Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Análisis Matemático II

Parcial II

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 1. –

Sea $\mathbb{E} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subset \mathcal{P}(X)$ dada, denotamos

$$A^a = \begin{cases} A & \text{si } a = 0 \\ A^c & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

Para cada $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \{0,1\}^n$ definimos $E_a = A_1^{a_1} \cap A_2^{a_2} \cap \cdots \cap A_n^{a_n}$. Pruebe:

i) $\mathcal{A}(\mathbb{E}) = \left\{ \bigcup_{a \in D} E_a : D \subset \{0,1\}^n \right\}$ (convenimos en poner $\bigcup_{a \in \emptyset} E_a = \emptyset$).

ii) Concluya que $\#(\mathcal{A}(\mathbb{E})) \leq 2^{2^n}$

(Sugerencia: para probar la cerradura bajo complementación en (i), empiece con E_a y luego trate el caso general).

Demostración:

(i) Por lo visto en clase sabemos que, dada una clase cualquiera, el algebra generada viene dada por $A(\mathrm{E}) = \Theta^3$, con lo que vasta probar que $\Theta^3 = \{\bigcup_{a \in D} E_a : D \subset \{0,1\}^n\}$.

Tenemos que

$$\Theta^{\mathrm{E}} = \{E \in \wp(X) : E \in \mathrm{E} \text{ ó } E^c \in \mathrm{E}\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n, A_1{}^c, A_2{}^c, \dots, A_n{}^c\}$$

con ello

$$\Theta^1 = \{A_1, A_2, \dots, A_n, A_1{}^c, A_2{}^c, \dots, A_n{}^c, \varnothing, X\}$$

con veamos tenemos que

$$\Theta^2 = \{\bigcap_{i=1}^m F_i : F_i \in \Theta^1,\ m \in \mathbb{N}\}$$

entonces como $F_i \in \Theta^1$ tendremos que $F_i = A_{j_i}{}^{a_i}$, con lo que $E = \bigcap_{i=1}^{m} A_{j_i}{}^{a_i}$, y al ser $\varnothing = A_1{}^c \cap A_1 \;\Rightarrow\; \varnothing \in \Theta^2 \;\therefore\; X \in \Theta^2$, entonces

$$\Theta^2 = \{ \bigcap_{i=1}^{m} A_{j_i}{}^{a_i} : m \in \mathbb{N} \} \cup \{X\}$$

finalmente queremos probar que $\Theta^3 = \{ \bigcup_{a \in D} E_a : D \subset \{0,1\}^n \} = L$.

$\subseteq]$ Sea $G \in \Theta^3 \;\Rightarrow G = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\tilde{n}} F_i,\; F_i \in \Theta^2$, y como $F_i \in \Theta^2 \;\Rightarrow\; F_i = \bigcap_{k=1}^{m_i} A_{j_k}{}^{a_k}$ o $F_i = X$.

Caso 1: Si un $F_i = X$. Entonces tendremos que $G = X$ y veamos que $X \in L$.

En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}
X = A_1 \cup A_1{}^c &= (A_1 \cup A_1{}^c) \cap (A_2 \cup A_2{}^c) = (A_1 \cup A_1{}^c) \cap A_2 \cup (A_1 \cup A_1{}^c) \cap A_2{}^c \\
&= (A_1 \cap A_2) \cup (A_1{}^c \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2{}^c) \cup (A_1{}^c \cap A_2{}^c) \\
&= [(A_1 \cap A_2) \cup (A_1{}^c \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2{}^c) \cup (A_1{}^c \cap A_2{}^c)] \cap (A_3 \cup A_3{}^c) \\
&\;\;\vdots \\
&= (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1{}^c \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2{}^c \cap A_3) \cup (A_1{}^c \cap A_2{}^c \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3{}^c) \\
&\quad \cup (A_1{}^c \cap A_2 \cap A_3{}^c) \cup (A_1 \cap A_2{}^c \cap A_3{}^c) \cup (A_1{}^c \cap A_2{}^c \cap A_3{}^c)
\end{aligned}$$

y haciendo estos pasos de manera inductiva obtendremos que $X = E_{a_1} \cup \cdots \cup E_{a_{2^n}}$ por lo que $X \in L$.

Caso 2: Si ningún $F_i = X$.

