac{1}{2}\left[n^2-n\right]\\ S_2(n)&=\frac{1}{3}\left[n^3-\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right]\\ S_3(n)&=\frac{1}{4}\left[n^4-2n^3+n^2\right]\\ S_4(n)&=\frac{1}{5}\left[n^5-\frac{5}{2}n^4+\frac{5}{3}n^3-\frac{1}{6}n\right]\\ S_5(n)&=\frac{1}{6}\left[n^6-3n^5+\frac{5}{2}n^4-\frac{1}{2}n^2\right]\end{aligned}$$

y mas aun, podemos dar una relacion entre los coeficientes de estos respectivos polinomios. Desarrollando

$$\begin{aligned}S_1(n)&=\frac{1}{2}\left[n^2-2\left(\frac{1}{2}\right)n\right]\\ S_2(n)&=\frac{1}{3}\left[n^3-3\left(\frac{1}{2}\right)n^2+3\left(\frac{1}{6}\right)n\right]\\ S_3(n)&=\frac{1}{4}\left[n^4-4\left(\frac{1}{2}\right)n^3+6\left(\frac{1}{6}\right)n^2\right]\\ S_4(n)&=\frac{1}{5}\left[n^5-5\left(\frac{1}{2}\right)n^4+10\left(\frac{1}{6}\right)n^3-5\left(\frac{1}{30}\right)n\right]\\ S_5(n)&=\frac{1}{6}\left[n^6-6\left(\frac{1}{2}\right)n^5+15\left(\frac{1}{6}\right)n^4-15\left(\frac{1}{30}\right)n^2\right]\end{aligned}$$

pero los respectivos coeficientes fuera de cada fraccion son los coeficientes binomiales execpto algunos, es de

$$
\begin{aligned}
S_1(n) &= \frac{1}{2}\left[\binom{2}{0}n^2 - \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)n\right] \\
S_2(n) &= \frac{1}{3}\left[\binom{3}{0}n^3 - \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)n^2 + \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)n\right] \\
S_3(n) &= \frac{1}{4}\left[\binom{4}{0}n^4 - \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)n^3 + \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)n^2 + \binom{4}{3}0n\right] \\
S_4(n) &= \frac{1}{5}\left[\binom{5}{0}n^5 - \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)n^4 + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)n^3 + \binom{5}{3}0n^2 - \binom{5}{4}\left(\frac{1}{30}\right)n\right] \\
S_5(n) &= \frac{1}{6}\left[\binom{6}{0}n^6 - \binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)n^5 + \binom{6}{2}\left(\frac{1}{6}\right)n^4 + \binom{6}{3}0n^3 - \binom{6}{4}\left(\frac{1}{30}\right)n^2 + \binom{6}{5}0n\right]
\end{aligned}
$$

de donde podemos observar que los unicos coeficientes que se mueven de manera desconocida son los respectivos coeficientes lineales «B_k» de cada polinomio sucesivo, por lo que si conocemos el comportamiento de estos numeros podremos dar con el valor de la sucesion sin necesidad de una formula recursiva. Dicho esto es facil calcular a estos coeficientes, pues se tiene trivialmente que $S_m^{'}(0) = B_m$ de donde se tiene la siguiente definicion:

Definición 2.2. Definimos a los numeros de Bernoulli como sigue: $B_0 = 1$ y para cada $n > 0$ definimos

$$B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k \tag{2.1}$$

Los primeros valores de dicha sucesion son:

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_7 = 0, ...$$

Observación. Con lo anterior se puede obtener de forma sencilla una nueva formula para $S_m(n)$:

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m-k+1}$$

Todo el procedimiento anterior fue hecho originalmente por Jakob Bernoulli y publicado postumamente en *Ars Conjectandi* en 1713 por su sobrino, de ahi el nombre de dicha sucesion de numeros. Los numeros de Bernoulli seran de vital importancia en lo que respecta a este documento, por lo que sera importante estudiar unas propiedades basicas que necesitaremos.

