Seminario de Análisis Combinatorio

Fundamentos de combinatoria

Ecuación General de Recurrencias lineales con coeficientes constantes

Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

22/mayo/2023

Definición 1

Una recurrencia lineal es una sucesion $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ que cumple una relacion de la siguiente forma:

$$X_n = a_1(n)X_{n-1} + a_2(n)X_{n-2} + \cdots + a_k(n)X_{n-k} + b, \qquad \text{con } a_i(n), b_i(n) \in \mathbb{C}$$

donde $X_0,\ X_1, \ldots,\ X_{k-1}$ estan dados. La llamamos homogenea si $b = 0$ y no homogenea si $b \neq 0$

El objetivo que quisieramos es encontrar una formula general para una recurrencia lineal

Para simplificar, en este documento unicamente trataremos con el siguiente tipo de recurrencia lineal

Definición 2

Una recurrencia lineal con coeficientes constantes es una sucesion $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ que cumple una relacion de la siguiente forma:

$$X_{n+k} = a_1X_{n+k-1} + a_2X_{n+k-2} + \cdots + a_kX_n + b, \qquad \text{con } a_i \in \mathbb{C}$$

donde $X_0,\ X_1, \ldots,\ X_{k-1}$ estan dados. La llamamos homogenea si $b = 0$ y no homogenea si $b \neq 0$

Veremos dos formas de encontrar una solucion general

METODO LINEAL

Para este metodo unicamente considerarelos R.L.C.H

Ejemplos. –

- La sucesion de Fibonacci: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_0 = 0, \; F_1 = 1 \qquad \Rightarrow \; F_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

- La sucesion de Lucas: $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \quad L_0 = 2, \; L_1 = 1 \qquad \Rightarrow \; L_n = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

- $X_{n+3} = X_{n+2} - X_{n+1} + X_n, \quad X_0 = 1, \; X_1 = 0, \; X_2 = 2 \qquad \Rightarrow \; X_n = \dfrac{3}{2} + \left(-\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\right)i^n + \left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4}\right)(-i)^n$

Consideremos la relacion de recurrencia $X_{n+2} = rX_{n+1} + sX_n$ donde no se especifican los valores iniciales entonces si $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son R.L.C.H tales que cumplen la relacion de recurrencia, tendremos que $Z_n = aW_n + bY_n,\ a,b \in \mathbb{C}$ tambien cumple la relacion de recurrencia

$$Z_{n+2} = aW_{n+2} + bY_{n+2} = a(rW_{n+1} + sW_n) + b(rY_{n+1} + sY_n) = arW_{n+1} + asW_n + brY_{n+1} + bsY_n$$

$$= (arW_{n+1} + brY_{n+1}) + (asW_n + bsY_n) = r(aW_{n+1} + bY_{n+1}) + s(aW_n + bY_n) = rZ_{n+1} + sZ_n$$

¿Que acabamos de hacer?

Teorema

Sea V el conjunto de recurrencias lineales c.c tales que cumplen la recurrencia $X_{n+2} = rX_{n+1} + sX_n$ entonces V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ (de dimension 2)

Obs. – La base "elemental" es $\{U_n, V_n\} \subseteq V$ dadas por $\begin{cases} U_0 = 0, & U_1 = 1 \\ V_0 = 1, & V_1 = 0 \end{cases}$

Sin embargo podemos dar otra base para nuestro espacio que nos sera mas util

Definición

Dada una recurrencia lineal

$$X_{n+k} = a_1 X_{n+k-1} + a_2 X_{n+k-2} + \cdots + a_k X_n, \qquad \text{con } a_i \in \mathbb{C}$$

definimos a su ecuacion caracteristica a la ecuacion $x^k = a_1 x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k$

$$X_{n+2} = rX_{n+1} + sX_n \quad \Rightarrow \quad x^2 = rx + s \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4s}}{2}, \ \alpha_2 = \frac{r - \sqrt{r^2 + 4s}}{2}$$

y sean $U_n = \alpha_1^n$, $V_n = \alpha_2^n$ sucesiones. Veamos que $\{U_n, V_n\}$ es base del espacio V.

- $U_{n+2} = \alpha_1^{n+2} = \alpha_1^n \alpha_1^2 = \alpha_1^n [r\alpha_1 + s] = r\alpha_1^{n+1} + s\alpha_1 = rU_{n+1} + sU_n$
- Si $\alpha_1 \neq \alpha_2 \ \Rightarrow \ U_n, \ V_n$ son $L.I$

$\therefore$ es base $\quad \therefore \ \exists c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ tales que $X_n = c_1 U_n + c_2 V_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n$

Ejemplos. –

- La sucesion de Lucas: $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \quad L_0 = 2,\ L_1 = 1$

$$\Rightarrow \ x^2 = x + 1 \qquad \Rightarrow \ \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \therefore \ \text{de lo anterior } L_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = L_0 = c_1 + c_2 \\ 1 = L_1 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \ c_1 = 2 - c_2 \quad \Rightarrow \ (2 - c_2)\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 1$$

$$\Rightarrow \ 2\alpha_1 - \alpha_1 c_2 + \alpha_2 c_2 = 1 \ \Rightarrow \ c_2 = \frac{1 - 2\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{-\sqrt{5}}{-\sqrt{5}} = 1 \qquad \Rightarrow \ c_1 = 1$$

$$\therefore \ \text{de lo anterior } L_n = (1)\alpha_1^n + (1)\alpha_2^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Teorema

