Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Análisis Matemático I

Super puntuación extra

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera
Y
Francisco Javier Alvarado Cabrera

Parte 1

• Problema 1. – *Decimos que un espacio topológico* (X, τ) *es metrizable sí y solo si existe una métrica* d *sobre* X *de tal manera que* $\tau = \tau_d$. *Determina cuál de los siguientes espacios topológicos son metrizables.*

1) $X = \{0,1,2,3\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{1,2,3\}, \{0,1\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$
2) $X = \mathbb{N} \cup \{w\}$ y $\tau = \wp(\mathbb{N}) \cup \{A \cup \{w\} : A \in \wp(\mathbb{N}) \text{ y } \mathbb{N} - A \text{ es finito}\}$

Demostración:

1) No es metrizable. Supongamos que lo es y existe $d : X^2 \to \mathbb{R}$ métrica en X tal que $\tau = \tau_d$. De esta manera por el ejercicio 2 como X es finito se tendrá que $\tau_d = \wp(X)$ lo cual no es cierto, pues $\{3\} \notin \tau$ $\therefore$ no es metrizable.

2) No es metrizable. Supongamos que lo es y existe $d : X^2 \to \mathbb{R}$ métrica en X tal que $\tau = \tau_d$. Así sean $x, y \in X$, $x \neq y$, y sea $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2}$, con lo que sí $U = B_\varepsilon(x)$ y $V = B_\varepsilon(y)$ entonces $U \cap V = \emptyset$. Además, sabemos que $U, V \in \tau_d = \tau \Rightarrow U, V \in \tau$ y son no vacíos, entonces $X \setminus U$ y $X \setminus V$ son finitos $\Rightarrow (X \setminus U) \cup (X \setminus V) = X \setminus (U \cap V)$ es finito !!! pero esto es absurdo, pues $U \cap V = \emptyset$. ∎

• Problema 2. – *Sea* (X, d) *un espacio métrico finito. Demuestra que* τ_d *es la topología discreta.*

Demostración: Primero veamos que $\forall x \in X$, $X \setminus \{x\}$ es abierto.

• PD: $X \setminus \{x\}$ es abierto.

En efecto, sea $y \in X \setminus \{x\}$, entonces tendremos que $y \neq x \Rightarrow d(x,y) > 0$. Así sea $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2} > 0$ y veamos que $B_\varepsilon(y) \subseteq X \setminus \{x\}$.

Sea $z \in B_\varepsilon(y) \Rightarrow d(z,y) < \varepsilon = \frac{d(x,y)}{2} < d(x,y) \Rightarrow z \neq x$ [ϛ] $\therefore z \in X \setminus \{x\} \therefore B_\varepsilon(y) \subseteq X \setminus \{x\}$. Y así $X \setminus \{x\}$ es abierto lo que implica que $\{x\}$ es cerrado.

Ahora, sea $A \subseteq X$, como X es finito tendremos que $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\} = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \cdots \cup \{x_n\}$, con lo que $X \setminus A = (X \setminus \{x_1\}) \cap (X \setminus \{x_2\}) \cap \cdots \cap (X \setminus \{x_n\})$ y como cada uno de estos es cerrado entonces la intersección finita de estos será un cerrado $\Rightarrow$ $X \setminus A$ es cerrado $\Rightarrow$ A es abierto. Con esto tenemos que $\forall A \subseteq X$, $A \in \tau_d$ por lo que $\wp(X) \subseteq \tau_d$ y como siempre se cumple que $\tau_d \subseteq \wp(X)$ tendremos que $\tau_d = \wp(X)$. ■

• Problema 3. – *Sea (X,d) un espacio métrico de tal manera que τ_d es la topología discreta. Demuestra que si D es denso en X, entonces $X = D$.*

Demostración: Supongamos que D es denso en X , entonces tendremos que $\overline{D} = X$. Como $\tau_d = \wp(X)$ y $X \setminus D \in \wp(X)$ tendremos que $X \setminus D$ es abierto y entonces D es cerrado, de esta manera $D = \overline{D} = X$. ■

• Problema 4. – *Sea $r > 0$ y sean $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos no vacíos y para cada $i \in \mathbb{N}$ sean d_i y ρ_i dos métricas equivalentes sobre X_i , ambas acotadas por r .Demuestra que la métrica de la suma d definida a partir de $\{d_i\}$ es equivalente a la métrica de la suma ρ definida a partir de $\{\rho_i\}$.*

Demostración: Como $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos no vacíos y cada d_i y ρ_i son acotadas por r para toda i, tendremos los espacios métricos $(\Pi X_i,\ d)$ y $(\Pi X_i,\ \rho)$. Veamos que d y ρ son equivalentes.

PD Que sí $d(\hat{x},\hat{y}) = \sum_{i \geq 1} \frac{d_i(\hat{x}(i),\hat{y}(i))}{2^i}$ y $\rho(\hat{x},\hat{y}) = \sum_{i \geq 1} \frac{\rho_i(\hat{x}(i),\hat{y}(i))}{2^i}$, entonces $\tau_d = \tau_\rho$.

PD τ_d refina a τ_ρ y τ_ρ refina a τ_d .

[ϛ] Pues si $z = x$ entonces tendríamos que $d(z,y) = d(x,y)$ cosa que no pasa.

1) Tenemos que τ_d refina a τ_ρ si y solo si $\forall \hat{x} \in \Pi X_i$ y $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $B_\delta^\rho(\hat{x}) \subseteq B_\varepsilon^d(\hat{x})$
Sea $\hat{x} \in \Pi X_i$ y $\varepsilon > 0$. Como d_i es equivalente a ρ_i $\forall i$ se tiene que τ_{d_i} refina a τ_{ρ_i} $\forall i$, esto quiere decir que dado $\varepsilon > 0$ para cada $\hat{x}(i) \in X_i$ existe $\delta_i > 0$ tal que $B_{\delta_i}^{\rho_i}(\hat{x}(i)) \subseteq B_\varepsilon^{d_i}(\hat{x}(i))$ (*).

Sea $\delta = \min\left\{\delta_i \middle/ 2^i : i \in \mathbb{N}\right\}$ y veamos que esta es la delta buscada. PD $B_\delta^\rho(\hat{x}) \subseteq B_\varepsilon^d(\hat{x})$.