Proposición 2.2. *Los numeros de Bernoulli cumples las siguientes propiedades:*

1. $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k = B_n,\ \forall n > 1$$

2. $$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$$

3.
$$B_{2n+1} = 0, \ \forall n \geq 1$$

Demostración. El primer inciso es inmediato de la definicion. Para el segundo consideremos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

entonces

$$\begin{aligned} f(z)e^z &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!}\right] z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k\right] z^n = \frac{1}{0!} B_0 + \frac{1}{1!}(B_1 + 1)z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k\right] z^n \\ &\underset{(1)}{=} z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = z + f(z) \end{aligned}$$

y despejando obtenemos el resultado. Y como $\frac{z}{e^z - 1}$ tiene una singularidad removible en $z = 0$ y un polo en $z = 2\pi i$ el radio de convergencia de la serie de potencias sera 2π. Finalmente para el inciso tres debemos recordar la definición de la función cotangente hiperbólica:

$$\coth(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$$

de donde podemos manipular la expresión y tener lo siguiente

$$\coth(z) - 1 = \frac{2e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{2}{e^{2z} - 1} \Rightarrow \frac{z}{2}\coth(\frac{z}{2}) = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1}$$

usando el inciso 2 obtenemos

$$\frac{z}{2}\coth(\frac{z}{2}) = \frac{z}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

el lado izquierdo de esta expresión es una función par, por lo que el lado derecho también debe de ser una función par, por lo que no puede haber potencias impares en la serie de potencias, es decir, $B_{2n+1} = 0, \ \forall n \geq 1$. $\square$

Esta proposición nos da propiedades muy interesantes acerca de los números de Bernoulli pues, por ejemplo el inciso dos, nos da la función generatriz exponencial de los números de Bernoulli y esto nos ayudara a poder expresar de forma exacta la serie de Laurent de algunas funciones trigonométricas que con métodos prácticos son muy difíciles de manejar. La otra propiedad importante aquí es la tercera donde nos dice que cada numero de Bernoulli impar respecto a la sucesión es cero lo cual podíamos intuir al calcular algunos valores e, igual que el anterior, sera algo importante en el desarrollo que haremos.

2.2. Series de Laurent

Como lo mencionamos, los números de Bernoulli nos ayudan a describir la serie de Laurent de varias funciones trigonométricas. Para notar este hecho se usa el siguiente resultado inmediato de lo hecho anteriormente.

Teorema 2.1. *Para todo $z \in D(0,\pi)$ se tiene que*

$$\coth(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}2^{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} \tag{2.2}$$

Demostración. En efecto, sea $z \in D(0,\pi)$ por lo que, usando lo hecho en la proposición 2.2

$$\begin{aligned} z\coth(z) &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(2z)^n \\ \coth(z) &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(2z)^n \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!}(2z)^{2n} \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. □

Con esto dimos la serie de Laurent de la función cotangente hiperbólica y usando las propiedades básicas

$$\begin{aligned} \cot(z) &= \imath\coth(\imath z) \\ \tanh(z) &= \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \\ \tan(z) &= \imath\tanh(\imath z) \end{aligned}$$

podemos obtener las siguientes representaciones

$$\begin{aligned} \cot(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n B_{2n}2^{2n}}{(2n)!} z^{2n-1},\ |z| < \pi \\ \tanh(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} z^{2n-1},\ |z| < \frac{\pi}{2} \\ \tan(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}B_{2n}2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} z^{2n-1},\ |z| < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Capítulo 3

La solución de Euler

En este capitulo daremos la definición de la función Zeta (ζ) para el plano $\mathbb{C}_+ + 1$, lugar donde estudiaremos sus propiedades básicas. También nos adentraremos al método usado por Euler para «probar» el problema de Basilea y notaremos los saltos de justificación hechos por él. Con esto ultimo daremos la teoría necesaria (no demasiado a profundidad) para justificar dichos pasos y así poder encontrar de forma general el valor de la función zeta en los números pares.

