Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

# Análisis Matemático I

## Tarea 4

**Por:** Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

---

Problema 1. – *Sean $d_1$ y $d_2$ métricas sobre un conjunto $X$. Demuestra que:*

(a) $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por $d(x,y) = \min\{1, d_1(x,y)\}$ es una métrica y es acotada sobre $X$.

Demostración:

- Sean $x, y \in X$ tal que $d(x,y) = 0 \iff \min\{1, d_1(x,y)\} = 0 \iff d_1(x,y) = 0 \underset{d_1 \text{ metrica}}{\iff} x = y$

- Sean $x, y, z \in X$, entonces como $d_1$ es métrica se cumple que $d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(y,z)$, entonces, $\min\{1, d_1(x,y)\} \leq \min\{1, d_1(x,z) + d_1(y,z)\} \leq$ [Γ] $\min\{1, d_1(x,z)\} + \min\{1, d_1(y,z)\}$, es decir, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ $\quad \therefore$ $d$ es métrica sobre $X$. ■

⊗ La función es acotada sobre $X$, esto pues $\forall x, y \in X$, $d(x,y) = \min\{1, d_1(x,y)\} \leq 1$, pues si $\min\{1, d_1(x,y)\} = 1$ se cumple, y si $\min\{1, d_1(x,y)\} = d_1(x,y)$ es porque $d_1(x,y) < 1$. ■

(b) $d_1 + d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por $(d_1 + d_2)(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y)$ es una métrica sobre $X$.

Demostración:

- Sean $x, y \in X$ tal que $(d_1 + d_2)(x,y) = 0 \iff d_1(x,y) + d_2(x,y) = 0$, pero como $d_1$ y $d_2$ son métricas, tenemos que son no negativas y entonces la única manera en que la suma de ambas sea cero es que ambas son cero $\Rightarrow d_1(x,y) = d_2(x,y) = 0 \underset{d_1 \text{ metrica}}{\iff} x = y$.

- Sean $x, y, z \in X$, entonces como $d_1$ y $d_2$ son métricas se cumple que $d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(y,z)$ y $d_2(x,y) \leq d_2(x,z) + d_2(y,z)$, por lo que sumando ambas expresiones:

$$d_1(x,y) + d_2(x,y) \leq \left[d_1(x,z) + d_2(x,z)\right] + \left[d_1(y,z) + d_2(y,z)\right] \iff (d_1 + d_2)(x,y) \leq (d_1 + d_2)(x,z) + (d_1 + d_2)(y,z)$$

$\therefore$ $d$ es métrica sobre $X$. ■

(c) $\max(d_1, d_2) : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por $\max(d_1, d_2)(x,y) = \max(d_1(x,y), d_2(x,y))$ es una métrica sobre $X$.

Demostración:

---

[Γ] Esta es una propiedad del mínimo, pues, dados $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ se cumple que $\min(a, b+c) \leq \min(a,b) + \min(a,c)$.

- Sean $x, y \in X$ tal que $\max(d_1, d_2)(x, y) = 0 \Leftrightarrow \max(d_1(x, y), d_2(x, y)) = 0 \Leftrightarrow d_1(x, y) = d_2(x, y) = 0 \underset{d_1 \text{ metrica}}{\Leftrightarrow} x = y$.
- Sean $x, y, z \in X$, entonces como $d_1$ y $d_2$ son métricas se cumple que $d_1(x, y) \leq d_1(x, z) + d_1(y, z)$ y $d_2(x, y) \leq d_2(x, z) + d_2(y, z)$, entonces

$$\begin{aligned} \max(d_1, d_2)(x, y) = \max(d_1(x, y), d_2(x, y)) &\leq^{\Delta} \max(d_1(x, z) + d_1(y, z), d_2(x, z) + d_2(y, z)) \\ &\leq^{E} \max(d_1(x, z), d_2(x, z)) + \max(d_1(y, z), d_2(y, z)) \\ &= \max(d_1, d_2)(x, z) + \max(d_1, d_2)(y, z). \end{aligned}$$

$\therefore$ $d$ es métrica sobre $X$. ■

(d) Si $r \in \mathbb{R}$ es mayor que cero, entonces $rd_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por $(rd_1)(x, y) = r \cdot d_1(x, y)$ es una métrica en $X$.

