Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Teoría Algebraica de Números

Tarea 2

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Notación: $\Lambda = \{a \in \mathbb{C} : \exists p(x) \in \mathbb{Q}[x] \backslash \{0\} \text{ t.q } p(a) = 0\}$

Problema 1. –

Demuestra que si α es algebraico y r es racional entonces α^r es algebraico.

Demostración: Como $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq 0$ y $(n,m) = 1$ tal que $r = \frac{n}{m}$, y notemos que al ser Λ un campo (visto en clase) se tiene que de manera inmediata que $\alpha^n \in \Lambda$ por lo que existe $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $p(\alpha^n) = 0$. Con lo anterior sea $q(x) = p(x^m)$ y veamos que este es el polinomio buscado. En efecto se tiene que $q(\alpha^r) = p((\alpha^r)^m) = p((\alpha^{n/m})^m) = p(\alpha^n) = 0$, por tanto $\alpha^r \in \Lambda$.

$\blacksquare$

Problema 2. –

Demuestra que si α es trascendente y $r \neq 0$ es racional entonces α^r es trascendente.

Demostración: Por contradicción supongamos que $\alpha^r \in \Lambda$, entonces como $\frac{1}{r} \in \mathbb{Q}$ (pues $r \neq 0$) tendremos por el problema 1 que $\alpha = (\alpha^r)^{1/r} \in \Lambda$!!! pero esto contradice que $\alpha \notin \Lambda$.

$\blacksquare$

Problema 3. –

(2 puntos) Sean α y β son dos complejos relacionados por $P(\alpha) = Q(\beta)$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios no constantes en $\mathbb{Q}[x]$, demuestra que α es algebraico si y sólo si β es algebraico.

Demostración:

Problema 4. –

(3 puntos) Sean $T_n(x)$ la familia de polinomios dados por $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ y $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$. Demuestra que $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$. Demuestra que $\cos(r\pi)$ es algebraico para todo r racional.

Demostración: Por inducción fuerte sobre n. El caso base es trivial, supongamos pues que es valido para algún $n > 0$, entonces tendremos que

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)T_n(\cos(\theta)) - T_{n-1}(\cos(\theta)) \underset{\text{H.I}}{=} 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) \\ &= 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos(n\theta - \theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \sin(\theta)\sin(n\theta) - \cos(\theta)\cos(n\theta) \\ &= \cos(\theta)\cos(n\theta) - \sin(\theta)\sin(n\theta) = \cos(n\theta + \theta) = \cos((n+1)\theta) \end{aligned}$$

por lo tanto, por inducción fuerte queda demostrado.

Ahora, sea $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^+$ con $m \neq 0$ y $(n,m) = 1$ tal que $r = \frac{n}{m}$, entonces considerando el polinomio $p(x) = T_{2m}(x) - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ tendremos que

$$p(\cos(r\pi)) = T_{2m}(\cos(r\pi)) - 1 \underset{\text{anterior}}{=} \cos(2mr\pi) - 1 = \cos(2n\pi) - 1 = 0$$

por lo tanto $\cos(r\pi) \in \Lambda \ \forall r \in \mathbb{Q}$.

■

Problema 5. –

Muestra que 2 es producto de dos primos asociados en $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$. Muestra que 3 también lo es.

Demostración:

Como queremos verlos como producto de primos asociados necesitamos saber cuales son las unidades de $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$. Sea $x + iy \in \mathbb{Q}(\sqrt{6})$ unidad, entonces por lo visto en clase $N(x+iy) = \pm 1$, por lo que $x^2 - 6y^2 = \pm 1$ y como $\sqrt{6} = [2; \overline{2,4}]$ tiene periodo par, entonces la ecuación $x^6 - 6y^2 = -1$ no tiene solución y la ecuación $x^2 - 6y^2 = 1$ si tiene, que inmediatamente podemos ver que una es $x = 5$ y $y = 2$, por lo que $5 + 2\sqrt{6}$ es unidad en $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$.

• Ahora, veamos si $2 = \pi_1 \cdot \pi_2$ con π_i primo y $\pi_2 \sim \pi_1$ tal que $\pi_2 = (5 + 2\sqrt{6})\pi_1$ por lo que solo necesitamos encontrar π_1 primo tal que $2 = (5 + 2\sqrt{6})\pi^2$, consideremos $\pi = a + b\sqrt{6}$, entonces

$$2 = (5+2\sqrt{6})(a+b\sqrt{6})^2 = (5+2\sqrt{6})(x+y\sqrt{6}) = 5x + 12y + (2x+5y)\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 5x + 12y = 2 \\ 2x + 5y = 0 \end{matrix} \Rightarrow x = 10 \text{ y } y = -4$$

entonces

$$10 - 4\sqrt{6} = (a+b\sqrt{6})^2 = a^2 + 6b^2 + (2ab)\sqrt{6} \Rightarrow 2ab = -4 \Rightarrow ab = -2$$

y una solución es $a = 2$ y $b = -1$ por lo que

$$2 = (5+2\sqrt{6})(2-\sqrt{6})^2$$

y únicamente falta ver que $2 - \sqrt{6}$ es primo, pero como $\left|N(2-\sqrt{6})\right| = 2$ es primo, entonces $2 - \sqrt{6}$ es primo.

