Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Análisis matemático I

Examen continuidad

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 1. – *Sea* $D = \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *un subconjunto numerable de* $\mathbb{R}$. *Demuestra que la función* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dada por*

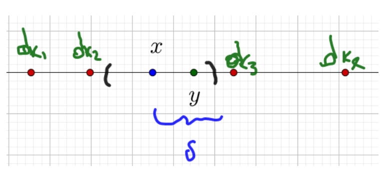
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin D \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } x = d_n \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R} - D$ *y es discontinua en cualquier punto de* D.

Demostración:

- Sea $x \in \mathbb{R} - D$. PD f es continua en x. Sea $\varepsilon > 0$ PD $\exists\delta > 0$ tal que $\forall y$ con $d(x,y) < \delta$ se tiene que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Por la propiedad arquimediana sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, con lo que podemos considerar a $\delta = \frac{1}{2}\min\limits_{1\le k\le n}\left\{d(x,d_k)\right\}$ (esto es pues por "conveniencia" necesitamos una delta que nos dé una vecindad de x donde ninguna y dentro de ella sea un d_k).



En efecto, sea $y \in \mathbb{R}$ tal que $d(x,y) < \delta$, si $y \in D$ entonces $y = d_m$ para alguna $m \in \mathbb{N}$, mas aun, podemos comprobar que $m > n$, esto pues si pasara que $m = k$ para algún $1 \le k \le n$ entonces $d(x,y) = d(x,d_k) < \delta$ pero esto es absurdo por la elección de la delta, entonces necesariamente $m > n$ y con ello tendremos que $d(f(x), f(y)) = d(0, \frac{1}{m+1}) = \left|\frac{1}{m+1}\right| < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Por otro lado, si $y \notin D$ entonces $d(f(x), f(y)) = d(0,0) = 0 < \varepsilon$. En cualquiera de los dos casos tenemos que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ por lo tanto f es continua en x $\therefore$ f es continua en $\mathbb{R} - D$.

• Sea $x \in D$. PD f no es continua en x. PD $\exists \varepsilon > 0$ y $y \in \mathbb{R}$ tal que $\forall \delta > 0$ con $d(x, y) < \delta$ se tiene que $d(f(x), f(y)) > \varepsilon$.

Como $x \in D$ entonces $x = d_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{n+2}$ y veamos que esta es la buscada. Primero notemos que $\forall \delta > 0$ existe $y \in \mathbb{R} - D$ tal que $d(x, y) < \delta$, esto es por la densidad de los reales. Con ello tendremos que $d(f(x), f(y)) = d(\frac{1}{n+1}, 0) = \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} = \varepsilon$ con lo que f no es continua en D.

Con esto terminamos la demostración. ■

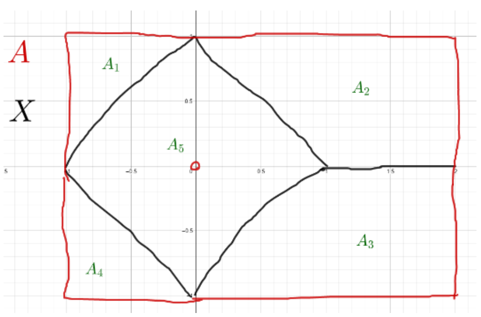
Problema 2. – *Demuestra o refuta el siguiente hecho: Si $A \subseteq X$ es un retracto de X y $B \subseteq Y$ es un retracto de Y, entonces $A \times B$ es un retracto de $X \times Y$.*

Demostración: En efecto. Como A es retracto de X existe $r_1 : X \to X$ continua tal que $\forall x \in A$ se tiene que $r_1(x) = x$, análogamente como B es retracto de Y existe $r_2 : X \to X$ continua tal que $\forall y \in B$ se tiene que $r_1(y) = y$.

Entonces sea $r : X \times Y \to X \times Y$ dada por $r(x, y) = (r_1(x), r_2(y))$. Notemos que dicha función es continua, pues sus proyecciones r_1 y r_2 lo son y además para cada $(a, b) \in A \times B$ se tiene que $r(a, b) = (r_1(a), r_2(b)) = (a, b)$ esta última pues $a \in A$ y $b \in B$ por lo que $r_1(a) = a$ y $r_2(b) = b$ $\therefore$ $A \times B$ es un retracto de $X \times Y$. ■

Problema 3. – *Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\} \cup ([1, 2] \times \{0\})$. Demuestra que X es un retracto de $A = ([-1, 2] \times [-1, 1]) - \{(0, 0)\}$.*

Demostración: PD $\exists r : A \to X$ función continua tal que $\forall x \in X, r(x) = x$.



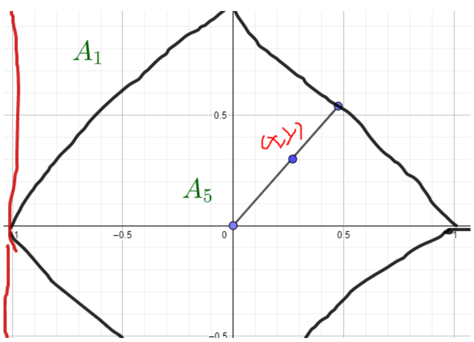
Consideremos las regiones X e A como se muestra en el dibujo. Y separaremos esta en las secciones A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 (cada una es tiene incluida la linea roja con la línea negra) y para cada una de ellas encontraremos una función continua.