3.1. La funcion ζ

Definición 3.1. Sea $s \in \mathbb{C}_+ + 1$, entonces definimos al a funcion Zeta como:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{3.1}$$

Proposición 3.1. *La funcion ζ esta bien definida y ademas es analitica en su dominio.*

Demostración. Sea $K \subseteq \mathbb{C}_+ + 1$ compacto y consideremos la función $g(s) = \mathrm{Re}(s)$ en el mismo dominio. Como g es continua en K, un compacto, tendremos que g alcanza su minimo en K, es decir, existe $s_0 \in K$ tal que $1 < \rho = \mathrm{Re}(s_0) \leq \mathrm{Re}(s)$ para toda $s \in K$. Entonces

- $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{|n^s|} = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}} \leq \frac{1}{n^{\rho}}, \ \forall s \in K$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\rho}} < \infty$

por lo que, usando el criterio M de Weierstrass, tenemos que la serie converge uniformemente en K, esto me dice que la serie converge uniformemente en compactos de $\mathbb{C}_+ + 1$ y como $\frac{1}{n^s}$ es analítica para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que la función ζ es analítica en $\mathbb{C}_+ + 1$. $\square$

Observación. En particular el valor $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ es el problema de Basilea.

Si bien demostramos que la función zeta esta bien definida en $\mathbb{C}_+ + 1$ se puede demostrar algo mas general, siendo que, este es el único dominio donde la serie converge, es decir, si $s \in \mathbb{C}$ entonces la serie definida en (3.1) converge si y solo si $\mathrm{Re}(s) > 1$. La demostración de este hecho no la daremos aquí pues se sale de el tema que queremos hablar.

Otra parte importante del estudio de la función Zeta es dar aproximaciones o cotas para sus valores en lineas o regiones del plano complejo lo cual, en general, suele ser laborioso, sin

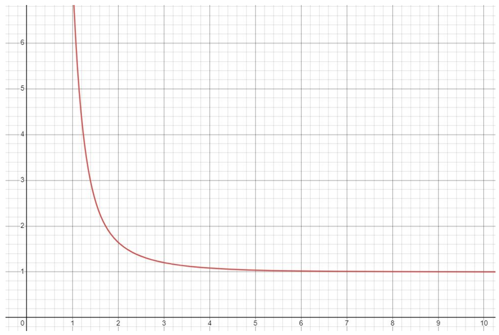

Figura 3.1: Grafica de $\zeta(x)$, $x \in \mathbb{R}$

embargo, en el caso real podemos dar una cota rápidamente pues dados $x > y > 1$ números reales se tiene que

$$\frac{1}{n^x} < \frac{1}{n^y}$$

de donde se sigue que

$$\zeta(x) < \zeta(y)$$

esto me quiere decir que, restringida a los reales, la función zeta es una función decreciente por lo que, usando que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} < 2$ tendremos

$$1 < \zeta(x) < 2, \ \forall x > 2 \tag{3.2}$$

esto en primera instancia nos dice que en particular para los enteros $n > 2$, $1 < \zeta(n) < 2$ que es nuestro primer resultado acerca del valor de la función zeta en los enteros, diciéndonos que estos valores son números entre 1 y 2. Y mas aun, como la función $\zeta(x)$ es estrictamente decreciente entonces

$$\lim_{x\to\infty} \zeta(x) = 1$$

lo cual se puede ver reflejado en la figura 3.1.

3.2. El problema de Basilea

Aquí daremos un esbozo de la prueba hecha por Euler del problema de Basilea.

Proposición 3.2. *(Prueba de Euler) Se tiene que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Demostración. Partimos de la serie de Taylor de la función seno

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \ \Rightarrow \ \frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

entonces considerando los ceros de la función de la izquierda, siendo estos $x = n\pi$, con $n =$

$\pm 1, \pm 2, \ldots,$[1], pero se tiene que $x = n\pi$ si y solo si $1 - \frac{x}{n\pi} = 0$ por lo que

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{x} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots \\ &= 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \ldots\right)x^2 + \left(\frac{1}{4\pi^4} + \frac{1}{9\pi^4} + \frac{1}{36\pi^4} + \ldots\right)x^4 + \ldots\end{aligned}$$

e igualando esta expresión a la serie de Taylor tendremos que los coeficientes del termino cuadrático deben de ser iguales, teniendo

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \ldots \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$\square$

Es claro que la propiedad central que le permitió a Euler probar su resultado fue poder «factorizar» a la función $\frac{sin(x)}{x}$ como producto de sus ceros, lo cual en primera instancia es algo que se sabe que se puede hacer con los polinomios mas no con cualquier función, razón por la cual fue criticado por los matemáticos de su época. Euler se convenció de este hecho al comprobar el valor de ambas expresiones para valores fijos, después de ver que los valores eran muy parecidos el intuyo que la igualdad se debía de cumplir, sin embargo, como sabemos en las matemáticas no es suficiente con que algo «se parezca» por lo que en años posteriores se desarrollo la herramienta necesaria para justificar esta «factorización».

