MATEMÁTICAS

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Seminario Curvas Algebraicas

Tarea 1

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 1. –

Ejercicio 1. *1. Considera el polinomio $g(x, y) = x^2y + y^2x \in \mathbb{Z}_2[x, y]$. Muestra que $g(x, y) = 0$ para cada $(x, y) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*

2. Encuentra un polinomio no nulo $g(x, y, z) \in \mathbb{Z}_2[x, y, z]$ que se anule en todos los puntos de $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. Trata de encontrar uno en el que aparezcan explícitamente las tres variables.

3. Encuentra un polinomio no nulo en $\mathbb{Z}_2[x_1, \ldots, x_n]$ que se anule en todos los puntos de $\mathbb{Z}_2^n = \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$. Trata de encontrar uno en el que aparezcan explícitamente todas las variables.

Demostración:

(1) Todo se basa en la paridad.

• Si x, y son pares, entonces x^2y, y^2x son pares, por lo que, $x^2y + y^2x$ es par y por tanto $g(x,y) \equiv 0 \pmod 2$ $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}_2$.

• Si x, y son impares, entonces x^2y, y^2x son impares, por lo que, $x^2y + y^2x$ es par y por tanto $g(x,y) \equiv 0 \pmod 2$ $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}_2$.

• Si x o y es par entonces x^2y, y^2x son pares, por lo que, $x^2y + y^2x$ es par y por tanto $g(x,y) \equiv 0 \pmod 2$ $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}_2$.

■

(2) Sea $g(x,y,z) = xyz + x^2yz \in \mathbb{Z}_2[x,y,z]$. Si z, y o z es par, entonces xyz, x^2yz son pares y por tanto $xyz + x^2yz$ es par, entonces $g(x,y) \equiv 0 \pmod 2$ y si todos son impares entonces xyz, x^2yz son impares, por lo que $xyz + x^2yz$ es par y entonces $g(x,y) \equiv 0 \pmod 2$ $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}_2$.

■

(3) Sea $g(x_1, \ldots, x_n) = x_1x_2\cdots x_n + x_1{}^2x_2\cdots x_n$. Si x_i es par para algún i, entonces $x_1x_2\cdots x_n$, $x_1{}^2x_2\cdots x_n$ son pares y por tanto $x_1x_2\cdots x_n + x_1{}^2x_2\cdots x_n$ es par, entonces $g(x,y) \equiv 0 \pmod 2$ y si todos son impares entonces $x_1x_2\cdots x_n$, $x_1{}^2x_2\cdots x_n$ son impares, por lo que $x_1x_2\cdots x_n + x_1{}^2x_2\cdots x_n$ es par y entonces $g(x,y) \equiv 0 \pmod 2$ $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}_2$.

■

Problema 5. –

Ejercicio 5. *Sea R un DFU y K su campo de cocientes. Demuestra que todo elemento z de K puede ser escrito en la forma $z = \frac{a}{b}$, con $a, b \in R$ y sin factores comunes. Esta representación es única salvo unidades en R.*

Demostración: Sea $z \in K$ entonces existen $c, d \in R$, $d \neq 0$ tales que $z = [c,d] := c/d$. Con ello dado que R es un DFU tendremos que existe $(c,d) \in R$ máximo común divisor y para toda unidad $u \in R$ el elemento $e := u(c,d) \in R$ es máximo común divisor también, con esto sean $a := c/e$, $b := d/e \in R$ (que están bien definidos pues $e \neq 0$) y veamos que estos son los elementos buscados. En efecto, tenemos que

$$ad = \frac{c}{e} d = c\frac{d}{e} = \frac{d}{e} c = bc \;\Rightarrow\; (a,b) \sim (c,d) \;\Rightarrow\; [a,b] = [c,d]$$

por lo que $z = [a,b]$ donde a, b no tiene factores comunes y donde estos elementos son únicos salvo unidades.

■

Problema 9. –

Ejercicio 9. *Si K es un campo finito muestra que todo subconjunto de $\mathbb{A}^n(K)$ es un conjunto algebraico.*

Demostración: En efecto, como K es finito tenemos que $\left|\mathbb{A}^n(K)\right| = |K|^n$ por lo que si tomo $A \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ también es un conjunto finito, con ello sean $a_1, \ldots, a_m$ sus elementos (que son n-eadas de elementos de K) y sean $f_k(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ dadas por $f_k(x) = (x_1 - a_{k1})^2 + \cdots + (x_n - a_{kn})^2$ donde $k \in \{1,..,m\}$ con $a_k = (a_{k1}, \ldots, a_{kn})$ y definimos $f = f_1 \cdots f_m$. Entonces notemos que para cada $k \in \{1,..,m\}$ se tendrá que $f_k(a_k) = 0$, pues $f_k(a_k) = f_k(a_{k1}, \ldots, a_{kn}) = (a_{k1} - a_{k1})^2 + \cdots + (x_n - a_{kn})^2 = 0$ y estos son los únicos ceros, por lo que $f(a_k) = 0 \;\; \forall k \in \{1,..,m\}$ siendo estos los únicos ceros de f por lo que tenemos que $V(f) = A$ y por tanto A es conjunto algebraico.