• Ahora, veamos si $3 = \pi_1 \cdot \pi_2$ con π_i primo y $\pi_2 \sim \pi_1$ tal que $\pi_2 = (5 + 2\sqrt{6})\pi_1$ por lo que solo necesitamos encontrar π_1 primo tal que $3 = (5 + 2\sqrt{6})\pi^2$, consideremos $\pi = a + b\sqrt{6}$, entonces

$$3 = (5+2\sqrt{6})(a+b\sqrt{6})^2 = (5+2\sqrt{6})(x+y\sqrt{6}) = 5x + 12y + (2x+5y)\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 5x + 12y = 3 \\ 2x + 5y = 0 \end{matrix} \Rightarrow x = 15 \text{ y } y = -6$$

entonces

$$15-6\sqrt{6}=(a+b\sqrt{6})^2=a^2+6b^2+(2ab)\sqrt{6} \;\Rightarrow\; 2ab=-6 \;\Rightarrow\; ab=-3$$

y una solución es $a=3$ y $b=-1$ por lo que

$$3=(5+2\sqrt{6})(3-\sqrt{6})^2$$

y únicamente falta ver que $3-\sqrt{6}$ es primo, pero como $\left|N(3-\sqrt{6})\right|=3$ es primo, entonces $2-\sqrt{6}$ es primo.

■

Problema 6. –

Resuelve la ecuación $x^2+2=y^3$ en los enteros.

Demostración: Primero simplifiquemos el problema como lo hecho en clase.

• Tenemos que $(x,2,y)\leq 2$, por lo que si $(x,2,y)=2$ entonces $(\frac{x}{2},2,\frac{y}{2})$ también es solución de la ecuación, por lo que podemos considerar $(x,2,y)=1$, entonces x y y no pueden ser pares al mismo tiempo.

• Supongamos que $d=(x,y)$ entonces $d\mid x$ y $d\mid y \;\Rightarrow\; d\mid x^2$ y $d\mid y^3 \;\Rightarrow\; d\mid y^3-x^3=2$ por lo que $d\mid 2 \;\Rightarrow\; d=1$ o $d=2$, pero $d\neq 2$ pues x y y no son pares la mismo tiempo entonces $d=1$, por lo que también podemos suponer que $(x,y)=1$.

• Además si x es par, entonces x^2+2 es par por lo que y^3 es par, y esto solo es posible si y es par, pero esto no puede pasar pues no pueden ser pares al mismo tiempo, entonces x es impar, por lo que x^2+2 es impar y así y^3 es impar, es decir, y es impar.

En resumen, queremos encontrar soluciones enteras para $x^2+2=y^3$ con $(x,y)=1$ y x,y impares.

Ahora, tenemos que $x^2+2=y^3 \;\Leftrightarrow\; (x-\sqrt{-2})(x+\sqrt{-2})=y^3$. Ahora sea $d=(x-\sqrt{-2},x+\sqrt{-2})$, entonces $d\mid 2x$ y $d\mid 2\sqrt{-2}$ (sumando y restando $x-\sqrt{2}$ y $x+\sqrt{2}$) entonces $d\mid 2x$ y $d\mid 2\sqrt{2}i \;\Rightarrow\; d\mid 2x$ y $d\mid 2\sqrt{2}$ por lo que $d\mid 2x+2\sqrt{2} \;\Rightarrow d\mid 2$ pero como $2=-i(1+i)^2$ entonces

$$d\sim\begin{cases}1\\1+i\\(1+i)^2\sim 2\end{cases}$$

entonces veamos que podemos descartar dos casos:

• Si $d\sim(1+i)^2\sim 2$ entonces como $d\mid x+\sqrt{-2}=x+2\sqrt{2}i \;\Rightarrow\; 2\mid x+2\sqrt{2}i$ y como $2\mid 2\sqrt{2}i$ entonces $2\mid x$!!! pero no es posible pues x es impar.

$\bullet$ Si $d \sim 1+i$ entonces $N(d) \mid N(x+\sqrt{-2}) \Rightarrow N(1+i) \mid N(x+\sqrt{-2}) \Rightarrow 2 \mid x^2+2$ ¡!! pero no es posible, pues como x es impar entonces x^2+2 es impar.

Por lo que la única opción es que $d \sim 1$ y por tanto (por la factorización unica) como $(x+\sqrt{-2})(x-\sqrt{-2}) = y^3$ y $d \sim 1$ entonces $(x+\sqrt{-2}) = u(r+s\sqrt{-2})^3$ y $(x-\sqrt{-2}) = \overline{u}(r-s\sqrt{-2})^3$ con u unidad y $r,s \in \mathbb{Z}$.