A partir de aquí, nuestro objetivo sera dar una justificación formal a lo hecho por Euler, para ello, nos introduciremos en la teoría de productos infinitos, teoría que, por cierto, es muy rica y poderosa para resolver múltiples problemas.

3.3. Productos infinitos

En esta sección veremos de forma rápida la teoría de productos infinitos.

Definición 3.2. Sea $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$. Decimos que el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n$$

converge si:

1. Existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $z_k \neq 0$, $\forall k \geq N$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{k=N}^{n} z_k$ existe y es finito no nulo.

Observación. Si $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} z_n = 0$ si, y solo si, $z_k = 0$ para algún $1 \leq k < N$.

[1] Euler no considero al cero, pues al evaluar $x = 0$ el lado derecho da 1, no cero.

Esta definición nos permite dar un sentido a los productos infinitos sin ambigüedad. Ya que nos da la noción de cuando un producto infinito efectivamente sera cero sin tener indeterminaciones.

Esta noción de convergencia la dimos para sucesiones de números complejos y, como es normal en el análisis, queremos dar una noción de convergencia de productos infinitos pero ahora para funciones, más aun, queremos que dicha definición nos preserve las propiedades básicas de una función en variable compleja, tales como la continuidad y la analiticidad.

Definición 3.3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región y $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ sucesión de funciones, Decimos que el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$$

converge uniformemente en Ω si:

1. Existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f_k(z) \neq -1$, $\forall k \geq N$ y $\forall z \in \Omega$.
2.La sucesión de productos parciales $\prod\limits_{n=N}^{m} (1 + f_n(z))$ converge uniformemente en Ω a $p(z) \neq 0$.

Tal y como pasa con cualquier convergencia uniforme, demostrar que algo converge uniformemente por definición es complicado, por lo tanto tenemos el siguiente resultado que nos da una condición suficiente para que un producto parcial converga uniformemente.

Proposición 3.3. (Criterio M para productos) *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *región y* $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ *sucesión de funciones tales que:*

1. $|f_n(z)| \leq M_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *y* $\forall z \in \Omega$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$
entonces $\prod\limits_{n=1}^{m} (1 + f_n(z))$ *converge uniformemente.*

Ejemplo. El producto infinito $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ converge uniformemente en $\overline{D(0, R)}$, $R > 0$.

En efecto, sea $z \in \overline{D(0, R)}$ y consideremos $f_n(z) = -\frac{z^2}{n^2}$. Tenemos que $f_n(z) = -1$ si y solo si $z = \pm n$, pero como $z \in \overline{D(0, R)}$ entonces para $n > R$ tendremos que $f_n(z) \neq -1$. Por otro lado, para $n > R$, se tiene

$$|f_n(z)| = \frac{|z|^2}{n^2} \leq \frac{R^2}{n^2} := M_n$$

y es tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$$

por lo tanto, por el criterio M para productos el producto parcial converge uniformemente.

Si observamos atentamente, este es justo el producto infinito utilizado por Euler en su prueba del problema de Basilea, por lo que dicho producto infinito esta bien definido y es convergente en cualquier disco cerrado con centro en el cero, sin embargo, esto no es suficiente, pues aun necesitamos garantizar que efectivamente dicha función coincide con la función seno que conocemos. Para ello necesitaremos ver que pasa con la analiticidad en los productos infinitos, propiedad plasmada en el siguiente resultado.

Proposición 3.4. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región y $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ sucesión de funciones. Si el producto*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$$

converge uniformemente en compactos de Ω y ademas f_n es analitica para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces:

1) $P(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ *es analítica en Ω.*
2) $P(z_0) = 0$ *para algún $z_0 \in \Omega$ si y solo si $f_n(z_0) = -1$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo. $P(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ es entera y se anula unicamente en $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, con orden 1.

