MATEMÁTICAS

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Teoría Algebraica de Números

Tarea 1

CIENCIAS

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 1. –

(3 puntos) Sea $\alpha = [a_0, a_1, ...]$ un número irracional. Demuestra que:

(a) Si $0 < \alpha < 1$, entonces $a_0 = 0$ y da la fracción continua de $\frac{1}{\alpha}$.

(b) Si $\alpha > 1$, ¿cómo es la fracción continua de α? ¿Y la de $\frac{1}{\alpha}$?

(c) Si $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$, entonces $\alpha = [-1, 1, a_2, a_3, a_4, ...]$ y $\frac{1}{\alpha} = [-(a_2+2), 1, a_3 - 1, a_4, ...]$.

(d) Si $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$, entonces $\alpha = [-1, a_1, a_2, a_3, a_4, ...]$ con $a_1 \geq 2$, y $\frac{1}{\alpha} = [-2, 1, a_1 - 2, a_2, ...]$.

(e) Si $\alpha < -1$, entonces $\alpha = [a_0, a_1, a_2, ...]$ con $a_0 \leq -2$, y $\frac{1}{\alpha} = [-1, 1, -(a_0+2), 1, a_1 - 1, a_2, ...]$

Demostración: Recordemos que, por lo visto con el profesor en clase, para cualquier α irracional tendremos que $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\} = [\alpha] + \frac{1}{1/\{\alpha\}}$ esto pues $0 < \{\alpha\} < 1$, ya que si $\{\alpha\} = 0$ $\Rightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$ y no sería irracional, con esto $1/\{\alpha\} > 1$ entonces $\alpha = [\alpha] + \frac{1}{[1/\{\alpha\}] + \{1/\{\alpha\}\}}$ y nuevamente si pasara que $\{1/\{\alpha\}\} = 0 \Rightarrow 1/\{\alpha\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1/\{\alpha\} = n \Rightarrow \{\alpha\} = \frac{1}{n}$ y no sería irracional, entonces $0 < \{1/\{\alpha\}\} < 1$, con lo que

$$\alpha = [\alpha] + \cfrac{1}{[1/\{\alpha\}] + \cfrac{1}{[1/\{1/\{\alpha\}\}] + \{1/\{1/\{\alpha\}\}\}}}$$

siendo así $a_0 = [\alpha]$, $a_1 = [\frac{1}{\{\alpha\}}]$ y $a_2 = [\frac{1}{\{1/\{\alpha\}\}}]$, esto lo usaremos en los incisos.

(a) En efecto, dado un número real positivo $a_0 = [\alpha]$ y en este caso como $0 < \alpha < 1$ su parte entera es 0, es decir, $a_0 = 0$, entonces

$$\alpha = 0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 \cdots}} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 \cdots}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 \cdots}}} = a_1 + \frac{1}{a_2 \cdots} = [a_1, a_2, \ldots]$$

■

(*b*) Como $\alpha > 1$ tenemos que $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ con $a_0 \geq 1$. Y entonces

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{[a_0, a_1, \ldots]} = 0 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cdots}} = [0, a_0, a_1, \ldots]$$

■

(*c*) En este caso como $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ entonces $a_0 = [\alpha] = -1$, también como $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha] = \alpha + 1$ entonces $\frac{1}{2} < \{\alpha\} < 1$ con lo que $1 < \frac{1}{\{\alpha\}} < 2 \;\Rightarrow\; a_1 = [\frac{1}{\{\alpha\}}] = 1$ de esta manera $\alpha = [-1, 1, a_2, \ldots]$.

Ahora, desarrollando

$$\frac{1}{\alpha} = \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{[a_4, \ldots]}}}}} = \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\frac{a_3[a_4, \ldots] + 1}{[a_4, \ldots]}}}}} = \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{[a_4, \ldots]}{a_3[a_4, \ldots] + 1}}}}$$

$$= \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{a_2 a_3[a_4, \ldots] + a_2 + [a_4, \ldots]}{a_3[a_4, \ldots] + 1}}}} = \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{a_3[a_4, \ldots] + 1}{a_2 a_3[a_4, \ldots] + a_2 + [a_4, \ldots]}}}$$

