Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Análisis Matemático I

Tarea 5

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 1. – *Da una lista de todas las topologías posibles que pueden existir sobre el conjunto* $\{a,b,c\}$.

Solución: Llamemos $L = \{a,b,c\}$.
La lista será la siguiente:

$\{\emptyset, L\}$	$\{\emptyset, \{a\}, L\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, L\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, L\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, L\}$
	$\{\emptyset, \{b\}, L\}$	$\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, L\}$	$\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, L\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, L\}$
	$\{\emptyset, \{c\}, L\}$	$\{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, L\}$	$\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, L\}$	$\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, L\}$
	$\{\emptyset, \{a, b\}, L\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, L\}$		
	$\{\emptyset, \{a, c\}, L\}$	$\{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, L\}$		
	$\{\emptyset, \{b, c\}, L\}$	$\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, L\}$		
		$\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, L\}$		
		$\{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, L\}$		
		$\{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, L\}$		

$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, L\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, L\}$
$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, L\}$	
$\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, L\}$	
$\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, L\}$	
$\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b\}, L\}$	
$\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}, L\}$	

Problema 2. – *Sea* (X,τ) *un espacio topológico. Demuestra lo siguiente:*

- X y $\emptyset$ *son cerrados.*
- *Si* $\{F_i\}_{i\in I}$ *es una familia de conjuntos cerrados, entonces* $\bigcap_{i\in I} F_i$ *es cerrado.*

- *Si F, G son cerrados, entonces $F \cup G$ es cerrado.*

Demostración:

•Como τ es topología, entonces X y $\emptyset$ son conjuntos abiertos (pues pertenecen a la topología). Entonces tenemos que X es cerrado si, y solo si, $X \setminus X = \emptyset$ es abierto, lo cual es cierto. Análogamente $\emptyset$ es cerrado si, y solo si $X \setminus \emptyset = X$ es abierto, que nuevamente se cumple. ■

•Dado que $\{F_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos cerrados, se tiene que $\{X \setminus F_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos abiertos, y dado que τ es topología se cumple que $\bigcup_{i\in I} X \setminus F_i$ es abierto, pero con esto tenemos que $X \setminus \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I} X \setminus F_i$ es abierto, por lo que $\bigcap_{i\in I} F_i$ es cerrado (pues su complemento es abierto). ■

•Como F, G son cerrados, se tiene que $X \setminus F$ y $X \setminus G$ son abiertos, de esta manera como τ es topología se tiene que $(X \setminus F) \cap (X \setminus G)$ es abierto, pero esto me dice que $X \setminus (F \cup G)$ $= (X \setminus F) \cap (X \setminus G)$ es abierto, por lo que $F \cup G$ es cerrado.

Problema 3. – *Sea (X, d) espacio métrico, $x \in X$ y $e > 0$. Demuestra que el conjunto $A = \{y \in X : d(x, y) > e\}$ es abierto.*

Demostración: Sea $y \in A$ y $\varepsilon = d(x, y) - e$, como $y \in A$ se tiene que $d(x, y) > e \Rightarrow \varepsilon =$ $d(x, y) - e > 0$. PD $B_\varepsilon(y) \subseteq A$.

En efecto, sea $z \in B_\varepsilon(y)$

$$\Rightarrow d(z, y) < \varepsilon \Rightarrow d(z, y) < d(x, y) - e \Rightarrow d(z, y) < \varepsilon \Rightarrow e < d(x, y) - d(z, y)$$

Pero por la desigualdad de triangulo, $d(x, y) - d(z, y) \leq d(x, z) + d(z, y) - d(z, y) = d(x, z)$, por lo tanto: $d(x, z) > e \Rightarrow z \in A$ y así $B_\varepsilon(y) \subseteq A$ por lo que A es abierto. ■

Problema 4. – *Sea $X = [0,1) \cup (1,5]$. Demuestra que $[0,1)$ es un subconjunto abierto de X y también es cerrado en X.*

Demostración:

•) Sea $x \in [0,1)$.

Si $x = 0$, sea $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow B_{\frac{1}{2}}(0) = [0, \frac{1}{2}) \subseteq [0,1)$.

Si $x \neq 0$, consideremos $\varepsilon = \frac{\min\{|x-0|, |x-1|\}}{2}$ (Entonces $\varepsilon < |x| = x$ y $\varepsilon < |x - 1|$)

PD: $B_\varepsilon(x) \subseteq [0,1)$.

En efecto, sea $y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow |y-x| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < y-x < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + x < y < \varepsilon + x$, por otro lado, como $x \in [0,1) \Rightarrow 0 < x < 1$, entonces $1-x > 0$, y así $y < \varepsilon + x < |x-1| + x = |1-x| + x = 1-x+x = 1$ y también $y > -\varepsilon + x > -|x| + x = -x + x = 0 \therefore 0 < y < 1 \therefore y \in [0,1)$

Con lo que $\forall x \in [0,1)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq [0,1)$ y por tanto, $[0,1)$ es abierto.