Sea $\hat{y} \in B_\delta^\rho(\hat{x})$ se tiene que

$$\rho(\hat{x},\hat{y}) < \delta \;\Rightarrow\; \sum_{i\geq 1} \frac{\rho_i(\hat{x}(i),\hat{y}(i))}{2^i} < \min\left\{\delta_i \middle/ 2^i : i \in \mathbb{N}\right\} \text{ pero}$$
$$\frac{\rho_i(\hat{x}(i),\hat{y}(i))}{2^i} < \sum_{i\geq 1} \frac{\rho_i(\hat{x}(i),\hat{y}(i))}{2^i} < \min\left\{\delta_i \middle/ 2^i : i \in \mathbb{N}\right\} < \delta_i \middle/ 2^i$$
$$\Rightarrow \frac{\rho_i(\hat{x}(i),\hat{y}(i))}{2^i} < \delta_i \middle/ 2^i \;\Rightarrow\; \rho_i(\hat{x}(i),\hat{y}(i)) < \delta_i \;\; \forall i \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto $\hat{y}(i) \in B_{\delta_i}^{\rho_i}(\hat{x}(i)) \overset{(*)}{\subseteq} B_\varepsilon^{d_i}(\hat{x}(i)) \;\Rightarrow \hat{y}(i) \in B_\varepsilon^{d_i}(\hat{x}(i)) \;\Rightarrow\; d_i(\hat{x}(i),\hat{y}(i)) < \varepsilon$ y entonces tendremos que $\sum_{i\geq 1} \frac{d_i(\hat{x}(i),\hat{y}(i))}{2^i} < \sum_{i\geq 1} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon \;\Rightarrow\; d(\hat{x},\hat{y}) < \varepsilon \;\therefore\; y \in B_\varepsilon^d(\hat{x})$

$\therefore$ $B_\delta^\rho(\hat{x}) \subseteq B_\varepsilon^d(\hat{x})$ $\therefore$ τ_d refina a τ_ρ.

2) Para demostrar que τ_ρ refina a τ_d se hace de forma análoga.

$\therefore$ $\tau_d = \tau_\rho$ $\therefore$ las dos métricas d y ρ son equivalentes. ■

• Problema 5. – *En un espacio métrico (X,d) ¿Es posible que exista $\varepsilon > 0$ y $x,y \in X$ distintos tales que $B_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(y)$? ¿Esto es posible en $\mathbb{R}^n$?*

Solución: Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(y)$ con $x \neq y$ y sea $z \in B_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(y)$
$\Rightarrow$ $d(x,z) < \varepsilon$ y $d(y,z) < \varepsilon$, y entonces por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$0 \underset{x\neq y}{<} d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Entonces tengo que un número real mayor a cero tal que es menor a cualquier cantidad dada, cosa que es imposible, ya que no existe ningún $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < \delta$ $\forall \delta > 0$. Por lo tanto, no puede existir una $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(y)$ con $x \neq y$. Esto tampoco sucede en $\mathbb{R}^n$ pues lo acabamos de demostrar para un espacio métrico en general. ■

• Problema 6. – *Demuestra que en la suma punteada de espacios métricos, cada X_i es abierto en $\bigcup_{j \in J} X_j$.*

Demostración: Sea $x \in X_i$ PD $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq X_i$.
Sean $x_i \in X_i$ arbitrario pero fijo y $\varepsilon = d_i(x, x_i) + 1 > 0$, así tomemos $y \in B_\varepsilon(x)$ y por contradicción supongamos que $y \notin X_i$.
Como $y \notin X_i \Rightarrow \exists j \in J$ tal que $y \in X_j$, además, como $y \in B_\varepsilon(x)$ tenemos

$$d(x,y) < \varepsilon \underset{y \in X_j}{\Rightarrow} d_i(x,x_i) + d_j(y_j, y) + 1 < d_i(x, x_i) + 1 \text{ con } y_j \in X_j \text{ arbitrario pero fijo}$$
$$\Rightarrow d_j(y_j, y) < 0!!! \text{ lo cual es imposible}$$

pues no hay ningún número real, tal que $0 \leq r < 0$. Por lo que $y \in X_i \therefore B_\varepsilon(x) \subseteq X_i \therefore X_i$ es abierto. ■

• Problema 8. – *Dado un conjunto X y una función $\rho : X^2 \to [0, \infty)$ decimos que ρ es una pseudométrica si sucede*

1. $\rho(x,x) = 0$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

Demuestra las siguientes:

1. Dados $x, y \in X$, escribiremos $x \sim y$ sí $\rho(x,y) = 0$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia.
2. Denotemos $X/\sim$ el conjunto de clases de equivalencia. Dados $x, y \in X$ denotemos $d([x]_\sim, [y]_\sim) = \rho(x,y)$ prueba que ρ es una métrica para $X/\sim$.

Demostración: Sea X conjunto y $\rho : X^2 \to [0, \infty)$ *una pseudométrica.*
1) Demostraremos tres puntos:
• $\sim$ es reflexiva.
Sea $x \in X$, como ρ es pseudométrica tenemos que $\rho(x,x) = 0 \Rightarrow x \sim x$.

- $\sim$ es simétrica.
  Sean $x, y \in X$ tales que $x \sim y \Rightarrow \rho(x,y) = 0$ y ρ es pseudométrica tenemos que $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ por lo que $\rho(y,x) = 0 \Rightarrow y \sim x$.

- $\sim$ es transitiva.
  Sean $x, y, z \in X$ tales que $x \sim y$ y $y \sim z$ entonces $\rho(x,y) = 0$ y $\rho(y,z)$, por otro lado como ρ es pseudométrica tenemos que $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) = 0 + 0$ por lo que $\rho(x,z) \leq 0$ $\Rightarrow \rho(x,z) = 0 \therefore x \sim z.$.

Por todo lo anterior $\sim$ es una relación de equivalencia.

2) Veamos que es métrica. Primero está bien definida, pues para cada $x \in X$ existe su clase de equivalencia, ya que $x \in [x]_\sim$ y es no vacía.

- Sean $x, y \in X$ tales que $d([x]_\sim, [y]_\sim) = 0 \Leftrightarrow \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow [x]_\sim = [y]_\sim$.

- $d([x]_\sim, [y]_\sim) = \rho(x,y) = \rho(y,x) = d([y]_\sim, [x]_\sim)$.