$$= \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{\frac{a_2 a_3[a_4, \ldots] + a_2 + [a_4, \ldots] + a_3[a_4, \ldots] + 1}{a_2 a_3[a_4, \ldots] + a_2 + [a_4, \ldots]}}} = \cfrac{1}{-1 + \cfrac{a_2 a_3[a_4, \ldots] + a_2 + [a_4, \ldots]}{a_2 a_3[a_4, \ldots] + a_2 + [a_4, \ldots] + a_3[a_4, \ldots] + 1}}$$

$$= \cfrac{1}{\frac{-a_2 a_3[a_4, \ldots] - a_2 - [a_4, \ldots] - a_3[a_4, \ldots] - 1 + a_2 a_3[a_4, \ldots] + a_2 + [a_4, \ldots]}{a_2 a_3[a_4, \ldots] + a_2 + [a_4, \ldots] + a_3[a_4, \ldots] + 1}}$$

$$= \cfrac{1}{\frac{-a_3[a_4, \ldots] - 1}{a_2 a_3[a_4, \ldots] + a_2 + [a_4, \ldots] + a_3[a_4, \ldots] + 1}} = \frac{a_2 a_3[a_4, \ldots] + a_2 + [a_4, \ldots] + a_3[a_4, \ldots] + 1}{-a_3[a_4, \ldots] - 1}$$

$$= \frac{a_2\left(a_3[a_4,\ldots]+1\right)+[a_4,\ldots]+\left(a_3[a_4,\ldots]+1\right)}{-(a_3[a_4,\ldots]+1)} = a_2\left(-1\right)+\frac{[a_4,\ldots]}{-(a_3[a_4,\ldots]+1)}+\left(-1\right)$$
$$= -a_2+\frac{[a_4,\ldots]}{-(a_3[a_4,\ldots]+1)}-1$$

Por otro lado, tenemos que

$$-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(a_3-1)+\cfrac{1}{[a_4,\ldots]}}} = -1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{(a_3-1)[a_4,\ldots]+1}{[a_4,\ldots]}}} = -1+\cfrac{1}{1+\cfrac{[a_4,\ldots]}{(a_3-1)[a_4,\ldots]+1}}$$

$$= -1+\cfrac{1}{1+\cfrac{[a_4,\ldots]}{a_3[a_4,\ldots]-[a_4,\ldots]+1}} = -1+\cfrac{1}{\cfrac{a_3[a_4,\ldots]-[a_4,\ldots]+1+[a_4,\ldots]}{a_3[a_4,\ldots]-[a_4,\ldots]+1}} = -1+\cfrac{1}{\cfrac{a_3[a_4,\ldots]+1}{a_3[a_4,\ldots]-[a_4,\ldots]+1}}$$

$$= -1+\frac{a_3[a_4,\ldots]-[a_4,\ldots]+1}{a_3[a_4,\ldots]+1} = \frac{-a_3[a_4,\ldots]-1+a_3[a_4,\ldots]-[a_4,\ldots]+1}{a_3[a_4,\ldots]+1} = \frac{-[a_4,\ldots]}{a_3[a_4,\ldots]+1} = \frac{[a_4,\ldots]}{-a_3[a_4,\ldots]-1}$$

por lo que

$$\frac{1}{\alpha} = -a_2-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(a_3-1)+\cfrac{1}{[a_4,\ldots]}}}-1 = -(a_2+2)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(a_3-1)+\cfrac{1}{[a_4,\ldots]}}} = [-(a_2+2),1,a_3-1,a_4,\ldots]$$

■

(*d*) En este caso como $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$ entonces $a_0=[\alpha]=-1$, también como $\{\alpha\}=\alpha-[\alpha]=\alpha+1$ entonces $0<\{\alpha\}<\frac{1}{2}$ con lo que $2<\frac{1}{\{\alpha\}} \Rightarrow a_1=[\frac{1}{\{\alpha\}}]\geq 2$ de esta manera $\alpha=[-1,a_1,a_2,\ldots]$ con $a_1\geq 2$.