■

Problema 13. –

Ejercicio 13. *Realiza un esquema de las siguientes curvas algebraicas en $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$:*

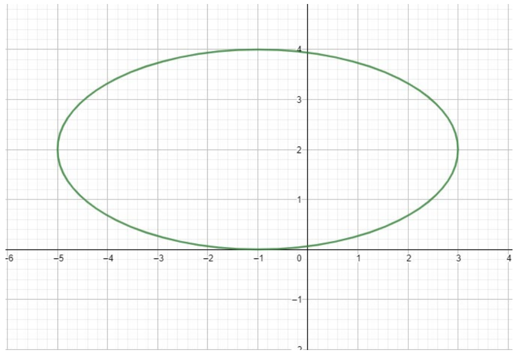
1. $V(x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 1)$.
2. $V(x^2 - y^2)$.
3. $V(2x - 3y + 1)$.
4. $V(y^2 - x(x-1)(x-2))$.

Demostración:

(1) Tenemos que

$$f(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x^2 + 2x + 1) + (4y^2 - 16y) = 0$$
$$\Leftrightarrow\; (x+1)^2 + 4(y^2 - 4y) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+1)^2 + 4(y-2)^2 - 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow\; \frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x+1)^2}{4^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1$$

que es la elipse horizontal con centro en $(-1,2)$ de radio mayor 4 y radio menor 2:



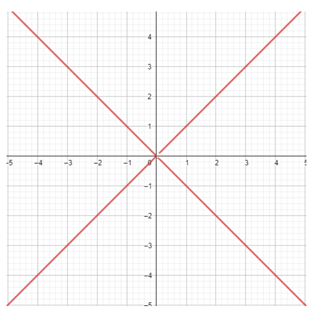
(2) Tenemos que

$$f(x,y)=0 \iff x^2-y^2=0 \iff x^2=y^2 \iff |x|=|y|$$

con lo que

$$\begin{gathered}
\text{si } x,y>0 \implies x=y \\
\text{si } x,y<0 \implies -x=-y \implies x=y \\
\text{si } x>0 \text{ y } y<0 \implies x=-y \\
\text{si } x<0 \text{ y } y>0 \implies -x=y
\end{gathered}$$

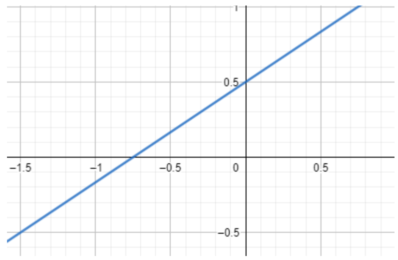
por lo que la curva algebraica será:



(3) Tenemos que

$$f(x,y)=0 \iff 2x-3y+1=0 \iff y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}$$

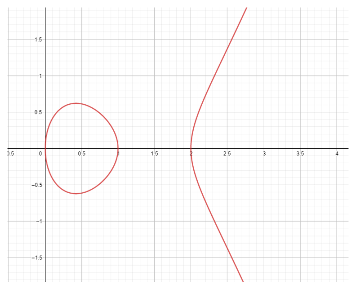
con lo que la curva algebraica es la recta que pasa por $(0,1/2)$ de pendiente $2/3$



(4) Tenemos que

$$f(x,y)=0 \iff y^2 - x(x-1)(x-2)=0 \iff y^2 = x(x-1)(x-2)$$
$$\iff y = \pm\sqrt{x(x-1)(x-2)}$$

por lo que la curva algebraica es



■

Problema 17. –

Ejercicio 17. *Muestra que el conjunto*

$$X = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}, x \neq 1\} \subset \mathbb{R}^2,$$

el cual es la linea recta $x = y$ sin el punto $(1,1)$. Muestra que no es una curva algebraica.(Ayuda: Muestra que si $f \in \mathbb{R}[x,y]$ se anula en X, entonces $f(1,1) = 0$. Para ello, considera el polinomio $g(t) = f(t,t)$ en $\mathbb{R}[t]$).

Demostración: Por contradicción supongamos que X es conjunto algebraico, entonces existe una familia $J \subseteq \mathbb{R}[x,y]$ tal que $V(J) = X$, así $\forall f \in J$ tendremos que $f(x,x) = 0,\ \forall (x,x) \neq (1,1)$.
Con lo anterior para cada $f \in J$ sea $g \in \mathbb{R}[t]$ dado por $g(t) = f(t,t)$, entonces $g(t) = f(t,t) = 0,\ \forall t \neq 1$, pero como g es un polinomio, es una función continua y por tanto

$$g(1) = \lim_{t\to 1} g(t)$$

pero como

$$\lim_{t\to 1^-} g(t) = \lim_{t\to 1^-} 0 = 0 = \lim_{t\to 1^+} 0 = \lim_{t\to 1^+} g(t) \Rightarrow g(1) = \lim_{t\to 1} g(t) = 0$$

por lo que $0 = g(1) = f(1,1)\quad \forall f \in J$, entonces $(1,1) \in V(J) = X$!!! pero esto es imposible, pues $(1,1) \notin X$, por tanto X no puede ser un conjunto algebraico.

■

Problema 21. –

Ejercicio 21. *Dado un polinomio $f \in K[x]$, encuentra una parametrización de la curva $V(y - f(x))$.*

Demostración: Tenemos que $(x, y) \in V(y - f(x)) \iff y - f(x) = 0 \iff y = f(x)$ entonces una parametrización será $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t, f(t))$.

■