- Ahora sean $x, y, z \in X$, entonces

$$d([x]_\sim, [y]_\sim) = \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) = d([x]_\sim, [z]_\sim) + d([z]_\sim, [y]_\sim)$$

Por lo tanto, d es métrica para $X/\sim$. ■

- Problema 9. – *Dado (X,d) un espacio pseudométrico.*

1. *Para cada $x \in X$ y para cada $\varepsilon > 0$ define $B_\varepsilon(x)$ de manera análoga a la definición de espacios métricos.*
2. *Define τ_d de manera análoga a la definición de espacios métricos y demuestra que τ_d es topología para X.*
3. *Demuestra que para cada $\varepsilon > 0$ se cumple que $B_\varepsilon(x) \in \tau_d$.*
4. *Demuestra si d no es una métrica, entonces (X, τ_d) no es metrizable.*

Demostración:

1) Se definen $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$

2) Se define $\tau_d = \{A \subseteq X : \forall x \in A \ \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } B_\varepsilon(x) \subseteq A\}$. Veamos que es topología para X.

- $\emptyset, X \in \tau_d$.

  En efecto, para cada $x \in X$, $B_1(x) \subseteq X$ y por vacuidad se cumple para el vacío.

- Si $A, B \in \tau_d \Rightarrow A \cap B \in \tau_d$.

  Sean $A, B \in \tau_d$ y sea $x \in A \cap B$. Como A y B son abiertos existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tales que $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ y $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$ y entonces $B_{\varepsilon_1}(x) \cap B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq A \cap B$. Así sea $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ entonces tendremos que $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x)$ y $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x)$ [Y] y entonces

$$B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \cap B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq A \cap B \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B \therefore A \cap B \in \tau_d$$

- Si $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau_d$ entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_d$

  Sea $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, entonces existe $j \in I$ tal que $x \in U_j$ y como $U_j \in \tau_d$ tendremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq U_j \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \therefore \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_d$.

Por lo tanto, τ_d es topología para X.

3) Veamos qué $B_\varepsilon(x) \in \tau_d$.

Sea $y \in B_\varepsilon(x)$ y definimos $\varepsilon' = \varepsilon - d(x,y) > 0$ (pues $d(x,y) < \varepsilon$) PD $B_{\varepsilon'}(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$.

En efecto, sea $z \in B_{\varepsilon'}(y) \Rightarrow d(y,z) < \varepsilon - d(x,y) \Rightarrow d(y,z) + d(x,y) < \varepsilon$ y como $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \varepsilon$ tendremos que $d(x,z) < \varepsilon \therefore z \in B_\varepsilon(x) \therefore B_{\varepsilon'}(x) \subseteq B_\varepsilon(x) \therefore B_\varepsilon(x) \in \tau_d$.

4) PD (X, τ_d) no es metrizable.

Por contradicción, supongamos que (X, τ_d) es metrizable, entonces existe d' métrica sobre X tal que $\tau_d = \tau_{d'}$. En particular tendremos que $\tau_{d'}$ refina a τ_d, y esto es si y solo si $\forall x \in X$ y $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $B_\delta^d(x) \subseteq B_\varepsilon^{d'}(x)$.

Así sea $x \in X$ como d es pseudométrica tenemos que existe $y \in X$, $y \neq x$, tal que $d(x,y) = 0$. Si $d'(x,y) = 0$ tendríamos que d' no es métrica lo que contradice la hipótesis $\Rightarrow d'(x,y) > 0$ y así sea $\varepsilon = \frac{d'(x,y)}{2} > 0$ y entonces dado $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta^d(x) \subseteq B_\varepsilon^{d'}(x)$ pero como $d(x,y) = 0 < \delta$ entonces $y \in B_\delta^d(x) \Rightarrow y \in B_\varepsilon^{d'}(x) \Rightarrow d'(x,y) < \varepsilon = \frac{d'(x,y)}{2}$!!! pero esto estaría

[Y] Esto es porque por definición $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ y $\varepsilon \leq \varepsilon_2$ con lo que si $y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow d(x,y) < \varepsilon \leq \varepsilon_1 \Rightarrow y \in B_{\varepsilon_1}(x)$. Y así $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x)$, análogamente para el otro.

diciendo que $d'(x,y) < \frac{1}{2}d'(x,y)$ lo cual es imposible $\therefore B_{\delta}^{d}(x) \nsubseteq B_{\varepsilon}^{d'}(x)$ $\therefore \tau_d \neq \tau_{d'}$ $\therefore$ (X,τ_d) no es metrizable. ■

•Problema 10. – *Sea* (X,d) *un espacio métrico,* $r>0$ *y* $\emptyset \neq Y \subseteq X$ *de tal manera que para cualesquiera* $x,y \in Y$ *distintos se cumple que* $d(x,y) \geq r$. *Demuestra que si* $D \subseteq X$ *es denso en* X *entonces* $|D| \geq |Y|$.

Demostración: Sea $x \in Y \subseteq X$. Como D es denso en X, tendremos que $X = \overline{D}$, así $x \in \overline{D}$, y como es un cerrado, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ (no constante) tal que $x_n \to x$ en Y. Entonces por definición de convergencia, dada $r>0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se cumple que $d(x_n,x) < r$, pero esto me está diciendo que $x_n \notin Y$, pues de estarlo entonces $d(x_n,x) \geq r$ cosa que no pasa.

Por lo tanto, tengo que $\forall x \in Y$ $\exists\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ y $\exists n_x \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_x$, $x_n \notin Y$, pero $x_n \in D$, por lo que para cada $x \in Y$ puedo encontrar elementos que están en D y que no están en Y, por lo que $|D| \geq |Y|$. ■

•Problema 12. – *Sean* X *un conjunto y* B_1, B_2 *dos bases para topologías* τ_1 y τ_2, *respectivamente, sobre X. Prueba que si para cada* $x \in X$ *y* $U \in \tau_1$ *con* $x \in U$ *existe* $V \in B_2$ *tal que* $x \in V \subseteq U$, *entonces* $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Demostración: Sea $U \in \tau_1$ PD $U \in \tau_2$

Como B_1 es base $\exists\{U_i\}_{i\in I} \subseteq B_1$ tal que $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Pero como cada $U_i \in B_1$ tenemos que $U_i \in \tau_1$ para cada i.