Ahora, desarrollando

$$\frac{1}{\alpha} = \cfrac{1}{-1+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{[a_2,\ldots]}}} = \cfrac{1}{-1+\cfrac{1}{\cfrac{a_1[a_2,\ldots]+1}{[a_2,\ldots]}}} = \cfrac{1}{-1+\cfrac{[a_2,\ldots]}{a_1[a_2,\ldots]+1}} = \cfrac{1}{\cfrac{-a_1[a_2,\ldots]-1+[a_2,\ldots]}{a_1[a_2,\ldots]+1}}$$

$$= \frac{a_1[a_2,\ldots]+1}{-a_1[a_2,\ldots]-1+[a_2,\ldots]} = -2+2+\frac{a_1[a_2,\ldots]+1}{-a_1[a_2,\ldots]-1+[a_2,\ldots]} = -2+\frac{-2a_1[a_2,\ldots]-2+2[a_2,\ldots]+a_1[a_2,\ldots]+1}{-a_1[a_2,\ldots]-1+[a_2,\ldots]}$$

$$= -2 + \frac{-a_1[a_2,\ldots]-1+2[a_2,\ldots]}{-a_1[a_2,\ldots]-1+[a_2,\ldots]} = -2 + \frac{1}{\frac{-a_1[a_2,\ldots]-1+[a_2,\ldots]}{-a_1[a_2,\ldots]-1+2[a_2,\ldots]}} = -2 + \frac{1}{1-1+\frac{-a_1[a_2,\ldots]-1+[a_2,\ldots]}{-a_1[a_2,\ldots]-1+2[a_2,\ldots]}}$$

$$= -2 + \frac{1}{1+\frac{a_1[a_2,\ldots]+1-2[a_2,\ldots]-a_1[a_2,\ldots]-1+[a_2,\ldots]}{-a_1[a_2,\ldots]-1+2[a_2,\ldots]}} = -2 + \frac{1}{1+\frac{-[a_2,\ldots]}{-a_1[a_2,\ldots]-1+2[a_2,\ldots]}}$$

$$= -2 + \frac{1}{1+\frac{1}{a_1+\frac{1}{[a_2,\ldots]}-2}} = -2 + \frac{1}{1+\frac{1}{(a_1-2)+\frac{1}{[a_2,\ldots]}}} = [-2, 1, a_1-2, a_2, \ldots]$$

∎

(e) En este caso

∎

Problema 2. –

(1 punto) Calcula la fracción continua de los siguientes números:

a. $\frac{972}{421}$
b. $\frac{1}{\sqrt{19}-4}$
c. $\sqrt{62}$

Solución:

(a) Tenemos que

$$\frac{972}{421} = 2 + \frac{130}{421} = 2 + \frac{1}{\frac{421}{130}} = 2 + \frac{1}{3+\frac{31}{130}} = 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{\frac{130}{31}}} = 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{6}{31}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{31}{6}}}} = 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{6}}}} = [2, 3, 4, 5, 6]$$

∎

(b) Tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{19}-4} = \frac{\sqrt{19}+4}{19-16} = \frac{\sqrt{19}+4}{3} = 2 + [\frac{\sqrt{19}+4}{3} - 2] = 2 + \frac{\sqrt{19}-2}{3} = 2 + \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{19}-2}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1+[\frac{3}{\sqrt{19}-2}-1]} = 2 + \frac{1}{1+\frac{5-\sqrt{19}}{\sqrt{19}-2}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{\sqrt{19}-2}{5-\sqrt{19}}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{3+[\frac{\sqrt{19}-2}{5-\sqrt{19}}-3]}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4\sqrt{19} - 17}{5 - \sqrt{19}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{5 - \sqrt{19}}{4\sqrt{19} - 17}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + [\cfrac{5 - \sqrt{19}}{4\sqrt{19} - 17} - 1]}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{22 - 5\sqrt{19}}{4\sqrt{19} - 17}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{4\sqrt{19} - 17}{22 - 5\sqrt{19}}}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + [\cfrac{4\sqrt{19} - 17}{22 - 5\sqrt{19}} - 2]}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{14\sqrt{19} - 61}{22 - 5\sqrt{19}}}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{22 - 5\sqrt{19}}{14\sqrt{19} - 61}}}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8 + [\cfrac{22 - 5\sqrt{19}}{14\sqrt{19} - 61} - 8]}}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{510 - 117\sqrt{19}}{14\sqrt{19} - 61}}}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8 + (\sqrt{19} - 4)}}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{19} - 4}}}}}}}$$

por lo tanto $\dfrac{1}{\sqrt{19} - 4} = [\overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$