Demostración:

- Sean $x, y \in X$ tal que $(rd_1)(x, y) = 0 \Leftrightarrow r \cdot d_1(x, y) = 0 \underset{r \neq 0}{\Leftrightarrow} d_1(x, y) = 0 \underset{d_1 \text{ metrica}}{\Leftrightarrow} x = y$.
- Sean $x, y, z \in X$, entonces $(rd_1)(x, y) = r \cdot d_1(x, y) \underset{r > 0}{\leq} r \cdot (d_1(x, z) + d_1(y, z)) = r \cdot d_1(x, z) + r \cdot d_1(y, z)$ $= (rd_1)(x, z) + (rd_1)(y, z)$ $\therefore$ $(rd_1)(x, y) \leq (rd_1)(x, z) + (rd_1)(y, z)$ $\therefore$ $d$ es métrica sobre $X$. ■

Problema 2. – *Sea $(X, d)$ un espacio métrico dotado de la métrica discreta. Considera la métrica producto del supremo vista en clase sobre $X^{\omega}$. Demuestra que dicha métrica es igual a la métrica de árbol definida a principio del curso.*

Demostración: Consideremos $X^{\omega} = \{x : \mathbb{N} \to X \mid x \text{ es función}\}$, en clase se probó que $\rho : (X^{\omega})^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ \dfrac{1}{2^{\Delta(x, y)}} & \text{si } x \neq y \end{cases} \quad \text{donde } \Delta(x, y) = \min\{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq y(n)\}$$

es una métrica sobre $X^{\omega}$, sin embargo, podemos ver a $X^{\omega}$ desde otro ángulo.

---

[Δ] Este hecho es que $0 < a \leq c$ y $0 < b \leq d$, entonces, $\max(a, b) \leq \max(c, d)$, su demostración sale con varios casos.

[E] Para $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, se cumple que $\max(a + b, c + d) \leq \max(a, c) + \max(b, d)$. Pues de la desigualdad del triángulo tenemos que $|(a + b) - (c + d)| = |(a - c) + (b - d)| \leq |a - c| + |b - d|$ y entonces $(a + b) + (c + d) + |(a + b) - (c + d)|$ $\leq (a + c) + |a - c| + (b + d) + |b - d|$ y dividiendo sobre 2 obtenemos la definición de máximo.

Claramente la métrica discreta es acotada, esto pues, $\forall x,y \in X$ se tiene que $d(x,y) \leq 1$, entonces si para cada $i \in \mathbb{N}$ escribimos $(X_i, d_i) = (X, d)$ tendremos una familia de espacios métricos tales que cada $d_i$ es acotada, entonces la función $\sigma : (\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i)^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\sigma(x,y) = \sup\left\{\frac{d_n(x(n),y(n))}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \sup\left\{\frac{d(x(n),y(n))}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

es una métrica [Σ] sobre $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$, pero como cada $X_i = X \Rightarrow \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i = X^{\omega}$, de esta manera $\sigma$ es otra métrica para el mismo espacio vectorial, más aun, demostrare que son iguales.

- Si $x = y$ entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ $x(n) = y(n)$, así por definición $\rho(x,y) = 0$, y recíprocamente $\sigma(x,y) = \sup\left\{0/2^n : n \in \mathbb{N}\right\} = 0$, entonces $\rho(x,y) = \sigma(x,y)$.
- Si $x \neq y$ entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ $t.q$ $x(n) \neq y(n)$ con lo que existe $\Delta(x,y) = \min\{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq y(n)\}$ y entonces por definición $\rho(x,y) = 1/2^{\Delta(x,y)}$, recíprocamente dado que $\forall n < \Delta(x,y) \Rightarrow x(n) = y(n)$ se tiene que $\sup\left\{d(x(n),y(n))/2^n : n \in \mathbb{N}\right\} = \sup\left\{d(x(n),y(n))/2^n : n \geq \Delta(x,y)\right\}$ pero como para los $n$ tales que $x(n) = y(n) \Rightarrow d(x(n),y(n)) = 0$ podemos no considerarlos en el supremo, es decir

