MATEMÁTICAS

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Análisis Matemático II
Parcial I

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 1.1. – *Sean* $a_n, b_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. *Pruebe que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{|a_i|^2 + |b_i|^2}\right)^2$$

Demostración: Consideremos el vector $c_i = (|a_i|, |b_i|)$ para cada i, entonces por la desigualdad del triángulo tenemos

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} c_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|c_i\| \;\Rightarrow\; \left\|\left(\Sigma_{i=1}^{n} |a_i|, \Sigma_{i=1}^{n} |b_i|\right)\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|(|a_i|, |b_i|)\|$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\Sigma_{i=1}^{n} |a_i|\right)^2 + \left(\Sigma_{i=1}^{n} |b_i|\right)^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|a_i|^2 + |b_i|^2}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{|a_i|^2 + |b_i|^2}\right)^2$$

■

Problema 1.2. – *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *y* $P \in \wp[a,b]$. *Definimos la longitud parcial de la curva* $y = f(x)$ *en* $[a,b]$ *como:*

$$L_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[x_k - x_{k-1}]^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}$$

de donde la longitud de la curva $y = f(x)$ *en* $[a,b]$ *se define como:*

$$L_a^b(f) = \sup\{L_P(f) : P \in \wp[a,b]\}$$

demuestre que

$$\sqrt{\left(V_a^b(f)\right)^2+\left(b-a\right)^2}\le L_a^b(f)\le V_a^b(f)+(b-a)$$

Demostración:

• Si $V_a^b(f)=0$ entonces f es constante y efectivamente su longitud será $b-a$.

• Si $V_a^b(f)<\infty$. Así sea $P=\{x_0,..,x_n\}\in\wp[a,b]$

Consideremos $a_i=f(x_i)-f(x_{i-1})$ y $b_i=x_i-x_{i-1}$, entonces por el problema 1.1

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n|a_i|\right)^2+\left(\sum_{i=1}^n|b_i|\right)^2}\le\sum_{i=1}^n\sqrt{|a_i|^2+|b_i|^2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n f(x_i)-f(x_{i-1})\right)^2+\left(\sum_{i=1}^n x_i-x_{i-1}\right)^2}\le\sum_{i=1}^n\sqrt{(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2+(x_i-x_{i-1})^2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\left(V_a^b(f)\right)^2+\left(b-a\right)^2}\le L_P(f)\le L_a^b(f)$$

Para la segunda desigualdad considerando $c_i=(a_i,b_i)$ tendremos por análisis I que $\|c_i\|\le\|c_i\|_1$, entonces

$$\sum_{i=1}^n\sqrt{(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2+(x_i-x_{i-1})^2}=\sum_{i=1}^n\|c_i\|\le\sum_{i=1}^n\|c_i\|_1$$

$$=\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|+|x_i-x_{i-1}|=\sum_{i=1}^n f(x_i)-f(x_{i-1})+\sum_{i=1}^n x_i-x_{i-1}=V_a^b(f)+(b-a)$$

por lo tanto $L_P(f)\le V_a^b(f)+(b-a)\ \forall P\in\wp[a,b]$ por lo que por definición de supremo $L_a^b(f)\le V_a^b(f)+(b-a)$

■

Problema 1.3. – *Demuestra que $f\in BV[a,b]$ sí, y solo si, $L_a^b(f)<\infty$.*

Demostración:

$\Rightarrow$] Supongamos que $f\in BV[a,b]$ entonces $V_a^b(f)<\infty$, y entonces por el problema 1.2 $L_a^b(f)\le V_a^b(f)+(b-a)<\infty$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $V_a^b(f)<\infty$ entonces por el problema 1.2

$$\left(V_a^b(f)\right)^2+\left(b-a\right)^2\le L_a^b(f)^2\ \Leftrightarrow\ \left(V_a^b(f)\right)^2\le L_a^b(f)^2-\left(b-a\right)^2\ \Leftrightarrow\ V_a^b(f)\le\sqrt{L_a^b(f)^2-\left(b-a\right)^2}$$

y como $L_a^b(f)$ es finito, entonces $V_a^b(f)$ es finita, por lo que $f \in BV[a,b]$.

$\blacksquare$

Problema 3. – *Sea* $f \in C[a,b]$ *y* g *estrictamente creciente en* $[a,b]$. *Probar que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f|^n \, dg\right)^{1/n} = \|f\|_{[a,b]}$$

Demostración: Notemos que como $f \in C[a,b] \Rightarrow |f| \in C[a,b]$ (esto es pues $\big||f(x)|-|f(y)|\big| \leq |f(x)-f(y)|$ entonces se da la definición de limite) y entonces $|f|^n \in C[a,b] \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (composición con x^n que es continua), y dado que g estrictamente creciente en $[a,b]$, por Teorema visto en clase tenemos que $|f|^n \in R_a^b[g]$, con lo cual el límite está bien definido.