Demostración. Ya sabemos que el producto converge uniformemente en discos cerrados, por lo que converge uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$. Entonces por la proposición anterior $P(z)$ es analítica pues las funciones $f_n(z) = -\frac{z^2}{n^2}$ son analíticas. Ademas $P(z) = 0$ si y solo si $z = \pm n$. Ademas como $P(z)$ converge uniformemente en $\overline{D(0,R)}, R > 0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$ se tiene que $f_n(z) \neq -1$ por lo que

$$P(z) = \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \prod_{n=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{z}{n}\right) \prod_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \prod_{n=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

entonces el orden de cada cero es 1. □

Con lo anterior tenemos que el producto infinito usado por Euler efectivamente es convergente para cada valor no solo en los reales, sino en los complejos. Sin embargo, ¿Como podemos asegurar que coincide con la función seno? a simple vista parece que es tarea imposible, sin embargo en el siguiente resultado podemos observar que no es así.

Proposición 3.5. *Existe g entera tal que*

$$\sin(\pi z) = e^{g(z)} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Demostración. Por lo hecho anteriormente tenemos que la función

$$h(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

es entera con ceros de orden 1 en $z \in \mathbb{Z}$. Igualmente tenemos que la función

$$f(z) = \sin(\pi z)$$

es entera con ceros de orden 1 en $z \in \mathbb{Z}$, por lo que

$$\frac{f(z)}{h(z)}$$

es una función esencialmente entera, y tal que no se anula en ningún punto. Por lo tanto, existe una rama del logaritmo bien definida, es decir, existe g entera tal que

$$\frac{f(z)}{h(z)} = e^{g(z)}$$

de donde se sigue el resultado. □

Casi tenemos el resultado de Euler pero tenemos que ver la forma de encontrar dicha g, pero observándolo detenidamente es claro que todo se basara en demostrar que $e^{g(z)} = \pi$, para lo cual necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.1. *Para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, se tiene*

$$\pi z \cot(\pi z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{n^2 - z^2}$$

Demostración. Tenemos que $f(z) := \pi z \cot(\pi z)$ es una función meromorfa con polos simples en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, pues

$$\lim_{z \to 0} \pi z \cot(\pi z) = 1$$

y

$$\lim_{z \to n} \pi z \cot(\pi z)(z - n) = n, \, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

con ello definamos las siguientes:

1) Sea $\{a_n\}$ definida como sigue, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 2$, $a_4 = -2, ...$
2) Sean $\Gamma_n := D(\frac{1}{2}, n)$ curvas cerradas simples positivamente orientadas tales que para cada $n \in \mathbb{N}$se tiene que Γ_n contiene unicamente a $a_1, .., a_n$.

Entonces tenemos las siguientes consecuencias:

a) $R_n := \text{dist}(0, \Gamma_n) = n - \frac{1}{2} \to \infty$ cuando $n \to \infty$
b) $L_n \leq 4\pi R_n$ donde $L_n = 2\pi n$ la longitud de la curva Γ_n

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $w \in \text{int}\Gamma_n$,$w \neq a_1, ..., a_n$ y definamos

$$G_n(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{f(z)}{z(z - w)} dz$$

con ello tenemos que

$$|G_n(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \frac{|f(z)|}{|z| \, |z - w|} \, |dz| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \frac{|f(z_0)|}{R_n \, |z - w|} \, |dz|$$

donde $z_0 = \max_{z \in \Gamma_n} |f(z)|$ y ademas como $|z| \geq R_n \Rightarrow |z - w| \geq R_n - |w|$ por lo que

$$\begin{aligned} |G_n(w)| &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{|f(z_0)|}{R_n \, [R_n - |w|]} \int_{\Gamma_n} |dz| \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{|f(z_0)|}{R_n \, [R_n - |w|]} L_n \leq \frac{1}{2\pi} \frac{|f(z_0)|}{R_n \, [R_n - |w|]} 4\pi R_n \\ &= \frac{2 \, |f(z_0)|}{R_n - |w|} \underset{n \to \infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

por otro lado la función $g(z) = \frac{f(z)}{z(z-w)}$ es analítica en $\text{int}\Gamma_n$ excepto en $z = 0$, w, a_n siendo estos polos simples con residuos:

$$\text{Res}(g, 0) = -\frac{f(0)}{w}$$
$$\text{Res}(g, w) = \frac{f(w)}{w}$$
$$\text{Res}(g, a_n) = \frac{1}{a_n - w}$$

así por el teorema del residuo tendremos

$$\begin{aligned} G_n(w) &= \mathrm{Res}(g,0) + \mathrm{Res}(g,w) + \sum_{n=1}^{k} \mathrm{Res}(g,a_n) \\ &= -\frac{f(0)}{w} + \frac{f(w)}{w} + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{a_n - w} \end{aligned}$$

tendiendo $k \to \infty$ obtenemos

$$0 = -\frac{f(0)}{w} + \frac{f(w)}{w} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n - w} \Rightarrow f(w) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w}{a_n - w}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \pi z \cot(\pi z) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{a_n - z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{a_{2n-1} - z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{a_{2n} - z} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n - z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{-n - z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n - z} - \frac{z}{n + z} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{n^2 - z^2} \end{aligned}$$

□

Teorema 3.1. *Para cada $z \in \mathbb{C}$se tiene que*

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Demostración. Por el lema anterior tenemos que

$$\pi z \cot(\pi z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{n^2 - z^2} \Leftrightarrow \pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{n^2 - z^2}$$

la función $\pi cot(\pi z)$ es la derivada de $\ln(\sin(\pi z)) + C_0$ para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^2$. Mas aun, si $f\,'(z) = \frac{z}{z^2 - n^2}$,entonces la función f tal que la serie emergente converge en algún subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$ es

$$f(z) = \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) + C_1$$

lo cual se puede probar usando el criterio M de Weierstrass. El intercambio de la suma y la derivada se justifica por la convergencia uniforme. Se sigue entonces que

$$\ln(\sin(\pi z)) = \ln(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

aplicando exponencial de ambos lados obtenemos

$$\sin(\pi z) = z e^c \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

[2] Pues dado que la función seno no se anula en ese dominio que es abierto entonces existirá una rama del logaritmo adecuada.

y sabiendo $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin(\pi z)}{z} = \pi$ tenemos que $e^c = \pi$ de donde

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, pero como la parte de la derecha es una función entera entonces teorema de identidad tenemos que coinciden en todos los complejos. $\square$

Y finalmente hemos demostrado el producto infinito revelado por Euler, por lo que queda completamente bien justificados todos sus pasos para la demostración del problema de Basilea. Pero podemos ir aun mas allá pues, como lo mencionamos al inicio, Euler dio una formula general para potencias pares y es aquí donde daremos dicha demostración, pero con las herramientas actuales.

Capítulo 4

Valores $\zeta(k)$, $k \in \mathbb{N}$

En este capitulo utilizaremos todo lo visto en este documento para dar la formula encontrada por Euler de la función zeta en los pares, así como también investigaremos que pasa en el caso de los impares ¿También hay una formula exacta? ¿Como se relacionan?

4.1. Los números pares

Como bien vimos al inicio, en sus trabajos iniciales Euler descubrió los siguientes valores

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, .., \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{12}} = \frac{691\pi^{12}}{638512875}$$

de donde es lógico conjeturar que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\zeta(2n) = \frac{a}{b}\pi^{2n}$$

es decir, la función zeta en los pares es igual a un numero racional por una potencia par de π. Conjetura que resulto ser cierta y vendrá plasmada en el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n}$$

Demostración. Por el teorema 3.1 sabemos que

$$\sin(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

y usando que $\sinh(z) = -i\sin(iz)$ obtenemos

$$\sinh(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right) \Leftrightarrow \frac{\sinh(z)}{z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

donde dicha función es entera con ceros en $z = \pm\pi i, \pm 2\pi i, ...$
Consideremos $z \in D(0,\pi)$ por lo que la función $\frac{\sinh(z)}{z}$ sera entera y no nula en dicho dominio,

con ello existirá una rama del logaritmo, es decir, $\log\left(\frac{\sinh(z)}{z}\right)$ existe y es analítica en $D(0,\pi)$, con ello

$$\log\left(\frac{\sinh(z)}{z}\right) = \log\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right) + C$$