Dada una recurrencia lineal c.c

$$X_{n+k} = a_1 X_{n+k-1} + a_2 X_{n+k-2} + \cdots + a_k X_n, \qquad \text{con } a_i \in \mathbb{C}$$

con valores iniciales $X_0, \ldots, X_{k-1}$. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ son las raices (distintas) de su polinomio caracteristico , entonces la ecuacion general de la recurrencia viene dada por

$$X_n = c_1 \alpha_1^n + \cdots + c_k \alpha_k^n$$

donde las constantes $c_1, .., c_k$ se pueden encontrar resolviendo el sistema

$$\begin{cases} X_0 = c_1 + \cdots + c_k \\ X_1 = c_1 \alpha_1 + \cdots + c_k \alpha_k \\ \vdots \\ X_{k-1} = c_1 \alpha_1^{k-1} + \cdots + c_k \alpha_k^{k-1} \end{cases}$$

¿Que pasa si una raiz tiene multiplicidad mayor a 1?

En este caso, digamos, α tiene multiplicidad d consideraremos las sucesiones

$$U_1 = \alpha^n,\ U_2 = n\alpha^n, \ldots,\ U_d = n^{d-1}\alpha^n$$

Ejemplo. –

- La sucesion $a_{n+4} = 5a_{n+3} - 6a_{n+2} - 4a_{n+1} + 8a_n$ tiene como ecuacion caracteristica

$$x^4 = 5x^3 - 6x^2 - 4x + 8 \ \Rightarrow\ (x-2)^3(x+1) = 0 \ \Rightarrow\ \alpha_1 = -1 \text{ y } \alpha_2 = 2$$

donde α_2 tiene multiplicidad 3, por lo que la ecuacion general vendra dada por

$$a_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + c_3 n\alpha_2^n + c_4 n^2\alpha_2^n$$

METODO SERIES

Definición

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, llamamos por serie de potencias centrada en z_0, a una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Obs 1. – Para los hechos que queremos utilizaremos $z_0 = 0$ y en este caso diremos que la serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es la Funcion Generadora de a_n

Obs 2. – Normalmente en el estudio de funciones generadoras nos es irrelevante el radio de convergencia.

Obs 3. – Sin entrar en los detalles tecnicos (convergencia normal y uniforme) se tienen las siguientes operaciones en las series de potencias

- $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$
- $$\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$
- $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{con} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$
- $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \iff a_n = b_n \ \forall n$$

Un ejemplo de series de potencias son las Series de Taylor, de las cuales podemos hacer uso

Ejemplo. –

- Encontrar la funcion generadora de $a_n = n$

$$\text{Tenemos que } \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Rightarrow -\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} \Rightarrow -\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n$$

$\therefore f(z) = -\dfrac{z}{(1-z)^2}$ es la funcion generadora de $a_n = n$

¿Como nos ayudan en la ecuacion general de recurrencia lineal?

Con este metodo podemos resolver R.L.C no homogeneas y homogeneas

Ejemplo. –

- Encontrar la ecuacion general de la sucesion dada por $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + 1,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1$

Llamemos $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

1) Por un lado

Multiplicamos ambos lados por z^{n+2} $\Rightarrow a_{n+2}z^{n+2} = a_{n+1}z^{n+2} + 2a_n z^{n+2} + z^{n+2}$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}z^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}z^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n z^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}z^{n+2} = z\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}z^{n+1} + 2z^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + z^2\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) - a_1 z - a_0 = z\left(\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right] - a_0\right) + 2z^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + z^2\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) - z = z\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) + 2z^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + z^2 \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\Rightarrow f(z) - z = zf(z) + 2z^2 f(z) + z^2 \frac{1}{1-z} \quad \Rightarrow f(z) - zf(z) - 2z^2 f(z) = \frac{z^2}{1-z} + z$$

$$\Rightarrow f(z)[1 - z - 2z^2] = \frac{z}{1-z} \quad \Rightarrow \quad f(z) = \frac{z}{(1-z)(1-z-2z^2)}$$

2) Por otro lado

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)(1-z-2z^2)} = \frac{z}{(1-z)(1+z)(1-2z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+z} + \frac{C}{1-2z}$$

$$\therefore \quad z = (1+z)(1-2z)A + (1-z)(1-2z)B + (1-z)(1+z)C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -1 & & -1 = (2)(3)B & & B = -\frac{1}{6} \\ z = 1 & \Rightarrow & 1 = (2)(-1)A & \Rightarrow & A = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})(\frac{3}{2})C & & C = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{z}{(1-z)(1+z)(1-2z)} = \frac{(-\frac{1}{2})}{1-z} + \frac{(-\frac{1}{6})}{1+z} + \frac{(\frac{2}{3})}{1-2z}$$ pero por Taylor tenemos que

$$\Rightarrow f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{6}(-1)^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3} 2^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} [-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n] z^n$$

Pero nosotros teniamos que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ por lo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} [-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n] z^n \Leftrightarrow a_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n$$

Gracias :)