Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Análisis Matemático I

Examen Sucesiones y Completez

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

• Problema 1. –
Sea $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de Cauchy. Demuestre que $\{a_n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ también es una sucesión de Cauchy. ¿El reciproco será cierto? Es decir, si la sucesión $\{a_n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ es de Cauchy, ¿se cumple que $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ también es de Cauchy? Demuéstrelo o dé un contraejemplo.

Demostración:
Observación. – Sea $f : I \subseteq (\mathbb{R}, |\ |) \to (\mathbb{R}, |\ |)$, con $f(x) = x^2$, donde I es el intervalo cerrado tal que $a_n \in I,\ \forall n$ el cual existe ya que como a_n es de Cauchy en $\mathbb{R}$ converge, y por tanto, es acotada. Además f es diferenciable en I y $|f'(x)| = |2x| = 2|x| < 2M$ con $M = \max_{x \in I}\{x\}$, este ultimo existe pues la identidad es continua. Con todo esto, por un teorema visto en clase f es Lipschitz continua en $(\mathbb{R}, |\ |)$.

Con esto supongamos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}, |\ |)$, como f es Lipschitz tendremos que $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n{}^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\mathbb{R}, |\ |)$ (por teorema visto en clase). ■

• Problema 2. –
Sea $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión que satisface que

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| < c^2 |a_{n+1} - a_n|$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ con $0 < c < 1$. Muestre que $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de Cauchy.

Demostración:
Observación. – Sea $f : I \subseteq (\mathbb{R}, |\ |) \to (\mathbb{R}, |\ |)$, con $f(x) = x^2$, donde I es el intervalo cerrado tal que $a_n \in I,\ \forall n$ el cual existe ya que como a_n es de Cauchy en $\mathbb{R}$ converge, y por tanto, es acotada. Además f es diferenciable en I y $|f'(x)| = |2x| = 2|x| < 2M$ con $M = \max_{x \in I}\{x\}$, este ultimo

existe pues la identidad es continua. Con todo esto, por un teorema visto en clase f es Lipschitz continua en $(\mathbb{R}, |\ |)$.

Con esto supongamos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}, |\ |)$, como f es Lipschitz tendremos que $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n{}^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\mathbb{R}, |\ |)$ (por teorema visto en clase). ■