• A_1. Para cada $(x, y) \in A_1$ lo que haremos será tomar su proyección sobre la recta dada por $y = x + 1$, que no es mas que tomar su primera coordenada y evaluarla en la recta. Así $r_1 : A_1 \to X$ vendrá dada por $r_1(x,y) = (x, x+1)$ y es continua.

• A_2. Para cada $(x,y) \in A_2$ lo que haremos será tomar su proyección sobre la recta dada por $y = -x+1$ y la recta $y = 0$, que no es más que tomar su primera coordenada y evaluarla en la recta donde el valor dependerá de si $0 \le x \le 1$ o $1 \le x \le 2$. Así $r_2 : A_1 \to X$ vendrá dada por $r_2(x,y) = \begin{cases} (x, -x+1) & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ (x, 0) & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$ que será continua pues coinciden en el 1.

• A_3 y A_4. Notemos que estas regiones son exactamente las regiones A_1 y A_2 reflejadas por el eje x con lo que las funciones que nos servirán serán $r_3 = -r_1$ para A_4 y $r_4 = -r_2$ para A_3, que seguirán siendo continuas (constante por función continua).

• A_5. Para cada $(x,y) \in A_5$ lo que haremos será tomar la recta que une el origen con el punto dado y lo mandare al punto de intersección de esta recta con cada recta negra. Siendo las rectas $y = x+1$, $y = -x+1$, $y = x-1$ y $y = -x-1$. Y donde no mandare un mismo punto a dos lugares distintos pues el $(0,0)$ no está en el conjunto.



La recta que une el origen con el punto (x,y) es $s = \frac{y}{x} t$.
Así $r_5 : A_5 \to X$ vendrá dada por

$$r_5(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x}{y-x}, \frac{y}{y-x}\right) & \text{si } x < 0, y > 0 \\ \left(\frac{x}{y+x}, \frac{y}{y+x}\right) & \text{si } x, y > 0 \\ \left(\frac{x}{x-y}, \frac{y}{x-y}\right) & \text{si } x > 0, y < 0 \\ \left(-\frac{x}{y+x}, -\frac{y}{y+x}\right) & \text{si } x, y < 0 \end{cases}$$

(Ya no me dio tiempo de poner los pasos para las intersecciones :( ) Y esta función será continua en cada cambio.

Ya tenemos lo necesario para demostrar lo que queremos.
Sea $\Lambda = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, notemos que esta es una familia cerrada localmente finita pues cada A_i es cerrado y además Λ es finito. Además para cada A_i le asignamos su respectiva función continua $r_i : A_i \to X$ donde para cuales quiera $i, j \in \{1,2,3,4,5\}$ se tendrá que $r_{i|A_i \cap A_j} = r_{j|A_i \cap A_j}$ pues por construcción $A_i \cap A_j$ o es el vacío (y entonces no hay nada que hacer) o es una línea recta, donde como proyectamos o extendemos los puntos, estos coinciden.

Con todo lo anterior tendremos que por un teorema visto en clase la función definida como $r : A \to X$ dada por $r(x) = r_i(x)$ si $x \in A_i$ será una función continua y además por construcción se cumple que $r[A] = X$ y para cada $x \in X$ la función los deja fijos, porque ya están sobre las respectivas rectas negras, es decir, $r(x) = x$. Con lo que r es retracción y así X es retracto de A. ■

Problema 4. – *Definimos la función* $h : 2^\omega \times 2^\omega \to 2^\omega$ *dada por*

$$h(f,g)(n) = \begin{cases} f(\frac{n}{2}) & \text{si } n \text{ par} \\ g(\frac{n-1}{2}) & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

Demuestra que h *es homeomorfismo.*

Solución: Veamos que es biyectiva.

• En efecto, sean $(f,g),(l,k) \in 2^\omega \times 2^\omega$ tales que $h(f,g)(n) = h(l,k)(n)$, para n par tendremos que $f(\frac{n}{2}) = l(\frac{n}{2}) \Rightarrow f(\frac{2k}{2}) = l(\frac{2k}{2}) \Rightarrow f(k) = l(k)$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y para n impar tendremos que $g(\frac{n-1}{2}) = k(\frac{n-1}{2}) \Rightarrow g(\frac{2k+1-1}{2}) = k(\frac{2k+1-1}{2}) \Rightarrow g(k) = k(k)$ para toda $k \in \mathbb{N}$ por lo que $(f,g) = (l,k)$ y entonces h es inyectiva.

• Es suprayectiva, pues para cada $L \in 2^\omega$ tomamos $f(n) = L(2n)$ y $g(n) = L(2n+1)$ y entonces

$$h(f,g)(n) = \begin{cases} f(\frac{n}{2}) & \text{si } n \text{ par} \\ g(\frac{n-1}{2}) & \text{si } n \text{ impar} \end{cases} = \begin{cases} L(2\,\frac{n}{2}) & \text{si } n \text{ par} \\ L(2 \cdot \frac{n-1}{2} + 1) & \text{si } n \text{ impar} \end{cases} = \begin{cases} L(n) & \text{si } n \text{ par} \\ L(n) & \text{si } n \text{ impar} \end{cases} = L(n)$$

Ahora veamos que es continua con inversa continua.

• Sea $\{(f_n, g_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$ sucesión convergente en $2^\omega \times 2^\omega$ a (f,g). PD $h(f_n,g_n) \to h(f,g)$ en 2^ω. Sea $\varepsilon > 0$ PD $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ se tiene que $d(h(f_n,g_n),h(f,g)) < \varepsilon$, con d la métrica de árbol en 2^ω.