$$\sigma(x,y) = \sup\left\{d(x(n),y(n))/2^n : n \geq \Delta(x,y)\right\} = \sup\left\{1/2^n : n \geq \Delta(x,y),\ x(n) \neq y(n)\right\}$$

quedándonos únicamente la "sucesión" $\frac{1}{2^n}$ PD el supremo es $1/2^{\Delta(x,y)}$.
En efecto, como $n \geq \Delta(x,y) \Rightarrow 1/2^n \leq 1/2^{\Delta(x,y)}$ $\forall n \geq \Delta(x,y)$ en particular $n \geq \Delta(x,y)$ t.q $x(n) \neq y(n)$ de esta manera $1/2^{\Delta(x,y)}$ es el máximo del conjunto, y por tanto, su supremo también.

$\therefore$ $\sigma(x,y) = 1/2^{\Delta(x,y)} = \rho(x,y)$.

$\therefore$ $\sigma = \rho$ son la misma métrica. ■

Problema 3. – *Sea* $(V, ||\cdot||)$ *un espacio normado y* $v \in V$. *Demuestra que la función* $f : \mathbb{R} \to V$ *dada por* $f(t) = tv$ *es una isometría si, y solo si* $\|v\| = 1$.

Demostración: Considerando a $\mathbb{R}$ con la métrica usual, en efecto sean $x,y \in \mathbb{R}$, entonces:
- Si $x = y \Rightarrow |x-y| = 0 = \|0\| = \|xv - yv\| = \|f(x) - f(y)\|$.

---

[Σ] La demostración se anexa al final del documento.

• Si $x \neq y \;\Rightarrow\; |x-y| = \|f(x)-f(y)\| \;\Leftrightarrow\; |x-y| = \|xv-yv\| \;\Leftrightarrow\; |x-y| = \|(x-y)v\| \;\Leftrightarrow |x-y|$ $= |x-y|\cdot\|v\| \;\Leftrightarrow\; 1 = \|v\|$. ■

Problema 4. – *Sea* $(X,d)$ *un espacio métrico y* $y_0 \in X$ *fijo. La función* $f : X \to B(X,\mathbb{R})$ *dada por* $f(x)(z) = d(x,z) - d(z,y_0)$ *esta bien definida y es una isometría.*

Demostración: La función está bien definida, pues para $x \in X$ fijo, la función de $z$, $f(x)(z)$ existe y es acotada, esto pues $|d(x,z)-d(z,y_0)| = \||d(x,z)| - |d(z,y_0)|\| \leq |d(x,y)| - |d(z,y_0)|$ (anti desigualdad del triángulo), entonces $|d(x,z)-d(y,z)| \leq d(x,z)-d(z,y_0) \underset{triangulo}{\leq} d(x,y_0)+d(z,y_0)$ $-d(z,y_0) = d(x,y_0)$ y este último es un número real fijo para cada $x \in X$.
$\therefore\ f \in B(X,\mathbb{R})$. Veamos que es isometría.

En efecto, $d_\infty(f(x),f(y)) = \sup\limits_{z\in X}\left\{|f(x)(z)-f(y)(z)|\right\} = \sup\limits_{z\in X}\left\{|d(x,z)-d(z,y_0)-[d(y,z)-d(z,y_0)]|\right\}$ $= \sup\limits_{z\in X}\left\{|d(x,z)-d(y,z)|\right\}$. PD $\sup\limits_{z\in X}\left\{|d(x,z)-d(y,z)|\right\} = d(x,y)$.