•) Vamos a demostrar que $(1,5]$ es abierto.

Sea $x \in (1,5]$.

Si $x = 5$, sea $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow B_{\frac{1}{2}}(5) = (\frac{9}{2}, 5] \subseteq (1,5]$.

Si $x \neq 5$, consideremos $\varepsilon = \frac{\min\{|x-1|,|x-5|\}}{2}$ (Entonces $\varepsilon < |x-1|$ y $\varepsilon < |x-5|$) PD: $B_\varepsilon(x) \subseteq (1,5]$.

En efecto, sea $y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow |y-x| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < y-x < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + x < y < \varepsilon + x$, por otro lado, como $x \in (1,5] \Rightarrow 1 < x < 5$, entonces $5-x > 0$, y así $y < \varepsilon + x < |x-5| + x = |5-x| + x = 5-x+x = 5$ y también $y > -\varepsilon + x > -|x-1| + x = -(x-1) + x = 1 \therefore 1 < y < 5 \therefore y \in (1,5]$

Con lo que $\forall x \in (1,5]$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq (1,5]$ y por tanto, $(1,5]$ es abierto. De esta manera $X \setminus (1,5] = [0,1)$ es cerrado.

Que un conjunto sea abierto No implica que no sea cerrado.
Que un conjunto sea abierto No implica que no sea cerrado.
Que un conjunto sea abierto No implica que no sea cerrado.
Que un conjunto sea abierto No implica que no sea cerrado.
Que un conjunto sea abierto No implica que no sea cerrado.

Problema 5. – *Considera el siguiente subconjunto de* $[0,1]^\omega$.

$$A = \{\hat{x} \in [0,1]^\omega : \exists n \in \mathbb{N}\ (\hat{x}(n) = 1)\}$$

Demuestra que A *no es abierto en* $[0,1]^\omega$ *y tampoco es cerrado, si consideramos a* $[0,1]^\omega$ *con la métrica de la suma.*

Demostración:

•) Veamos que no es abierto. PD: $\exists \hat{x} \in A$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(\hat{x}) \not\subseteq A$.

Sea $\hat{x}(n) = 1$ la función idénticamente 1, entonces $\hat{x} \in A$.

Ahora, sea $\varepsilon = 2$, y consideremos $\hat{y}(n) = \frac{1}{2}$, así:

$$d(\hat{x},\hat{y}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\hat{x}(n)-\hat{y}(n)|}{2^n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|1-\frac{1}{2}|}{2^n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < \varepsilon$$

por lo que $\hat{y} \in B_\varepsilon(x)$ pero $\hat{y} \notin A$, pues no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\hat{y}(n) = 1$.

Con esto sea $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \neq 2$ y sea $\hat{y}(n) = \frac{\varepsilon}{2}$, así:

$$d(\hat{x},\hat{y}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\hat{x}(n)-\hat{y}(n)|}{2^n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|1-\frac{\varepsilon}{2}|}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

por lo que $\hat{y} \in B_\varepsilon(x)$ pero $\hat{y} \notin A$, pues no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\hat{y}(n) = 1$.

Así para toda $\varepsilon > 0$ encontramos $\hat{y} \in B_\varepsilon(x)$ tal que $\hat{y} \notin A$ $\therefore$ $\forall \varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(x) \not\subseteq A$ por lo que A no es abierto.

•) Veamos que no es cerrado. Para ello veremos que su complemento no es abierto.
Consideremos $[0,1]^\omega \setminus A = \{\hat{x} \in [0,1]^\omega : \forall n \in \mathbb{N}\ (\hat{x}(n) \neq 1)\}$ PD $[0,1]^\omega \setminus A$ no es abierto. PD: $\exists \hat{x} \in [0,1]^\omega \setminus A$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(\hat{x}) \not\subseteq [0,1]^\omega \setminus A$.

Sea $\hat{x}(n) = 0$ la función idénticamente 0, entonces $\hat{x} \in [0,1]^\omega \setminus A$.
………… Falto : (

Problema 6. – *Sea* (X,τ) *espacio topológico, y sean* $A,B \subseteq X$. *Demuestra que:*

(*a*) *Si* $A \subseteq B$, *entonces* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$
(*b*) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
(*c*) $\operatorname{int}(\overline{\operatorname{int}(\overline{A})}) = \operatorname{int}(\overline{A})$
(*d*) A *es cerrado si y solamente si* $\overline{A} = A$
(*e*) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Demostración:
(*a*) Sabemos que $B \subseteq \overline{B}$, pero por hipótesis $A \subseteq B \Rightarrow A \subseteq \overline{B}$, pero entonces tengo un conjunto cerrado que contiene a A y como $\overline{A}$ es el conjunto cerrado más chico que contiene a A entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. ■

