Análisis Matemático I

Tarea 1

Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

1. – Sea X un conjunto arbitrario y $d : \mathrm{X}^2 \to \mathbb{R}$. Demostrar que d es métrica si, y solo si:

(1) $\forall x, y \in \mathrm{X}\ [\ d(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y\ ]$
(2) $\forall x, y, z \in \mathrm{X}\ [\ d(x,y) \le d(x,z) + d(y,z)\ ]$

Demostración: La ida es trivial, pues partiendo de la suposición de que d es métrica se cumple (1), además por la desigualdad del triángulo $\forall x, y, z \in \mathrm{X}\ [\ d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)\ ]$ pero como d es métrica $d(y,z) = d(z,y)$, quedando demostrada la propiedad (2).
Recíprocamente supongamos que $d : \mathrm{X}^2 \to \mathbb{R}$ cumple (1) y (2), y notemos que vasta probar que $\forall x, y \in \mathrm{X}\ [\ d(x,y) = d(y,x)\ ]$. Por la propiedad (2) tenemos que

$$d(x,y) \le d(x,x) + d(y,x) \ \Rightarrow\ d(x,y) \le d(y,x)$$
$$\text{y}$$
$$d(y,x) \le d(y,y) + d(x,y) \ \Rightarrow\ d(y,x) \le d(x,y)$$

por lo tanto, $d(y,x) \le d(x,y) \le d(y,x)\ \therefore\ d(x,y) = d(y,x)$ y así d es métrica. ■

2. – Sea X un conjunto arbitrario y

$$\left\{ f : \mathrm{X} \to \mathbb{R} \mid im(f) \text{ es acotado} \right\} = B(\mathrm{X},\mathbb{R})$$

Demuestra que la función $d : B(\mathrm{X},\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(f,g) = \sup_{x \in \mathrm{X}} \left\{ \left| f(x) - g(x) \right| \right\}$$

está bien definida y es métrica sobre $B(\mathrm{X},\mathbb{R})$.

Demostración: Primeramente, veamos que la función está bien definida.
Sean $f, g \in B(\mathrm{X},\mathbb{R})$, por hipótesis tendremos que $im(f)$ y $im(g)$ son conjuntos acotados, por lo que existen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que $\left| f(x) \right| \le r_1\ \ \forall x \in \mathrm{X}$ y $\left| g(x) \right| \le r_2\ \ \forall x \in \mathrm{X}$, así:

$$\left|f(x)-g(x)\right| \overset{D.triangulo}{\leq} \left|f(x)\right|+\left|g(x)\right| \leq r_1+r_2 \quad \forall x \in \mathrm{X}$$

Esto me dice que el conjunto $\left\{\left|f(x)-g(x)\right| : x \in \mathrm{X}\right\}$ esta acotado superiormente por r_1+r_2 y por el axioma del supremo el conjunto tiene supremo, es decir, $d(f,g)=\sup\limits_{x\in \mathrm{X}}\left\{\left|f(x)-g(x)\right|\right\}$ esta bien definida para cada $f,g \in B(\mathrm{X},\mathbb{R})$.
Ahora demostraremos que efectivamente, la función es métrica sobre $B(\mathrm{X},\mathbb{R})$:

$*$ Si $f=g$ es claro que $d(f,g)=\sup\limits_{x\in \mathrm{X}}\left\{0\right\}=0$, entonces supongamos que $d(f,g)=0$ y esto es si, y solo si $\sup\limits_{x\in \mathrm{X}}\left\{\left|f(x)-g(x)\right|\right\}=0$, pero por definición del supremos sabemos que para cada $x \in \mathrm{X}$ se tiene que $\sup\limits_{x\in \mathrm{X}}\left\{\left|f(x)-g(x)\right|\right\} \geq \left|f(x)-g(x)\right| \;\Rightarrow\; 0 \geq \left|f(x)-g(x)\right| \geq 0$ por lo que $\left|f(x)-g(x)\right|=0 \;\Rightarrow\; f(x)=g(x)$ para cada $x \in \mathrm{X}$, es decir, $f=g$.

$*$ Por el problema 1, solo falta probar que $\forall f,g,h \in B(\mathrm{X},\mathbb{R})$ $[\ d(f,g) \leq d(f,h)+d(g,h)\ ]$. Entonces consideremos $f,g,h \in B(\mathrm{X},\mathbb{R})$ y así, para cada $x \in \mathrm{X}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\left|f(x)-g(x)\right| &= \left|f(x)-h(x)+h(x)-g(x)\right| \\ &\leq \left|f(x)-h(x)\right|+\left|h(x)-g(x)\right| \\ &= \left|f(x)-h(x)\right|+\left|g(x)-h(x)\right|\end{aligned}$$

además, sabemos por la definición del supremo que

$$\left|f(x)-h(x)\right| \leq \sup_{x\in \mathrm{X}}\left\{\left|f(x)-h(x)\right|\right\} \quad \text{y} \quad \left|g(x)-h(x)\right| \leq \sup_{x\in \mathrm{X}}\left\{\left|g(x)-h(x)\right|\right\}$$

obtenido finalmente que

$$\begin{aligned}&\left|f(x)-g(x)\right| \leq \sup_{x\in \mathrm{X}}\left\{\left|f(x)-h(x)\right|\right\}+\sup_{x\in \mathrm{X}}\left\{\left|g(x)-h(x)\right|\right\} \\ \therefore\ &\left|f(x)-g(x)\right| \leq d(f,h)+d(g,h) \ \text{ para cada } x \in \mathrm{X}\end{aligned}$$

esto me dice que $d(f,h)+d(g,h)$ es cota superior de $\left\{\left|f(x)-g(x)\right| : x \in \mathrm{X}\right\}$ y por tanto $d(f,g) \leq d(f,h)+d(g,h)$. ∎