1) Tenemos que con $z = y$, $d(x,y) = |d(x,y)| = |d(x,y)-d(y,y)| \in \left\{|d(x,z)-d(y,z)| : z \in X\right\}$ por lo que por definición de supremo $d(x,y) \leq \sup\limits_{z\in X}\left\{|d(x,z)-d(y,z)|\right\}$

2) Por el *Problema 1* de la *Tarea No Obligatoria*[H] tenemos que $|d(x,z)-d(y,z)| \leq d(x,y)$ $+d(z,z) = d(x,y)$, con lo que $\sup\limits_{z\in X}\left\{|d(x,z)-d(y,z)|\right\} \leq \sup\limits_{z\in X}\left\{d(x,y)\right\} = d(x,y)$

Entonces por 1) y 2) tenemos que $d(x,y) \leq \sup\limits_{z\in X}\left\{|d(x,z)-d(y,z)|\right\} \leq d(x,y) \;\therefore\; \sup\limits_{z\in X}\left\{|d(x,z)-d(y,z)|\right\}$ $= d(x,y) \;\therefore\; d_\infty(f(x),f(y)) = d(x,y) \;\therefore\; f$ es isometría. ■

[H] Demostración anexada al final.

# Anexo

Proposición. – *La métrica producto del supremo* $\sigma : (\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i)^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\sigma(x,y) = \sup\left\{\frac{d_i(x(i),y(i))}{2^i} : i \in \mathbb{N}\right\}$$

*es métrica sobre* $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ .

Demostración:

- Sean $x,y \in X$ tal que $\sigma(x,y) = 0 \iff \sup\left\{d_i(x(i),y(i))\big/2^i : i\in\mathbb{N}\right\} = 0 \iff d_i(x(i),y(i))\big/2^i = 0$ $\forall i \in \mathbb{N} \iff d_i(x(i),y(i)) = 0 \underset{d_i \text{ metrica}}{\iff} x(i) = y(i)\ \forall i \quad \therefore\ x = y$ .
- Sean $x,y,z \in X$ , como para cada $i \in \mathbb{N}$ $d_i$ es métrica, se tendrá que

$$d_i(x(i),y(i)) \le d_i(x(i),z(i)) + d_i(y(i),z(i)) \Rightarrow \frac{d_i(x(i),y(i))}{2^i} \le \frac{d_i(x(i),z(i))}{2^i} + \frac{d_i(y(i),z(i))}{2^i} \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \sup\left\{\frac{d_i(x(i),y(i))}{2^i} : i\in\mathbb{N}\right\} \le \sup\left\{\frac{d_i(x(i),z(i))}{2^i} + \frac{d_i(y(i),z(i))}{2^i} : i\in\mathbb{N}\right\}$$

$$=^{\Phi} \sup\left\{\frac{d_i(x(i),z(i))}{2^i} : i\in\mathbb{N}\right\} + \sup\left\{\frac{d_i(y(i),z(i))}{2^i} : i\in\mathbb{N}\right\}$$

$\therefore\ \sigma(x,y) \le \sigma(x,z) + \sigma(y,z)\ \therefore\ \sigma$ es métrica sobre $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ . ■

Problema 1 No-Tarea. – Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Prueba que, para cualesquiera $w,x,y,z \in X$ se cumple que:

$$|\, d(w,x) - d(y,z)\, | \le d(w,y) + d(x,z)$$

Demostración: Tenemos que

$$d(w,x) \le d(w,y) + d(x,y) \le d(w,y) + [d(x,z) + d(y,z)]$$
$$\iff d(w,x) - d(y,z) \le d(w,y) + d(x,z)$$

Y, por otro lado

$$d(y,z) \le d(y,w) + d(w,z) \le d(y,w) + [d(w,x) + d(x,z)]$$
$$\iff d(y,z) \le d(w,y) + d(x,z) + d(w,x) \Rightarrow -d(w,y) - d(x,z) \le d(w,x) - d(y,z)$$

---

$\Phi$ Si $A,B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos, entonces $\sup\{A+B\} = \sup\{A\} + \sup\{B\}$ .

Juntando estas últimas desigualdades obtenemos que

$$-[d(w,y)+d(x,z)] \leq d(w,x)-d(y,z) \leq d(w,y)+d(x,z) \quad \Leftrightarrow \mid d(w,x)-d(y,z) \mid \leq d(w,y)+d(x,z) \quad \blacksquare$$