Con lo anterior sea $x_i \in U_i$ y entonces por hipótesis $\exists V_i \in B_2$ tal que $x_i \in V_i \subseteq U_i$, con lo que $\bigcup_{i\in I} V_i \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i = U$ PD $U = \bigcup_{i\in I} V_i$

Ya tengo una parte de la contención, asi sea $x \in U \Rightarrow x \in U_i$ para alguna $i \in I$ y por lo anterior $x \in V_i \subseteq U_i$ por lo que $x \in V_i \Rightarrow x \in \bigcup_{i\in I} V_i$ $\therefore U \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$ $\therefore U = \bigcup_{i\in I} V_i$ con esto tenemos que U es unión de básicos de B_2 por lo que $U \in \tau_2$. ■

Parte 2

• Problema 1. – *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Prueba que, para cualesquiera* $w, x, y, z \in X$ *se cumple que:*

$$| d(w,x) - d(y,z) | \leq d(w,y) + d(x,z)$$

Demostración: Tenemos que

$$d(w,x) \leq d(w,y) + d(x,y) \leq d(w,y) + [d(x,z) + d(y,z)]$$
$$\Leftrightarrow d(w,x) - d(y,z) \leq d(w,y) + d(x,z)$$

Y, por otro lado

$$d(y,z) \leq d(y,w) + d(w,z) \leq d(y,w) + [d(w,x) + d(x,z)]$$
$$\Leftrightarrow d(y,z) \leq d(w,y) + d(x,z) + d(w,x) \Rightarrow -d(w,y) - d(x,z) \leq d(w,x) - d(y,z)$$

Juntando estas últimas desigualdades obtenemos que

$$-[d(w,y) + d(x,z)] \leq d(w,x) - d(y,z) \leq d(w,y) + d(x,z) \Leftrightarrow | d(w,x) - d(y,z) | \leq d(w,y) + d(x,z) \ \blacksquare$$

• Problema 2. – *Sea* (X, d) *un espacio métrico y* $A, B \subseteq X$ *, la definición de métrica se puede extender a los subconjuntos de X, con la función*

$$d(A,B) = \inf_{a \in A,\, b \in B} \{d(a,b)\} \quad :$$

Muestra un ejemplo de un espacio métrico X y dos subconjuntos A, B de X tales que $d(A,B) = 0$

Demostración: Consideremos $(\mathbb{R}, d)$ y tomemos $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
Sea $b \in B$ fijo, es decir, sea $-\frac{1}{k} \in B$ fijo, entonces:

$$\inf_{a \in A} \left\{d(a,b)\right\} = \inf_{a \in A} \left\{d(a, -\frac{1}{k})\right\} = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{1}{n} - (-\frac{1}{k})\right| = \left|-\frac{1}{k}\right| = |b|$$

Con lo que

$$d(A,B)=\inf_{a\in A,b\in B}\left\{d(a,b)\right\}=\inf_{b\in B}\left(\inf_{a\in A}\left\{d(a,b)\right\}\right)=\inf_{b\in B}\left(\left|b\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left|-\frac{1}{k}\right|=0\ \blacksquare$$

• Problema 3. – *Prueba que para cada* $\overline{x}\in\mathbb{R}^n$ *se cumple que:*

- $\|\overline{x}\|_p \le \|\overline{x}\|_q \le n^{\frac{p-q}{pq}}\|\overline{x}\|_p$ *si* $1\le q\le p$
- $\|\overline{x}\|_\infty \le \|\overline{x}\|_p \le n^{\frac{1}{p}}\|\overline{x}\|_\infty$ *para todo* $p\ge 1$

(Estos dos incisos engloban las tres desigualdades del problema)

Demostración:

1)

• Para la primera desigualdad, tenemos que

$$\|\overline{x}\|_p=\left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^p\right)^{1/p}=\left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^p\right)^{q/q\cdot p}=\left(\left[\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^p\right]^{q/p}\right)^{1/q}$$

Pero por la desigualdad de Hölder sabemos que $\left(\sum\left|a_n\right|\right)^r\le\sum\left|a_n\right|^r$, con lo que

$$\|\overline{x}\|_p=\left(\left[\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^p\right]^{q/p}\right)^{1/q}\le\left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^{p\cdot q/p}\right)^{1/q}=\left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^q\right)^{1/q}=\|\overline{x}\|_q$$

$$\therefore\ \|\overline{x}\|_p\le\|\overline{x}\|_q$$

• Por otro lado, para la segunda desigualdad, con $a_k=x_k{}^q$, $b_k=1$ y llamando $r=\frac{p}{q}>1$ la desigualdad de Hölder me dice que

$$\sum_{k=1}^{n}\left|a_kb_k\right|\le\left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_k\right|^r\right)^{1/r}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|b_k\right|^r\right)^{1-1/r}\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^q\le\left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^{q\cdot\frac{p}{q}}\right)^{q/p}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|1\right|^p\right)^{1-q/p}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^q\le\left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^p\right)^{q/p}n^{1-q/p}\Rightarrow\left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^q\right)^{1/q}\le n^{\frac{p-q}{pq}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^p\right)^{1/p}$$

$$\therefore\ \|\overline{x}\|_q\le n^{\frac{p-q}{pq}}\|\overline{x}\|_p$$

2)

- Para la primera desigualdad tenemos que

$$|x_k|^p \leq |x_k|^p \Rightarrow |x_k|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Rightarrow |x_k| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Y esto es para todo $|x_k|$, en particular para el máximo de ellos

$$\Rightarrow \max\{|x_k|\} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \therefore \quad \|\overline{x}\|_\infty \leq \|\overline{x}\|_p$$

- Por otro lado, sabemos que para cada k, se cumple

$$|x_k| \leq \max\{|x_k|\} = \|\overline{x}\|_\infty \Rightarrow |x_k| \leq \|\overline{x}\|_\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \leq \sum_{k=1}^{n} \|\overline{x}\|_\infty{}^p$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \leq n \cdot \|\overline{x}\|_\infty{}^p \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \leq n^{\frac{1}{p}} \|\overline{x}\|_\infty$$

$$\therefore \|\overline{x}\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|\overline{x}\|_\infty$$

Con lo que quedan demostradas las desigualdades. ∎

- Problema 4. –

Sea $(V, \| \ \|)$ un espacio normado. Demuestra que para cada $v \in V$ y para cada $\epsilon > 0$ existe $w \in V \backslash \{v\}$ tal que $\|v - w\| < \epsilon$. Concluye que ninguna norma puede inducir la métrica distreta.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$.