de donde derivando de ambos lados, y usando la convergencia uniforme

$$\begin{aligned}\coth(z) - \frac{1}{z} &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{z^2+\pi^2 n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{\pi^2 n^2}\frac{1}{\left(\frac{z}{\pi b}\right)^2+1}\\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{\pi^2 n^2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\left(\frac{z}{\pi n}\right)^{2m-2}\\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{z^{2m-1}}{\pi^{2m}n^{2m}} = 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{z^{2m-1}}{\pi^{2m}n^{2m}}\\ &= 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{z^{2m-1}}{\pi^{2m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}} = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{2z^{2m-1}}{\pi^{2m}}\zeta(2m)\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\coth(z) = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{2z^{2m-1}}{\pi^{2m}}\zeta(2m)$$

sin embargo, si recordamos, el teorema 2.1 nos dice que

$$\coth(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}2^{2n}}{(2n)!}z^{2n-1}$$

y dado que las series de Laurent son únicas se obtiene que coinciden coeficiente a coeficiente, es decir

$$(-1)^{m-1}\frac{2}{\pi^{2m}}\zeta(2m) = \frac{B_{2n}2^{2n}}{(2n)!}$$

de donde despejando se obtiene el resultado. □

Sin lugar a dudas es un resultado muy bello que nos relaciona al numero π, la función zeta y los números de Bernoulli que parecieran no tener nada que ver en primera instancia. También es importante remarcar que la conjetura de Euler fue valida, pues por su definición los números de Bernoulli son racionales y por ende se tiene que $\zeta(2n) = \frac{a}{b}\pi^{2n}$ tal y como conjeturo Euler.

4.2. Los números impares

Una vez hecho lo anterior es natural preguntarse ¿Que pasa con la función zeta en los impares? y la es complicada. Claramente luego de su resultado, Euler trato de aplicar el mismo método pero ahora para obtener las potencias impares, sin embargo no tuvo éxito en dichos procedimientos. Esto puede ser causado por varias razones, la paridad de la función cotangente y el hecho de que $B_{2n+1} = 0$.

Euler conjeturo que al igual que con los números pares se cumpliría que

$$\zeta(2n+1) = \frac{a}{b}\pi^{2n+1}$$

pero no pudo demostrar dicha conjetura. Como bien demostramos $\zeta(2n) = \frac{a}{b}\pi^{2n}$ de donde se obtiene de forma inmediata que $\zeta(2n)$ es irracional $\forall n \in \mathbb{N}$, y en cambio hasta el día de hoy no se sabe si es que $\zeta(2n+1)$ sera irracional para toda n o no. El primer avance fuerte en este camino fue hecho por Roger Apery[1] en 1979 donde demostró que la suma de los inversos de los cubos, $\zeta(3)$, era irracional. Dicho resultado se debe a que Apery logro dar una representación para dicha constante, siendo

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3 \binom{2k}{k}}$$

igualmente encontró representaciones para $\zeta(2)$ y $\zeta(4)$. Lamentablemente el método usado por Apery no fue generalizable para las demás potencias. Dadas sus aportaciones hoy en día al valor $\zeta(3) \approx 1.20205...$ se le conoce como «Constante de Apery». Años posteriores otros resultados sustanciales en esta dirección fueron obtenidos por Tanguy Rivoal y V. Zudilin donde en vez de estudiar la irracionalidad de $\zeta(2n+1)$ para todos los naturales, se limitaron a estudiar por lo menos cuales si deberían de ser irracionales, el primer resultado de este estilo fue dado por Rivoal en el año 2000.

Teorema. (Rivoal, 2000) *Hay infinitos valores irracionales de la función zeta de Riemann para argumentos impares. Ademas, si*

$$N(n) = \#\mathrm{numeros\,irracionales\,de}\,\zeta(3),\,\zeta(5),...,\zeta(2\mathrm{n}+1)$$

entonces

$$N(n) \geq C \log n$$

para n suficientemente grande, donde C puede ser tomada como $\frac{1}{2(1+\log 2)}$.

Un año después V. Zudilin dio el siguiente resultado.

Teorema. (C. Zudilin, 2001) *Al menos uno de los cuatro números* $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $,\zeta(9)$, $\zeta(11)$ *es irracional.*

Dicho resultado es muy interesante, pues no si bien no sabemos que todos los valores impares de la función zeta sean irracionales al menos uno de esos cuatro si lo sera. Este resultado fue extendido por Rivoal un año después.