■

(c) Tenemos que

$$\sqrt{62} = 7 + (\sqrt{62} - 7) = 7 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{62} - 7}} = 7 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{62} + 7}{13}} = 7 + \cfrac{1}{1 + [\cfrac{\sqrt{62} + 7}{13} - 1]} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{62} - 6}{13}}$$

$$= 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{13}{\sqrt{62} - 6}}} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{13(\sqrt{62} + 6)}{26}}} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{62} + 6}{2}}} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{\sqrt{62}}{2}}}$$

$$= 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + [\frac{\sqrt{62}}{2} - 3]}} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \frac{\sqrt{62} - 6}{2}}} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\frac{2}{\sqrt{62} - 6}}}} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\frac{2(\sqrt{62} + 6)}{26}}}}$$

$$= 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\frac{\sqrt{62} + 6}{13}}}} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + [\frac{\sqrt{62} + 6}{13} - 1]}}} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \frac{\sqrt{62} - 7}{13}}}} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{13}{\sqrt{62} - 7}}}}}$$

$$= 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{13(\sqrt{62} + 7)}{13}}}}} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \sqrt{62}}}}} = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + 7 + (\sqrt{62} - 7)}}}}$$

$$= 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{14 + (\sqrt{62} - 7)}}}}$$

por lo tanto $\sqrt{62} = [7, 1, 6, 1, 14]$.

■

Problema 3. –

(2 puntos)Encuentra dos números racionales $\frac{a}{b}$ tales que

$$\left|\sqrt{2} - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}b^2}$$

Solución: Sabemos que $\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$, entonces

$$h_{-2} = 0,\ h_{-1} = 1,\ h_0 = 1 \cdot 1 + 0 = 1 \ \text{ y } \ h_n = 2h_{n-1} + h_{n-2}$$

y también

$$k_{-2} = 1,\ k_{-1} = 0,\ k_0 = 1 \cdot 0 + 1 = 1 \ \text{ y } \ k_n = 2k_{n-1} + k_{n-2}$$

Entonces tendremos que

$$h_1 = 2h_0 + h_{-1} = 2(1) + 1 = 3 \ \text{ y } \ k_1 = 2k_0 + k_{-1} = 2(1) + 0 = 2$$
$$h_2 = 2h_1 + h_0 = 2(3) + 1 = 7 \ \text{ y } \ k_2 = 2k_1 + k_0 = 2(2) + 1 = 5$$

y entonces tenemos que al tomar $a = h_2$ y $b = k_2$

$$\left|\sqrt{2} - \frac{7}{5}\right| \approx 0.014213562... < 0.017888543... = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 5^2}$$

■

Problema 4. –

(2 puntos)Supongamos que $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ son tales que los primeros n convergentes de ambos números coinciden. Demuestra que las fracciones continuas de ambos números coinciden hasta el n-ésimo coeficiente, es decir, hasta a_n.

Demostración: Sea $\alpha = [a_0, a_1, ...]$ y $\beta = [b_0, b_1, ...]$. Por inducción sobre n.

Si coinciden en el primer convergente $a_0 = b_0$, entonces las fracciones continuas coinciden hasta el primer coeficiente. Supongamos que se cumple para $n > 1$, entonces tenemos los convergentes coinciden hasta el $n+1$, en particular coincidirán en los primeros n y por H.I las fracciones continuas coinciden hasta el n-ésimo termino, es decir $a_k = b_k \ \forall 0 \le k \le n-1$, y finalmente tendremos que el $n+1$ convergente coinciden, es decir,

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\vdots + \cfrac{1}{a_n}}} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{\vdots + \cfrac{1}{b_n}}} \Rightarrow \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\vdots + \cfrac{1}{a_n}}} = \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{\vdots + \cfrac{1}{b_n}}} \Rightarrow a_1 + \cfrac{1}{\vdots + \cfrac{1}{a_n}} = b_1 + \cfrac{1}{\vdots + \cfrac{1}{b_n}}$$

$$\Rightarrow \cfrac{1}{\vdots + \cfrac{1}{a_n}} = \cfrac{1}{\vdots + \cfrac{1}{b_n}} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \frac{1}{a_n} = \frac{1}{b_n} \Rightarrow a_n = b_n$$

por lo que las fracciones continuas coinciden hasta el $n+1$ coeficiente.

■

Problema 5. –

(1 punto)Encuentra los valores de las siguientes fracciones continuas:

a. $[2, 2, 2, 2, 2, ...]$
b. $[1, 3, 1, 2, 1, 2, ...]$
c. $[2, 1, 2, 1, 2, 1, ...]$

Solución:

(a) Ya sabemos que $\sqrt{2} = [1, \overline{2}] \Rightarrow \sqrt{2} + 1 = [2, \overline{2}] = [\overline{2}]$.

