A CLUSTER OF GREAT FORMULAS

K. L. CHUNG

Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

25/agosto/2025

La función Theta

Se tiene la funcion definida:

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 x}, \quad 0 < x < \infty$$

En 1931, en su articulo "Sobre la determinación empirica de una ley de distribucion"

Andréi Kolmogorov demostro que dicha función F era de distribucion

Para ello utilizo la representacion como producto infinito

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-nx}}{1 + e^{-nx}}$$

la cual se deduce del Triple Producto de Jacobi

La función Theta

Recordemos unos resultados...

Lema 1

Si $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ son variables aleatorias independientes con funcion de distribución F_{X_i} respectivamente. Entonces, la variable aleatoria $Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ tiene distribución

$$F_{Y_n}(x) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x)$$

Más aún, si las variables son indenticamente distribuidas, entonces

$$F_{Y_n}(x) = \left(F_{X_1}(x)\right)^n$$

La función Theta

Corolario 1

Si $\left\{X_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ son variables aleatorias independientes con funcion de distribución F_{X_i} respectivamente. Entonces, la variable aleatoria $\mathrm{Y} = \sup_{k\geq 1}\left\{X_k\right\}$ esta bien definida y tiene distribución

$$F_Y(x) = \prod_{k=1}^{\infty} F_{X_k}(x)$$

Con esto podemos notar que, si encontraramos variables $\left\{Y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ cuya funcion de distribucion fuera $F_{Y_n}(x) = \dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}$, entonces la funcion

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}} = \prod_{n=1}^{\infty} F_{Y_n}(x)$$

seria la funcion de distribucion de la variable $Z = \sup_{n\geq 1}\left\{Y_n\right\}$

La función Theta

Sea $n \geq 1$ fijo. Consideremos las v.a $N \sim \text{geo}(\frac{1}{2})$ y $X_m \sim \exp(n)$ $\forall m \geq 1$ independientes

y definimos las v.a $Y_n := \max\limits_{1 \leq m \leq N} \{X_m\}$

Con ello se tiene (Ley de probabilidad total)

$$F_{Y_n}(x) = \mathbb{P}[Y_n \leq x] = \mathbb{E}[\mathbb{P}[Y_n \leq x \mid N]] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[N = k]\mathbb{P}[Y_n \leq x \mid N = k] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mathbb{P}[Y_n \leq x \mid N = k]$$

$$\underset{\text{Lema 1}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(F_{X_1}(x)\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(1 - e^{-nx}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-nx}}{2}\right)^k$$

$$= \frac{\left(\frac{1 - e^{-nx}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1 - e^{-nx}}{2}\right)} = \frac{1 - e^{-nx}}{1 + e^{-nx}}$$

$\therefore$ por el corolario 1, $F(x)$ es funcion de distribución de $Z = \sup\limits_{n \geq 1} \{Y_n\}$

La función Theta

Con este resultado se prueba los siguientes tres:

(i) F es no decreciente de 0 a ∞ (ii) $\lim_{x\to 0^+} F(x) = 0$ (iii) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

¿Es posible probar (i), (ii) y (iii) sin hacer uso forma producto?

Proposición 1 (Prueba de (iii))

Se cumple que $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

Dem. – Desarrollando

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 x} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n e^{-n^2 x} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 x} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 x}$$

de donde se optiene el resultado. $\blacksquare$

Grandes formulas

Para poder demostrar los demas proceguiremos considerando la transformada de Laplace de F

$$\hat{F}(\lambda) = \lambda\int_0^\infty F(x)e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^\infty \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 x}\right) e^{-\lambda x}dx = \lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty (-1)^n e^{-n^2 x} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \int_0^\infty e^{(-n^2-\lambda)x}dx = \lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(-n^2-\lambda)} e^{(-n^2-\lambda)x}\right]_0^\infty$$

$$= \lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda} = \lambda\left[\frac{1}{\lambda} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda}\right] = 1 + 2\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda}$$

$$\therefore \quad \hat{F}(\lambda) = 1 + 2\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda}$$

Por otro lado, recordemos la formula producto para el seno de Euler

Grandes formulas

Teorema 1 (Euler)

Se cumple la siguiente igualdad

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

De la cual podremos deducir

Teorema 2

Se cumple la siguiente igualdad

$$\frac{\pi z}{\sin(\pi z)} = 1 + 2z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - z^2}$$

Dem. – Tomando la igualdad del teorema 1 y derivando logaritmicamente de ambos lados

$$\pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z/n^2}{1 - z^2/n^2} = -2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - z^2}$$

Grandes formulas

$$\pi z\cot(\pi z) = 1 - 2z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 - z^2}$$

y notando que

$$\cot(\frac{x}{2}) - \cot(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

obtenemos

$$\frac{\pi z}{\sin(\pi z)} = \pi z\cot(\frac{\pi z}{2}) - \pi z\cot(\pi z) = \left[2 - 4(\frac{z}{2})^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 - (\frac{z}{2})^2}\right] - \left[1 - 2z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 - z^2}\right]$$

$$= \left[2 - z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2 - z^2}\right] - \left[1 - 2z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 - z^2}\right]$$

$$= 2 - 4z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2 - z^2} - 1 + 2z^2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2 - z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2 - z^2}\right]$$

Grandes formulas

$$\frac{\pi z}{\sin(\pi z)} = 1 - 4z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2 - z^2} + 2z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2 - z^2} + 2z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2 - z^2}$$

$$= 1 - 2z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2 - z^2} + 2z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2 - z^2}$$

$$= 1 - 2z^2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2 - z^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2 - z^2}\right] = 1 + 2z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - z^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} = 1 + 2z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - z^2} \qquad \blacksquare$$

Grandes formulas

Retomando, teniamos

$$\hat{F}(\lambda) = 1 + 2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \lambda}$$

que por el teorema 2, tomando $z = i\sqrt{\lambda}$

$$\hat{F}(\lambda) = 1 + 2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \lambda} = 1 + 2(i\sqrt{\lambda})^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - (i\sqrt{\lambda})^2} = \frac{\pi i \sqrt{\lambda}}{\sin(\pi i \sqrt{\lambda})}$$

y usando nuevamente el teorema 1 (euler)

$$\hat{F}(\lambda) = \frac{\pi i \sqrt{\lambda}}{\sin(\pi i \sqrt{\lambda})} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(i\sqrt{\lambda})^2}{n^2}\right)^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n^2}\right)^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^2 + \lambda}\right)$$

$$\therefore \quad \hat{F}(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^2 + \lambda}\right)$$

Grandes formulas

Finalmente, consideremos la sucesion de v.a $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ i.i.d con $T_n \sim \exp(1)$

entonces la v.a $Z_n := \frac{T_n}{n^2}$, tiene funcion de densidad $Z_n(t) = n^2 e^{-n^2 t}$ por lo que, calculando su transformada de Laplace

$$\hat{Z}_n(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Z_n(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} n^2 e^{-n^2 t} dt = n^2 \int_0^\infty e^{(-\lambda - n^2)t} dt = \frac{n^2}{n^2 + \lambda}$$

$$\therefore \ \mathbb{E}[e^{-\lambda Z_n}] = \frac{n^2}{n^2 + \lambda}$$

de modo que definiendo $Y := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{n^2}$

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda Y}] = \mathbb{E}[\prod_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda Z_n}] = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[e^{-\lambda Z_n}] = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + \lambda} = \hat{F}(\lambda)$$

$\therefore$ por la unicidad de la transformada, F es funcion de distribucion

A CLUSTER OF GREAT FORMULAS

K. L. CHUNG

Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

18/agosto/2025