Si $u=1$, entonces

$$x+\sqrt{-2} = (r+s\sqrt{-2})^3 \quad \Rightarrow x+\sqrt{-2} = r^3+3r^2s\sqrt{-2}+3s^2(-2)r+s^3(-2)\sqrt{-2}$$

$$\Rightarrow x+\sqrt{-2} = r^3+3r^2s\sqrt{-2}-6s^2r-2s^3\sqrt{-2} \quad \Rightarrow x+\sqrt{-2} = r^3-6s^2r+[3r^2s-2s^3]\sqrt{-2}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x = r^3-6s^2r \\ 1 = 3r^2s-2s^3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad 1 = s(3r^2-2s^2) \quad \Rightarrow \quad s = \pm 1$$

pero si $s=-1$ entonces $1 = -3r^2+2 \Rightarrow$ -$3r^2 = -1$!! no hay solución, entonces $s=1 \Rightarrow 1 = 3r^2-2 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm 1$ y entonces

$*$ Con $r=1$ tendremos que $x=-5 \Rightarrow 25+2 = y^3 \Rightarrow y=3$
$*$ Con $r=-1$ tendremos que $x=5 \Rightarrow 25+2 = y^3 \Rightarrow y=3$

Por lo tanto, las únicas soluciones son $(5,3)$ y $(-5,3)$. Esto pues sabemos que con $u=-1,i,-i$ obtendremos las mismas soluciones.

■

Problema 7. –
Resuelve la ecuación $x^2+y^2=5z^2$ en los enteros.

Demostración: Primero simplifiquemos el problema como lo hecho en clase.
$\bullet$ Tenemos que si $d=(x,y,z)$, entonces $(\frac{x}{d},\frac{y}{d},\frac{z}{d})$ también es solución de la ecuación, por lo que podemos considerar $(x,y,z)=1$.

$\bullet$ Supongamos que $\exists p$ primo tal que $p \mid x$ y $p \mid y$ entonces $p^2 \mid x^2$ y $p^2 \mid y^2 \Rightarrow p^2 \mid x^2+y^2 = 5z^2$ por lo que $p^2 \mid 5z^2 \Rightarrow p^2 \mid z^2$ (pues no hay ningún primo al cuadrado que divida a 5) por lo que $p^2 \mid z^2$ y como p es primo, entonces $p \mid z$!!! pero esto no es posible pues $(x,y,z)=1$ por lo que x,y y z son primos relativos por pares.

$\bullet$ Como son primos relativos por pares, entonces o son todos impares o solo hay un par.
Si x,y y z fueran impares entonces x^2+y^2 es par $\Rightarrow 5z^2$ par !!! pero esto no es posible, por lo que no puede pasar que todos sean impares. Entonces uno de los tres números es par.

Ahora, tenemos que $x^2+y^2=5z^2 \Leftrightarrow (x-iy)(x+iy)=5z^2$, (entonces trabajaremos en $\mathbb{Z}[i]$) además tenemos que $5=(2+i)(2-i)$ por lo que $2+i \mid 5 \Rightarrow 2+i \mid 5z^2 \Rightarrow 2+i \mid (x-iy)(x+iy)$ pero como $2+i$ es primo, entonces $2+i \mid x-iy$ o $2+i \mid x+iy$. Supongamos sin perdida de generalidad que $2+i \mid x+iy \Rightarrow 2-i \mid x-iy$ y entonces

$$x^2+y^2=5z^2 \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{5}=z^2 \Rightarrow \frac{(x+iy)(x-iy)}{(2+i)(2-i)}=z^2$$
$$\Rightarrow \frac{x+iy}{2+i}\cdot\frac{x-iy}{2-i}=z^2$$

con $(\frac{x+iy}{2+i},\frac{x-iy}{2-i})=1$ por lo que $\frac{x+iy}{2+i}=u(r+si)^2$ y $\frac{x-iy}{2-i}=\overline{u}(r-si)^2$ par u unidad y $r,s\in\mathbb{Z}$, con lo que

Si $u=1$, entonces

$$\frac{x+iy}{2+i}=(r+si)^2 \Rightarrow x+iy=(2+i)(r^2-s^2+2rsi)=(2r^2-2s^2-2rs)+(r^2-s^2+4rs)i$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} x=2(r^2-s^2-rs) \\ y=r^2-s^2+4rs \end{matrix} \Rightarrow z^2=\frac{x^2+y^2}{5}=\frac{[2(r^2-s^2-rs)]^2+[r^2-s^2+4rs]^2}{5}$$
$$=\frac{(4r^4-8r^3s-4r^2s^2+8rs^3+4s^4)+(r^4+8r^3s+14r^2s^2-8rs^3+s^4)}{5}$$
$$=\frac{5r^4+10r^2s^2+5s^4}{5}=r^4+2r^2s^2+s^4=(r^2+s^2)^2 \Rightarrow z=\pm(r^2+s^2)$$

por lo que las soluciones son (tomando en cuenta las negativas pues el signo se va al elevar al cuadrado)

$$x=\pm(2r^2-2s^2-2rs)$$
$$y=\pm(r^2-s^2+4rs)$$
$$z=\pm(r^2+s^2)$$

■