■

(*b*) Sea $x = [1,3,1,2,1,2,\ldots] = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x}}}}}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{x}{2x+1}}}}}$

$= 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2x+1}{3x+1}}}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3x+1}{8x+3}}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{8x+3}{11x+4}} = 1 + \frac{11x+4}{41x+15} = \frac{52x+19}{41x+15}$ entonces

$x = \frac{52x+19}{41x+15} \Rightarrow 41x^2 + 15x = 52x + 19 \Rightarrow 41x^2 - 37x - 19$

$$\Rightarrow x = \frac{37 + \sqrt{37^2 - 4(41)(-19)}}{2(41)} = \frac{37 + \sqrt{4485}}{82}$$

por lo tanto $[1,3,1,2,1,2,\ldots] = \frac{37 + \sqrt{4485}}{82}$

■

(*c*) Sea $x = [\overline{2,1}] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{x+1}{x}} = 2 + \frac{x}{x+1} = \frac{2x+2+x}{x+1} \Rightarrow x^2 + x = 3x + 2$, entonces

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \underset{x>0}{\Rightarrow} x = \frac{2 + \sqrt{4 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

por lo tanto $[\overline{2,1}] = 1 + \sqrt{3}$.

■

Problema 6. –

(2 puntos)Encuentra todas las soluciones para la ecuación $x^2 - 19y^2 = 1$.

Solución: Tenemos que 19 es no cuadrado y, además

$$\sqrt{19} = 4 + (\sqrt{19} - 4) = 4 + \cfrac{2}{\cfrac{1}{\sqrt{19} - 4}} \underset{2b)}{=} 4 + \frac{2}{[\overline{2,1,3,1,2,8}]} = [4, \overline{2,1,3,1,2,8}]$$

entonces tiene periodo de longitud 6, siendo 6 un numero par. Entonces por lo visto en clase tendremos que la ecuación $x^2 - 19y^2 = 1$ tiene como soluciones a (h_{6m-1}, k_{6m-1}) donde $\frac{h_n}{k_n}$ es el n-ésimo convergente.

Ahora calculemos los convergentes, tenemos que

$$h_{-2} = 0,\ h_{-1} = 1 \text{ y } h_n = a_n h_{n-1} + h_{n-2}$$
$$\text{y también}$$
$$k_{-2} = 1,\ k_{-1} = 0 \text{ y } k_n = a_n k_{n-1} + k_{n-2}$$

entonces

$$h_0 = 4 \cdot 1 + 0 = 4 \text{ y } k_0 = 4 \cdot 0 + 1 = 1$$
$$h_1 = a_1 h_0 + h_{-1} = 2(4) + 1 = 9 \text{ y } k_1 = a_1 k_0 + k_{-1} = 2(1) + 0 = 2$$
$$h_2 = a_2 h_1 + h_0 = 1(9) + 4 = 13 \text{ y } k_2 = a_2 k_1 + k_0 = 1(2) + 1 = 3$$
$$h_3 = a_3 h_2 + h_1 = 3(13) + 9 = 48 \text{ y } k_3 = a_3 k_2 + k_1 = 3(3) + 2 = 11$$
$$h_4 = a_4 h_3 + h_2 = 1(48) + 13 = 61 \text{ y } k_4 = a_4 k_3 + k_2 = 1(11) + 3 = 14$$
$$h_5 = a_5 h_4 + h_3 = 2(61) + 48 = 170 \text{ y } k_5 = a_5 k_4 + k_3 = 2(14) + 11 = 39$$

Por lo que la solución positiva más pequeña es $(h_5, k_5) = (170, 39)$, por lo tanto, por lo visto en clase todas las soluciones vienen dadas por

$$X_n = \frac{(170 + 39\sqrt{19})^n + (170 - 39\sqrt{19})^n}{2}$$
$$Y_n = \frac{(170 + 39\sqrt{19})^n + (170 - 39\sqrt{19})^n}{2\sqrt{19}}$$

■

Problema 7. –

(2 puntos)Encuentra todas las soluciones para la ecuación $x^2 - 13y^2 = 17$

Solución: Consideremos los sig:

•) Una solución de $x^2 - 13y^2 = 17$ es $(375, 104)$.