- Si $v = \overline{0}$, entonces para $w = 0$ funciona.
- Si $\|v\| = 1$, entonces sea $w = \frac{\varepsilon}{2} v$, entonces $\|v - w\| = \left\|v - \frac{\varepsilon}{2} v\right\| = \left\|(1 - \frac{\varepsilon}{2})v\right\| = \frac{\varepsilon}{2}\|v\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
- Si $\|v\| \neq 1$, entonces considerando $\frac{v}{\|v\|}$, es unitario, entonces por el punto anterior existe $z \in V \setminus \{v\}$ para $\frac{\varepsilon}{\|v\|} > 0$ tal que, $\left\|\frac{v}{\|v\|} - z\right\| < \frac{\varepsilon}{\|v\|} \Rightarrow \frac{1}{\|v\|}\left\|v - \|v\| \cdot z\right\| < \frac{\varepsilon}{\|v\|} \Rightarrow \left\|v - \|v\| \cdot z\right\| < \varepsilon$

entonces $w = \|v\| z$ es el vector buscado.

Ahora, supongamos que existiera $\| \; \| : V \to \mathbb{R}$ tal que $\|v-w\| = d_{dis}(v,w) = \begin{cases} 0 & \text{si } v = w \\ 1 & \text{si } v \neq w \end{cases}$ norma.

Pero por lo anterior dado $v \in V$ y $1 > 0$ existe $w \in V$, $w \neq v$ tal que $\|v-w\| < 1$, pero esto contradice el hecho de que como $v \neq w \;\Rightarrow\; \|v-w\| = 1$ $\therefore$ ninguna norma induce a la métrica discreta. ■

• Problema 5. – *Demuestra que si* $1 \le q < p \le \infty$ *entonces*

- $l_q \neq l_p$
- $l_q \subseteq l_p$
- *Para cada* $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *se cumple que* $\left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_q \ge \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_p$

Demostración:

1) PD $l_p \not\subseteq l_q$.

- Si $p < \infty$, sea $x_k = \frac{1}{k^{1/q}}$ entonces tendremos que $\{x_k\} \in l_p$ y $\{x_k\} \notin l_p$. En efecto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k\right|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{k^{1/q}}\right|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p/q}} < \infty^{\Sigma}$$

$\therefore$ $\{x_k\} \in l_p$ sin embargo $\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k\right|^q = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{k^{1/q}}\right|^q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ por lo que $\{x_k\} \notin l_p$ $\therefore$ $l_p \not\subseteq l_q$.

- Si $p = \infty$, sea $x_k = \frac{1}{k^{1/q}}$ entonces tendremos que $\{x_k\} \in l_\infty$ y $\{x_k\} \notin l_p$. En efecto

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left|x_k\right| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|\frac{1}{k^{1/q}}\right| = \frac{1}{1^{1/q}} = 1$$

$\therefore$ $\{x_k\} \in l_\infty$ sin embargo $\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k\right|^q = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{k^{1/q}}\right|^q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ por lo que $\{x_k\} \notin l_p$ $\therefore$ $l_\infty \not\subseteq l_q$.

$\therefore$ con estos dos casos obtenemos que $l_q \neq l_p$. ■

2) Demostraremos el segundo y tercer punto juntos.

$^{\Sigma}$ Pues es una serie geométrica con $r = \frac{p}{q} > 1$ ya que por hipótesis $p > q$.

• Si $p < \infty$, sea $\{x_k\} \in l_q \Rightarrow \sum_{k \geq 1} |x_k|^q < \infty$. Ahora consideremos el vector $\tilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ $\in \mathbb{R}^n$, por el problema 3 sabemos que $\|\overline{x}\|_p \leq \|\overline{x}\|_q$ si $1 \leq q \leq p$, es decir

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q\right)^{1/q} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \leq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q\right)^{1/q}$$

$$^{P}\Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^q\right)^{1/q} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q\right)^{1/q}$$

Pero como $\sum_{k \geq 1} |x_k|^q < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \therefore \{x_k\} \in l_p$. Además, demostramos que $\left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_p \leq \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_q$.

• Si $p = \infty$, sea $\{x_k\} \in l_q \Rightarrow \sum_{k \geq 1} |x_k|^q < \infty$. Ahora consideremos el vector $\tilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ $\in \mathbb{R}^n$, por el problema 3 sabemos que $\|\overline{x}\|_\infty \leq \|\overline{x}\|_q$ para todo $q \geq 1$, es decir

$$\max_{1\leq k\leq n} |x_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q\right)^{1/q} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n} |x_k| \leq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q\right)^{1/q}$$

$$^{\Theta}\Rightarrow \max_{k\in\mathbb{N}} |x_k| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q\right)^{1/q}$$

Pero como $\sum_{k \geq 1} |x_k|^q < \infty \Rightarrow \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty \therefore \{x_k\} \in l_\infty$. Además, demostramos que $\left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_\infty \leq \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_q$. ■

• Problema 6. – *Demuestra que sí* $1 \leq p < \infty$ *y* $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in l_p$ *entonces:*

$$\left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_\infty = \lim_{r\to\infty} \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_r$$

Demostración: Primero notemos que como $r \to \infty$, podemos considerar $r > p$, de esta manera

[P] Como cada suma finita es positiva, la raíz es continua en esos valores y entonces el límite puede entrar.

[Θ] Esto es pues tendré que el máximo sobre los naturales de la sucesión esta acotado superiormente por la suma de la derecha, y entonces por definición de supremo será mayor a este.

por el problema 5 $\left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_r \le \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_p < \infty$ y así $\forall r < p \le \infty$ $\left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_r$ existe.

Igualmente, por el problema 5, sabemos que $\forall r > p$ $\left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_\infty \le \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_r \Rightarrow$

$$\left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_\infty \le \lim_{r\to\infty} \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_r .$$

PD $\lim\limits_{r\to\infty} \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_r \le \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_\infty$

Obs.- Para toda $r > p$, se tiene que $\left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_r \le \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_p^{p/r} \cdot \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_\infty^{1-p/r}$.

