Análisis Matemático I

Tarea 2

Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

1. – Considera las siguientes funciones:

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 + \min\left\{\left|x\right|, \left|x-1\right|, \left|x-2\right|\right\}$.
- $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $h(x) = 4 + \min\left\{\left|x+1\right|, \left|x-1\right|\right\}$.
- $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $g(x) = \left|x+\sqrt{2}\right|$.

Demuestra que esas 3 funciones son admisibles sobre $(\mathbb{R}, d_e)$, y calcula las distancias de f a g, g a h, y f a h.

Demostración: Demostrare que las funciones son admisibles

En general, consideremos la función $L(x) = N + \min\left\{\left|x+a_1\right|, \left|x+a_2\right|, \ldots, \left|x+a_k\right|\right\}$ donde $a_1, .., a_k \in \mathbb{R}$ y $N \geq \frac{1}{2}\left|a_i - a_j\right| \ \forall i, j$. PD: $\left|L(x)-L(y)\right| \leq \left|x-y\right| \leq L(x)+L(y)$

1) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y supongamos que $L(x) = N + \left|x+a_i\right|$ y $L(y) = N + \left|y+a_j\right|$ para algunas $1 \leq i, j \leq k$, entonces

$$L(x) - L(y) = \left|x-a_i\right| - \left|y-a_j\right|$$

pero como

$$\left|x-a_i\right| = \min\left\{\left|x+a_1\right|, \left|x+a_2\right|, \ldots, \left|x+a_k\right|\right\} \Rightarrow \left|x+a_i\right| \leq \left|x+a_j\right|$$

de esta manera

$$L(x) - L(y) \leq \left|x-a_j\right| - \left|y-a_j\right| \leq \left|(x-a_j)-(y-a_j)\right| = \left|x-y\right|$$

Análogamente podemos hacer lo mismo para $L(y) - L(x)$ obteniendo que

$$-\left|x-y\right| \leq L(x) - L(y) \leq \left|x-y\right| \quad \Leftrightarrow \quad \left|L(x)-L(y)\right| \leq \left|x-y\right|$$

Y como esto es para cualesquiera i, j queda demostrado para cualesquiera valores de los mínimos.

2) Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}\left|x-y\right| &= \left|(x+a_i)-a_i+a_j+(-a_j-y)\right| \leq \left|x+a_i\right| + \left|-a_i+a_j\right| + \left|-a_j-y\right| \\ &= \left|x+a_i\right| + \left|a_i-a_j\right| + \left|y+a_j\right|\end{aligned}$$

pero como $N > \frac{1}{2}\left|a_i - a_j\right| \Rightarrow 2N \geq \left|a_i - a_j\right|$ y entonces

$$\left|x-y\right| = \left|x+a_i\right| + \left|a_i-a_j\right| + \left|y+a_j\right| \leq 2N + \left|x+a_i\right| + \left|y+a_j\right| = L(x)+L(y)$$

Y como esto es para cualesquiera i, j queda demostrado para cualesquiera valores de los mínimos.

$\therefore$ por 1) y 2) la función $L(x)$ es admisible.

De esta manera:

- Se tiene que para $f(x)$, $2 \geq \frac{1}{2}\left|0-1\right|$, $2 \geq \frac{1}{2}\left|0-2\right|$ y $2 \geq \frac{1}{2}\left|-1-2\right|$ por lo que es admisible.
- Se tiene que para $g(x)$, $4 \geq \frac{1}{2}\left|1-1\right|$ por lo que es admisible.

Y para $g(x)$ simplemente se tiene que $g(x)-g(y) = \left|x+\sqrt{2}\right| - \left|y+\sqrt{2}\right| \leq \left|x-y\right|$ con lo que de manera análoga $\left|g(x)-g(y)\right| \leq \left|x-y\right|$ y por otro lado $\left|x-y\right| = \left|(x+\sqrt{2})+(-\sqrt{2}-y)\right|$ $\leq \left|x+\sqrt{2}\right| + \left|y+\sqrt{2}\right| = g(x)+g(y)$ y por tanto es admisible