•) Encontremos la solución positiva más chica de $x^2 - 13y^2 = 1$. Tenemos que $\sqrt{13} = [3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$ y al tener periodo impar 5 tendremos que las soluciones de la ecuación vendrán dadas por $(h_{2\cdot 5\cdot m-1}, k_{2\cdot 5\cdot m-1}) = (h_{10m-1}, k_{10m-1})$ con $m \geq 1$, entonces la solución positiva más chica es (h_9, k_9), calculémosla usando que

$$a_0 = 3,\ a_1, a_2, a_3, a_4 = 1,\ a_5 = 6,\ a_6, a_7, a_8, a_9 = 1$$

Ahora calculemos los convergentes, tenemos que

$$h_{-2} = 0,\ h_{-1} = 1 \text{ y } h_n = a_n h_{n-1} + h_{n-2}$$
$$\text{y también}$$
$$k_{-2} = 1,\ k_{-1} = 0 \text{ y } k_n = a_n k_{n-1} + k_{n-2}$$

entonces

$$h_0 = a_0 \cdot h_{-1} + h_{-2} = 3(1) + 0 = 3 \text{ y } k_0 = a_0 \cdot k_{-1} + k_{-2} = (3)(0) + 1 = 1$$
$$h_1 = a_1 h_0 + h_{-1} = 1(3) + 1 = 4 \text{ y } k_1 = a_1 k_0 + k_{-1} = 1(1) + 0 = 1$$
$$h_2 = a_2 h_1 + h_0 = 1(4) + 3 = 7 \text{ y } k_2 = a_2 k_1 + k_0 = 1(1) + 1 = 2$$
$$h_3 = a_3 h_2 + h_1 = 1(7) + 4 = 11 \text{ y } k_3 = a_3 k_2 + k_1 = 1(2) + 1 = 3$$
$$h_4 = a_4 h_3 + h_2 = 1(11) + 7 = 18 \text{ y } k_4 = a_4 k_3 + k_2 = 1(3) + 2 = 5$$
$$h_5 = a_5 h_4 + h_3 = 6(18) + 11 = 119 \text{ y } k_5 = a_5 k_4 + k_3 = 6(5) + 3 = 33$$
$$h_6 = a_6 h_5 + h_4 = 1(119) + 18 = 137 \text{ y } k_6 = a_6 k_5 + k_4 = 1(33) + 5 = 38$$
$$h_7 = a_7 h_6 + h_5 = 1(137) + 119 = 256 \text{ y } k_7 = a_7 k_6 + k_5 = 1(38) + 33 = 71$$
$$h_8 = a_8 h_7 + h_6 = 1(256) + 137 = 393 \text{ y } k_8 = a_8 k_7 + k_6 = 1(71) + 38 = 109$$
$$h_9 = a_9 h_8 + h_7 = 1(393) + 256 = 649 \text{ y } k_9 = a_9 k_8 + k_7 = 1(109) + 71 = 180$$

por lo que la solución mas chica de $x^2 - 13y^2 = 1$ es $(649, 180)$.

Con los dos incisos anteriores tendremos que una familia de soluciones viene dada por x_n, y_n en

$$x_n + y_n\sqrt{13} = (375 + 104\sqrt{13})(649 + 180\sqrt{13})^n$$

sin embargo, sabemos que al ser $(649,180)$ la solución mas chica de $x^2 - 13y^2 = 1$, todas sus soluciones vienen dadas por $z_n + w_n\sqrt{13} = (649 + 180\sqrt{13})^n$, para los cuales sabemos que

$$z_n = \frac{(649 + 180\sqrt{13})^n + (649 - 180\sqrt{13})^n}{2}$$
$$w_n = \frac{(649 + 180\sqrt{13})^n + (649 - 180\sqrt{13})^n}{2\sqrt{19}}$$

por lo tanto $x_n + y_n\sqrt{13} = (375+104\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^n = (375+104\sqrt{13})(z_n + w_n\sqrt{13})$
$= (375z_n + 1352w_n) + (375w_n + 104z_n)\sqrt{13}$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_n &= 375z_n + 1352w_n \\ y_n &= 375w_n + 104z_n \end{aligned} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} z_n &= \frac{(649+180\sqrt{13})^n + (649-180\sqrt{13})^n}{2} \\ w_n &= \frac{(649+180\sqrt{13})^n + (649-180\sqrt{13})^n}{2\sqrt{19}} \end{aligned}$$

$\blacksquare$