En efecto, tenemos que

$$\left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_r = \left(\sum_{i\ge1} \left|x_i\right|^r\right)^{1/r} = \left(\sum_{i\ge1} \left|x_i\right|^{r-p} \cdot \left|x_i\right|^p\right)^{1/r}$$

pero $\left|x_i\right| \le \sup\limits_{i\ge1}\left\{\left|x_i\right|\right\} = \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_\infty$, con lo que

$$\begin{aligned}\left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_r &\le \left(\sum_{i\ge1} \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_\infty^{r-p} \cdot \left|x_i\right|^p\right)^{1/r} = \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_\infty^{r-p/r} \left(\sum_{i\ge1} \left|x_i\right|^p\right)^{1/r} \\ &= \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_\infty^{1-p/r} \left[\left(\sum_{i\ge1} \left|x_i\right|^p\right)^{1/p}\right]^{p/r} = \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_\infty^{1-p/r} \cdot \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_p^{p/r}\end{aligned}$$

Con lo anterior, tenemos que $\forall r > p$ $\left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_r \le \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_p^{p/r} \cdot \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_\infty^{1-p/r}$ y entonces

$$\lim_{r\to\infty} \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_r \le \lim_{r\to\infty} \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_p^{p/r} \cdot \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_\infty^{1-p/r} = \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_p^{0} \cdot \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_\infty^{1} = \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_\infty$$

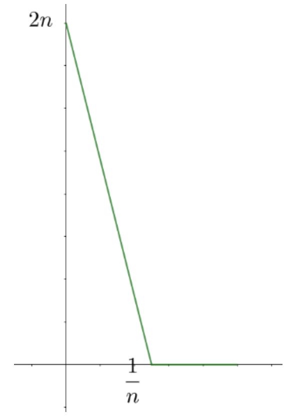
$$\therefore \lim_{r\to\infty} \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_r \le \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_\infty$$

así tendremos que $\left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_\infty \le \lim\limits_{r\to\infty} \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_r \le \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_\infty$ $\therefore$ $\left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_\infty = \lim\limits_{r\to\infty} \left\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|_r$. ■

• Problema 7. – *Da un ejemplo de una sucesión de funciones continuas* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *tales que* $\left\|f_i\right\| = 1$ *para cada* $i \in \mathbb{N}$ *pero* $\lim\limits_{i\to\infty} \left\|f_i\right\|_\infty = \infty$.

Solución: Sean $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_n(x) = \begin{cases} -2n^2x + 2n & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$



Entonces tendremos que para cada $n \in \mathbb{N}$ es continua, pues

$$\lim_{x\to 1/n^+} f_n(x) = \lim_{x\to 1/n^+} 0 = f(0) = 0 = \lim_{x\to 1/n^-} -2n^2x + 2n = \lim_{x\to 1/n^-} f_n(x)$$

por lo que $\{f_n\} \subseteq C[0,1]$.

Ahora, tenemos que $\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)|dx = \int_0^{1/n} f_n(x)dx$ pero esto no es más que el área debajo del rectángulo de la imagen la cual es $\frac{1}{2}(\frac{1}{n}\cdot 2n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Por lo que $\|f_n\|_1 = 1 \ \forall n$. Pero $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 2n$ y entonces $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = \lim_{n\to\infty} 2n = \infty$. ■

• Problema 8. – *Para cada* $k \in \mathbb{N}$, *sea* $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, *la función dada por*

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - kx & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{k} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcula $\|f_k\|_p$ *para cada* $1 \le p < \infty$ *y* $k \in \mathbb{N}$.

Solución: Las funciones están bien definidas. Claramente $\forall k \in \mathbb{N}$ f_k es continua en los intervalos $[0,\frac{1}{k})$ y $(\frac{1}{k},1)$, veamos que es continua en $\frac{1}{k}$. Tenemos que

$$\lim_{x\to 1/k^-} f(x) = \lim_{x\to 1/k^-} 1 - xk = 1 - \frac{1}{k}\cdot k = 0 \ \text{ y } \lim_{x\to 1/k^+} f(x) = \lim_{x\to 1/k^+} 0 = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 1/k} f(x) = 0 = f(\tfrac{1}{k}) \ \therefore \ f \text{ es continua en } [0,1] \ \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Así $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C[0,1]$.

Considerando a $C[0,1]$ con la norma $\|g\|_p = \left(\int_0^1 |g(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$, sea $1 \le p < \infty$ y $k \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\|f_k\|_p = \left(\int_0^1 |f_k(x)|^p\, dx\right)^{1/p} = \left(\int_0^{1/k} |f_k(x)|^p\, dx + \int_{1/k}^1 |f_k(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_0^{1/k} |1 - kx|^p \, dx + \int_{1/k}^1 |0|^p \, dx \right)^{1/p} = \left(\int_0^{1/k} |1 - kx|^p \, dx \right)^{1/p}$$

pero esta integral es el área de triangulo con base $\frac{1}{k}$ y altura 1, la cual es $\frac{1}{2k}$, por lo que $\|f_k\|_p = \left(\frac{1}{2k}\right)^{1/p}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$. ■

• Problema 9. – *Sea $C^r[a,b]$ el conjunto de funciones r-veces continuamente diferenciables en $[a,b]$. Demuestra que para cada $p \in [1,\infty]$ la función $\| \ \|_{r,p} : C^r[a,b] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\|f\|_{r,p} = \sum_{k=1}^{r} \left\| f^{(k)} \right\|_p$$

es una norma.

Demostración: Recordemos que $\| \ \|_p$ con $1 \leq p \leq \infty$ es la norma de $C[a,b]$. Veamos que efectivamente $\| \ \|_{r,p}$ es norma.

- $\|f\|_{r,p} = 0 \iff f = 0$

  Sea $f \in C^r[a,b]$ tal que $\|f\|_{r,p} = 0 \iff \sum_{k=1}^{r} \left\| f^{(k)} \right\|_p \overset{\| \ \|_p \geq 0}{\iff} \left\| f^{(k)} \right\|_p = 0 \ \forall 1 \leq k \leq r$ pero como $\| \ \|_p$ es norma, esto pasa si y solo si $f^{(k)} \equiv 0 \iff f \equiv 0$ es la función idénticamente 0.

- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \ \|\alpha f\|_{r,p} = |\alpha| \|f\|_{r,p}$

  Sean $f \in C^r[a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces sabemos que al multiplicar por una constante a una función diferenciable seguirá siendo diferenciable, por lo que $\alpha f \in C^r[a,b]$, entonces $\|\alpha f\|_{r,p} = \sum_{k=1}^{r} \left\| (\alpha f)^{(k)} \right\|_p = \sum_{k=1}^{r} \left\| \alpha \cdot f^{(k)} \right\|_p \underset{\| \ \|_p \text{ norma}}{=} \sum_{k=1}^{r} |a| \left\| f^{(k)} \right\|_p = |a| \sum_{k=1}^{r} \left\| f^{(k)} \right\|_p = |\alpha| \|f\|_{r,p}$.