(b) Tenemos que $A \subseteq \overline{A}$ y $B \subseteq \overline{B} \Rightarrow A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$, y como $\overline{A} \cup \overline{B}$ es cerrado [Δ], tenemos un cerrado que contiene a $A \cup B$, por lo que $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.
Por otro lado $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B \underset{(a)}{\Rightarrow} \overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ y $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ por lo que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, teniendo la otra contención. Por tanto, son iguales. ■

(c) Sabemos que $\text{int}(\overline{A}) \subseteq \overline{A} \underset{(a)}{\Rightarrow} \overline{\text{int}(\overline{A})} \subseteq \overline{\overline{A}} \underset{(e)}{=} \overline{A} \quad \therefore \quad \overline{\text{int}(\overline{A})} \subseteq \overline{A}$ [Σ] $\Rightarrow \text{int}(\overline{\text{int}(\overline{A})}) \subseteq \text{int}(\overline{A})$.
Por el otro lado, como $\text{int}(\overline{A})$ es abierto, entonces $\text{int}(\overline{A}) = \text{int}(\text{int}(\overline{A}))$ y además como $\text{int}(\overline{A}) \subseteq \overline{\text{int}(\overline{A})}$ entonces $\text{int}(\overline{A}) = \text{int}(\text{int}(\overline{A})) \subseteq \text{int}(\overline{\text{int}(\overline{A})})$. Por lo tanto $\text{int}(\overline{\text{int}(\overline{A})}) = \text{int}(\overline{A})$. ■

(d) $\Rightarrow]$ Supongamos que A es cerrado. Por un lado sabemos que $A \subseteq \overline{A}$ y por otro, como A es cerrado y $A \subseteq A$ entonces tengo un cerrado que contiene a A por lo que por definición $\overline{A} \subseteq A$, por lo que $\overline{A} = A$.

$\Leftarrow]$ Supongamos que $\overline{A} = A$, entonces como $\overline{A}$ es cerrado, tendremos que A es cerrado. ■

(e) Por el inciso anterior, como $\overline{A}$ es cerrado, entonces $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$. ■

Problema 7. – *Sea (X,τ) un espacio topológico y $D \subseteq X$ denso. Demuestra que si $U \subseteq X$ es abierto en X, entonces $D \cap U$ es un subconjunto denso de U visto como subespacio de X.*

Demostración: Recordemos dos teoremas vistos en clase:
Teo 1. – Sea (X,τ) espacio topológico, y $Y \subseteq X$. Dado $L \subseteq Y$ se cumple que L es denso en Y sí y solo sí $Y \subseteq \overline{L}^X$.

Teo 2. – Sea (X,τ) espacio topológico, y $D \subseteq X$. Entonces D es denso en X sí y solo si $\forall U$ abierto no vacío se tiene que $U \cap D \neq \emptyset$.

Notemos que $D \cap U \subseteq U$, entonces por el *teorema 1*, bastara demostrar que [Φ] $U \subseteq \overline{D \cap U}^X$.

Por contradicción, supongamos que $U \not\subseteq \overline{D \cap U}^X$, entonces existe $x \in U$ tal que $x \notin \overline{D \cap U}^X$, esto implica que existe[Γ] $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap (D \cap U) = \emptyset \Rightarrow (B_\varepsilon(x) \cap U) \cap (D) = \emptyset$!!! pero

[Δ] Unión de cerrados es cerrado, esto pues dados dos cerrados C, D tendremos que $X \setminus D$ y $X \setminus C$ son abiertos y por tanto, $(X \setminus D) \cap (X \setminus C)$ es abierto $\Rightarrow X \setminus (D \cup C)$ es abierto y por tanto $D \cup C$ es cerrado.

[Σ] Esto es porque si $C \subseteq D \Rightarrow \text{int}(C) \subseteq \text{int}(D)$, fue demostrado en clase.

[Φ] Esto pues dado $U \subseteq X$, queremos demostrar que $D \cap U \subseteq U$, es denso en U y esto será si y solo sí $U \subseteq \overline{D \cap U}^X$.

[Γ] Vimos que $x \in \overline{L}$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0 \;\; B_\varepsilon(x) \cap L \neq \emptyset$, por contrapuesta se tiene lo escrito.

esto es absurdo. Pues por el *teorema 2* como D es denso en X, para cualquier abierto no vacío subconjunto de X se tiene que su intersección con D es no vacía, sin embargo tenemos que $B_\varepsilon(x) \cap U$ es un abierto (intersección de abiertos) no vacío (x está en la bola y por hipótesis está en U) por lo que su intersección con D debería ser no vacía.

Por lo tanto, $U \subseteq \overline{D \cap U}^X$ $\therefore$ por el *teorema 1*, $D \cap U$ es denso en U.