Ahora, por lo visto en clases (18 de marzo) tenemos que

$$\int_a^b |f|^n \, dg \leq \left\||f|^n\right\|_{[a,b]} V_a^b(g)$$

(Como g estrictamente creciente en $[a,b] \Rightarrow$ es de variación acotada y existe $V_a^b(g)$ y es distinto de cero)

Afirmación: $\left\||f|^n\right\|_{[a,b]} \leq \|f\|^n{}_{[a,b]} \; \forall n \in \mathbb{N}$

En efeto, sea $x \in [a,b]$, entonces $|f(x)|^n = |f(x)| \underbrace{\cdots}_{n \text{ veces}} |f(x)| \leq \|f\|_{[a,b]} \underbrace{\cdots}_{n \text{ veces}} \|f\|_{[a,b]} = \|f\|^n{}_{[a,b]}$ y entonces $\|f\|_{[a,b]}$ es cota superior de $\{|f(x)|^n : x \in [a,b]\}$ y entonces $\sup\{|f(x)|^n : x \in [a,b]\} \leq \|f\|^n{}_{[a,b]}$, es decir, $\left\||f|^n\right\|_{[a,b]} \leq \|f\|^n{}_{[a,b]}$.

Con esto tenemos que

$$\int_a^b |f|^n \, dg \leq \|f\|^n{}_{[a,b]} V_a^b(g) \; \forall n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \left(\int_a^b |f|^n \, dg\right)^{1/n} \leq \left(\|f\|^n{}_{[a,b]}\right)^{1/n} \left(V_a^b(g)\right)^{1/n} \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b |f|^n \, dg\right)^{1/n} \leq \|f\|_{[a,b]} \left(V_a^b(g)\right)^{1/n} \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f|^n \, dg\right)^{1/n} \leq \lim_{n\to\infty} \|f\|_{[a,b]} \left(V_a^b(g)\right)^{1/n} = \|f\|_{[a,b]} \lim_{n\to\infty}\left(V_a^b(g)\right)^{1/n}$$

y sabemos que $\forall a \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$, por lo que $\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f|^n \, dg\right)^{1/n} \leq \|f\|_{[a,b]}$

PD $\|f\|_{[a,b]} \leq \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f|^n \, dg\right)^{1/n}$

Falto.... : (

Problema 4. – *Sea* $p \in C[a,b]$, $P \geq 0$, $c > 0$ *tales que si* $p(x) \leq c\int_a^x p(t)dt$ $\forall x \in [a,b]$. *Demuestra que* $p(x) = 0$ en $[a,b]$.

Demostración: Sea $g(x) = \int_a^x p(t)dt$, la cual es de clase C^1 pues $g'(x) = p(x)$.

Como por hipótesis $0 \leq p(x) \leq c\int_a^x p(t)dt \;\Rightarrow\; 0 \leq g'(x) \leq cg(x)$, de esta manera como $p \in C[a,b]$ entonces existe $M = \sup_{x\in[a,b]} |p| = \sup_{x\in[a,b]} p$, y así por el TVM-I se tiene que $\int_a^x p(t)dt \leq M(x-a)$, es decir, $g(x) \leq M(x-a)$

Ahora, con todo lo anterior tenemos que

$$g'(t) \leq cg(t) \leq cM(x-a) \;\Rightarrow\; \int_a^x g'(t)dx \leq \int_a^x cM(x-a)dx$$

$$\Rightarrow\; g(x) - g(a) \leq \frac{cM(x-a)^2}{2} \;\Rightarrow\; g(x) \leq \frac{cM(x-a)^2}{2}$$

pero esto quiere decir que $g'(x) \leq cg(x) \leq \dfrac{c^2M(x-a)^2}{2}$ y nuevamente tenemos que $g'(t) \leq \dfrac{c^2M(t-a)^2}{2}$ con lo que

$$\int_a^x g'(t)dx \leq \int_a^x \frac{c^2M(x-a)^2}{2}dx \Rightarrow g(x) - g(a) \leq \frac{c^2M(x-a)^3}{3!} \;\Rightarrow\; g(x) \leq \frac{c^2M(x-a)^3}{3!}$$

y así $g'(x) \leq cg(x) \leq \dfrac{c^3M(x-a)^3}{3!}$, de esta forma podemos proceder de manera inductiva, teniendo que $0 \leq g'(x) \leq \dfrac{c^nM(x-a)^n}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $0 \leq g'(x) \leq \lim_{n\to\infty} \dfrac{c^nM(x-a)^n}{n!} = 0$

$\therefore\ g'(x) = 0$ es decir $\int_a^x p(t)dt = 0$ y como p es continua y tal que $p(t) \geq 0$ esto pasa si y solo si $p(t) = 0\ \forall t \in [a,x]\ \forall x \in [a,b] \ \Rightarrow\ p(x) = 0\ \forall x \in [a,b]$.

$\blacksquare$