- $\forall f, g \in C^r[a,b] \ \ \|f + g\|_{r,p} \leq \|f\|_{r,p} + \|g\|_{r,p}$

  Sean $f, g \in C^r[a,b] \Rightarrow \|f + g\|_{r,p} = \sum_{k=1}^{r} \left\| (f + g)^{(k)} \right\|_p = \sum_{k=1}^{r} \left\| f^{(k)} + g^{(k)} \right\|_p \underset{\| \ \|_p \text{ norma}}{\leq} \sum_{k=1}^{r} \left\| f^{(k)} \right\|_p + \left\| g^{(k)} \right\|_p$

  $= \sum_{k=1}^{r} \left\| f^{(k)} \right\|_p + \sum_{k=1}^{r} \left\| g^{(k)} \right\|_p = \|f\|_{r,p} + \|g\|_{r,p}$.

Por todo lo anterior $\| \|_{r,p}$ es norma con $p \in [1,\infty]$.

• Problema 10. – *Comprueba si las siguientes funciones son isometrías.*

- $id : (\mathbb{R}^2, d_p) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d_q)$ para $p \neq q$.
- $id : (C[0,1], d_p) \longrightarrow (C[0,1], d_q)$ para $p \neq q$.
- $i : (C^1[0,1], d_{1,2}) \longrightarrow (C[0,1], d_2)$ (i denota la inclusión).

Demostración:

• Veamos que $id : (\mathbb{R}^2, d_p) \to (\mathbb{R}^2, d_q)$ no es isometría

Supongamos que si es isometría con $p \neq q$, entonces para $(1,1),(0,0) \in \mathbb{R}$ se tendrá que

$$d_p((1,1),(0,0)) = d_q(id(1,1), id(0,0)) \iff d_p((1,1),(0,0)) = d_q((1,1),(0,0))$$
$$\iff \|(1,1)\|_p = \|(1,1)\|_q \iff [|1|^p + |1|^p]^{1/p} = [|1|^q + |1|^q]^{1/q}$$
$$\iff 2^{1/p} = 2^{1/q} \iff p = q \text{ !!!}$$

Pero esto contradice la hipótesis de que $p \neq q$ $\therefore$ $id : (\mathbb{R}^2, d_p) \to (\mathbb{R}^2, d_q)$ no es isometría. ■

• Veamos que $id : (C[0,1], d_p) \to (C[0,1], d_q)$ no es isometría.

Supongamos que si es isometría con $p \neq q$, entonces para $f, g \in C[0,1]$ con $f(x) = x$ y $g(x) = 0$ se tendrá que

$$d_p(f,g) = d_q(id(f), id(g)) \iff d_p(f,g) = d_q(f,g) \iff \|f - g\|_p = \|f - g\|_q$$
$$\iff \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} = \left(\int_0^1 |f(x)|^q \, dx\right)^{1/q} \iff \left(\int_0^1 x^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_0^1 x^q dx\right)^{1/q}$$
$$\iff \left(\tfrac{1}{p+1}\right)^{1/p} = \left(\tfrac{1}{q+1}\right)^{1/q} \iff (p+1)^{1/p} = (q+1)^{1/q}$$

sin embargo, la función $h(x) = (x+1)^x$ es decreciente y continua en $[1,\infty)$ [Z] por lo que es inyectiva en dicho dominio, así $h(p) = h(q) \iff p = q$!!! pero esto contradice la hipótesis de que $p \neq q$ $\therefore$ $id : (C[0,1], d_p) \to (C[0,1], d_q)$ no es isometría. ■

• Veamos que $i : (C^1[0,1], d_{1,2}) \to (C[0,1], d_2)$ no es isometría.

Sean $f(x) = x$ y $g(x) = 0$, son tales que $f, g \in C^1[0,1]$, de esta manera

[Z] Esto se demuestra en la parte final del documento.

$$\begin{aligned} d_{1,2}(i(x),i(0)) &= d_{1,2}(x,0) = \|x\|_{1,2} = \|x\|_2 + \|x'\|_2 = \|x\|_2 + \|1\|_2 \\ &= \|x\|_2 + \sqrt{\int_0^1 |1|^2} = \|x\|_2 + \sqrt{\int_0^1 1} = \|x\|_2 + 1 \\ &= d_2(x,0) + 1 \end{aligned}$$

por lo tanto $d_{1,2}(i(x),i(0)) \neq d_2(x,0)$, por lo que no es isometría. ■

• Problema 12. – *Sea* (X,d) *un espacio métrico y*

$$iso(X,d) = \left\{ f : X \to X \mid f \text{ es isometria biyectiva} \right\}$$

Demuestra que $iso(X,d)$ *es un grupo respecto a la composición.*

Demostración:

• Veamos que la operación es cerrada, es decir, $\forall f,g \in iso(X)$ $f \circ g \in iso(X)$.

En efecto, como f y g son biyectivas, la composición seguirá siendo biyectiva. Ahora sean $x,y \in X$, entonces

$$d((f\circ g)(x),(f\circ g)(y)) = d(f(g(x)),f(g(y))) \underset{f \text{ iso}}{\overset{g(x),g(y)\in X}{=}} d(g(x)),g(y)) \underset{g \text{ iso}}{\overset{x,y\in X}{=}} d(g(x)),g(y))$$

con lo que $f \circ g \in iso(X)$.

• Veamos que existe un elemento neutro. Es decir, que existe $g \in iso(X)$ tal que $g \circ f = f \circ g = f$

Veamos que la función $id_X : X \to X$, es el neutro en esta operación. Claramente la identidad es una función biyectiva, además como tenemos la misma métrica en el dominio como en el codominio se tiene que $d(id_X(x), id_X(y)) = d(x,y) \quad \therefore \quad id_X \in iso(X)$ y además

$$(id_X \circ f)(x) = id_X(f(x)) = f(x) = f(id_X(x)) = (f \circ id_X)(x)$$

• La operación es asociativa, esto es, $\forall f,g,h \in iso(X) \Rightarrow (f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$, pues la composición de funciones lo es.

• Finalmente veamos que existen inversos, esto es, para cada $f \in iso(X)$, existe $g \in iso(X)$ tal que $f \circ g = g \circ f = id_X$.