Teorema. (Rivoal, 2002) *Al menos uno de los nueve números* $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, ..., $\zeta(21)$ *es irracional.*

Posteriormente no ha habido ningún otro resultado en este sentido.

En la sección 3.1 de este documento obtuvimos que $\forall x > 2$

$$1 < \zeta(x) < 2$$

con lo cual se tiene que $\{\zeta(x)\} = \zeta(x) - 1$ es la parte fraccionaria de la función zeta para $x > 2$ y dado que $\lim_{x\to\infty} \zeta(x) = 1$ entonces $\lim_{x\to\infty} \{\zeta(x)\} = 0$ por lo que tiene sentido preguntarse por la convergencia de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{\zeta(n)\}$$

la cual vemos en el siguiente resultado.

[1] Matemático frances, 1916-1994

Teorema 4.2. *Se tiene que*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{\zeta(n)\} = 1$$

Demostración. Por lo mencionado hace un momento y por la convergencia uniforme de la función zeta

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \{\zeta(n)\} &= \sum_{n=2}^{\infty} \zeta(n) - 1 = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k^n} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{1-\frac{1}{k}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1\end{aligned}$$

□

Lo cual es fascinante, pues la suma de las partes fraccionarias están de alguna forma uniformente distribuidas. De forma similar se tiene el siguiente resultado para los valores pares.

Teorema 4.3. *Se tiene que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{\zeta(2n)\} = \frac{3}{4}$$

Demostración. De forma análoga

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \{\zeta(2n)\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{1-\frac{1}{k^2}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

□

Y como coralario directo de los dos anteriores tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{\zeta(2n-1)\} = \frac{1}{4}$$

Con lo anterior podemos observar que los valores de la función zeta en los pares y en los impares están relacionados íntimamente, pues parece que los pares aportan mas en decimal que los impares, pero de una forma bien distribuida.

En este camino hemos visto los distintos métodos de ataque para los valores impares de la función zeta, sin embargo el camino a demostrar la irracionalidad o siquiera saber si son del tipo $\frac{a}{b}\pi^{2n+1}$ aun esta fuera de nuestro alcance. El trabajo mas cercano a dar con una formula con esta forma fue dado por Cvijovic y Kilonowski en el año 2002 donde demostraron una formula cerrada para la función zeta en los números impares, dada por

$$\zeta(2n+1) = \frac{(-1)^{n-1}2^n}{(2n+1)!}\left[\int_0^1 B_{2n+1}(x)\cot(\pi x)dx\right]\pi^{2n+1}$$

que como podemos observar tiene una forma casi identidad al a formula de los números pares y ademas tiene la forma conjeturada por Euler, sin embargo aun con este resultado no se ha podido demostrar si sus valores serán irracionales o no, ni siquiera si el factor de la izquierda sera racional. Todas estas interrogantes siguen siendo un problema abierto hasta hoy en día.

Bibliografía

[1] A. Emmell, *Leonhard Euler and The Basel Problem*, 2013. Disponible en https://web.williams.edu/Mathematics/sjmiller/public_html/hudson/Emmell,%20Amber_Euler%20&%20The%20Basel%20Problem.pdf

[2] N. Douglas, *The Bernoulli Numbers: A Brief Primer*. Tesis Honorifica, Whitman College, 2019.

[3] M. Kobayashi, S. Sasaki, *Values of zeta-one functions at positive even integers,* arXiv:2202.11835v2 [math.NT], 2022. http://arxiv.org/abs/2202.11835v2.

[4] D. Roman, M. Ján, *Values of the riemann zeta function at integers*, 2009. Disponible en https://ddd.uab.cat/pub/matmat/matmat_a2009/matmat_a2009a6.pdf

[5] D. Cvijovic, J. Klinowski, *Integral representations of the riemann zeta function for odd-integer arguments*, Journal of Computational and Applied Mathematics 142 (2002), 435-439. Doi 10.1016/S0377-0427(02)00358-8

[6] A. Karatsuba, B. Nathanson, *Basic Analytic Number Theory*, Springer Berlin, Heidelberg, 1993. Doi 10.1007/978-3-642-58018-5