Dado $f \in iso(X)$, se tiene que f es biyectiva por lo que f^{-1} existe y será biyectiva. Ahora sean $f(x) = \tilde{x} \in X$ y $f(y) = \tilde{y} \in X$, por lo que, $f^{-1}(\tilde{x}) = x$ y $f^{-1}(\tilde{y}) = y$, de esta manera

$$d(f^{-1}(\tilde{x}), f^{-1}(\tilde{y})) = d(x,y) \underset{f \text{ iso}}{=} d(f(x), f(y)) = d(f(f^{-1}(\tilde{x})), f(f^{-1}(\tilde{y}))) = d(\tilde{x}, \tilde{y})$$

$\therefore$ f^{-1} es isometría $\therefore$ $f^{-1} \in iso(X)$. Así tomando $g = f^{-1}$ es tal que $f \circ g = g \circ f = id_X$.

$\therefore$ $iso(X)$ es un grupo con la operación composición. ■

• Problema 15. – *Sea* $(V, \| \ \|)$ *un espacio normado y sea* $M = \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$. *Describe a* p_M *en términos de* $\| \ \|$.

Demostración: Veamos que efectivamente M cumple lo del ejercicio 14.

• $0_V \in M$.
Como $\|0\| = 0 \leq 1 \ \Rightarrow \ 0 \in M$.

• $\forall v, w \in M$ y $t \in [0,1]$, $tv + (1-t)w \in M$.
Sean las hipótesis, entonces $\left\|tv + (1-t)w\right\| \leq \left\|tv\right\| + \left\|(1-t)w\right\| = t\left\|v\right\| + (1-t)\left\|w\right\| \underset{v,w \in M}{\leq} t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1$

$\Rightarrow$ $\left\|tv + (1-t)w\right\| \leq t + (1-t) = 1$ $\therefore$ $tv + (1-t)w \in M$.

• $\forall v \in M$ y $t \in [-1,1]$ $\Rightarrow$ $tv \in M$.
Tendremos que $\|tv\| = |t|\|v\| \leq 1 \cdot \|v\| \leq 1$ por lo que $tv \in M$.

• $\forall v \in V$ $\exists t > 0$ t.q $tv \in M$
Si $v = 0$ entonces tomo $t = 0$ y asi $\|tv\| = 0 \leq 1$ $\Rightarrow$ $tv \in M$, entonces sea $v \in M - \{0\}$ y $t = \frac{1}{\|v\|}$,
entonces $\|tv\| = \left\|\frac{1}{\|v\|} v\right\| = \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1$ $\Rightarrow$ $tv \in M$.

• $\forall v \in V - \{0\}$ $\exists t > 0$ t.q $tv \notin M$
Sea $v \in V$. Si $\|v\| > 1$ $\Rightarrow$ $1 \cdot v \notin M$. Si $\|v\| \leq 1$ sea $t = \frac{2}{\|v\|^2}$ de esta manera $\|tv\| = \frac{2}{\|v\|} > 1$ y entonces $tv \notin M$.

Con esto, por el problema 14, $P_M(v)$ es una norma sobre V y además

$$P_M(v) = \inf\left\{t > 0 : \tfrac{1}{t} v \in M\right\} = \inf\left\{t > 0 : \left\|\tfrac{1}{t} v\right\| \leq 0\right\} = \text{nf}\left\{t > 0 : \|v\| \leq t\right\} = \|v\| \ ■$$

• Problema 17. – *Para* $x, y \in \mathbb{R}$ *definamos las siguientes funciones*

a) $d_1(x,y) = (x-y)^2$

b) $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$

c) $d_3(x,y) = \left|x^2 - y^2\right|$

d) $d_4(x,y) = |x - 2y|$

e) $d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$

Indica cuales son métricas sobre $\mathbb{R}$.

Demostración:

a) $d_1(x,y) = (x-y)^2$

No es métrica pues no cumple la desigualdad del triángulo, tenemos que $d_1(4,1) = (4-1)^2 = 9$ y $d_1(4,2) + d_1(2,1) = (4-2)^2 + (2-1)^2 = 5 \quad \therefore \quad d_1(4,1) \not\leq d_1(4,2) + d_1(2,1)$.

b) $d_1(x,y) = \sqrt{|x-y|}$

Si es métrica.

- $d_1(x,y) = 0 \iff \sqrt{|x-y|} = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y$
- $d_1(x,y) = \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|y-x|} = d_1(y,x)$
- $d_1(x,y) = \sqrt{|x-y|} \underset{\sqrt{\ }\text{ creciente}}{\leq} \sqrt{|x-z| + |z-y|}$ [ζ]$\leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|} = d_1(x,z) + d_1(z,y)$

c) $d_1(x,y) = \left|x^2 - y^2\right|$

No es métrica, pues para $x = 2$ y $y = -2$ se tiene que $d_1(2,-2) = \left|2^2 - (-2)^2\right| = 0$ aunque $x \neq y$.

d) $d_1(x,y) = |x - 2y|$

No es métrica, pues para $x = 1$ y $y = \frac{1}{2}$ se tiene que $d_1(1,\frac{1}{2}) = \left|1 - 2(\frac{1}{2})\right| = 0$ aunque $x \neq y$.

e) $d_1(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$

Si es métrica.

- $d_1(x,y) = 0 \iff \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y$
- $d_1(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = \frac{|y-x|}{1+|y-x|} = d_1(y,x)$

[ζ] Esta se da porque para $a,b \geq 0$, $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

• Primero, tenemos que para todo $a, b \geq 0$ se cumple que (*) $\frac{1}{1+a+b} \geq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} - 1$.[ψ]

Entonces tenemos que

$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y| \;\Rightarrow\; 1+|x-y| \leq 1+|x-z|+|z-y| \;\Rightarrow\; \frac{1}{1+|x-y|} \geq \frac{1}{1+|x-z|+|z-y|}$$

y por la propiedad mencionada arriba usada para $a = |x-y|$ y $b = |z-y|$ tendremos que

$$\frac{1}{1+|x-y|} \geq \frac{1}{1+|x-z|+|z-y|} \underset{(*)}{\geq} \frac{1}{1+|x-z|} + \frac{1}{1+|z-y|} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+|x-y|} \geq \frac{1}{1+|x-z|} + \frac{1}{1+|z-y|} - 1 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{1+|x-y|} \leq 1 - \left(\frac{1}{1+|x-z|} + \frac{1}{1+|z-y|}\right)$$

$$1 - \frac{1}{1+|x-y|} \leq 1 - \frac{1}{1+|x-z|} + 1 - \frac{1}{1+|z-y|} \;\Rightarrow\; \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|}$$

$$\therefore\; d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(z,y).$$

Por lo que sí es métrica. ■

[ψ] Esto se demuestra en la parte final del documento.