Obs.- Para lo que haremos a continuación usaremos la siguiente propiedad de los conjuntos $C \cap D = [C \cap D \cap K] \cup [C \cap D \cap K^c]$

Tenemos que

$$G = [\bigcap_{k=1}^{m_1} A_{j_k}{}^{a_k}] \cup [\bigcap_{k=1}^{m_2} A_{j_k}{}^{a_k}] \cup \cdots \cup [\bigcap_{k=1}^{m_{\tilde{n}}} A_{j_k}{}^{a_k}]$$

si alguna de las intersecciones es vacía (esto pues hay dos complementos intersecándose) no afectara a nuestra unión por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que todas las intersecciones son no vacías, i.e, que no hay dos complementos de un mismo conjunto en las intersecciones, por lo que cada intersección tiene a un solo $A_i{}^{a_i}$ no a su complemento.

Con esto tendremos que para cualquiera de las m si $m_i = n$ entonces necesariamente tendremos a todos los posibles $A_i{}^{a_i}$, es decir, $\bigcap_{k=1}^{m_2} A_{j_k}{}^{a_k} = A_1{}^{a_1} \cap \cdots \cap A_n{}^{a_n} = E_a$, para algún $a \in \{0,1\}^n$ y no tenemos nada que hacer, si pasa que $m_i < n$, entonces nos faltan elementos en la intersección y los agregaremos de la siguiente manera:

Consideremos la intersección $\bigcap_{k=1}^{m_i} A_{j_k}{}^{a_k} = A_{j_1}{}^{a_1} \cap A_{j_2}{}^{a_2} \cap \cdots \cap A_{j_{m_i}}{}^{a_{m_i}}$ y supongamos que los ordenamos de menor a mayor índice, pues cada $j_k \in \{1,\ldots,n\}$. Entonces por la observación, podemos agregar los conjuntos que nos falten de la siguiente manera

$$\bigcap_{k=1}^{m_i} A_{j_k}{}^{a_k} = [\bigcap_{k=1}^{m_i} A_{j_k}{}^{a_k} \cap A_1] \cup [\bigcap_{k=1}^{m_i} A_{j_k}{}^{a_k} \cap A_1{}^c]$$

$$= [\bigcap_{k=1}^{m_i} A_{j_k}{}^{a_k} \cap A_{r_1} \cap A_{r_2}] \cup [\bigcap_{k=1}^{m_i} A_{j_k}{}^{a_k} \cap A_{r_1} \cap A_{r_2}{}^c] \cup [\bigcap_{k=1}^{m_i} A_{j_k}{}^{a_k} \cap A_{r_1}{}^c \cap A_{r_2}] \cup [\bigcap_{k=1}^{m_i} A_{j_k}{}^{a_k} \cap A_{r_1}{}^c \cap A_{r_2}{}^c]$$

prosiguiendo de esta manera agregaremos todos los conjuntos restantes, teniendo al final que

$$\bigcap_{k=1}^{m_i} A_{j_k}{}^{a_k} = E_{a_1} \cup E_{a_2} \cup \cdots \cup E_{a_{m_{2^{n-m_i}}}}$$

con lo que $G = \bigcup E_a$ para algunos $a \in D \subseteq \{0,1\}^n$, por lo que $G \in L$.

$\supseteq]$ Sea $G \in L \Rightarrow G = \bigcup_{a\in D} E_a$ para algún $D \subseteq \{0,1\}^n$, y justamente cada $E_a \in \Theta^2$ por lo que $G \in \Theta^3$.

$\therefore\ A(\mathrm{E}) = \Theta^3 = \{\bigcup_{a\in D} E_a : D \subset \{0,1\}^n\}$.

■

(ii) En efecto tenemos que por cada $D \subset \{0,1\}^n$ tendremos un elemento del conjunto, entonces el total de elementos serán menor al total de subconjunto del conjunto $\{0,1\}^n$, siendo $2^{\left|\{0,1\}^n\right|} = 2^{2^n}$, es decir, $\# A(\mathrm{E}) \leq 2^{2^n}$.

■

Problema 2. –

Sea (X, S, μ) un espacio de medida y $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de elementos de S.

i) Si $\mu(A_n \cap A_m) = 0$ para toda $n \neq m$ entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{(casi } \sigma\text{-aditividad)}$$

ii) Si $\mu(A_n \triangle B_n) = 0$ para toda n entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right),\ \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \triangle \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right)$$

$$\mu\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n \triangle \overline{\lim_{n\to\infty}}\, B_n\right) \text{ y } \mu\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n \triangle \underline{\lim_{n\to\infty}}\, B_n\right)$$

son todos iguales a cero.

Demostración:

(i) Caso 1: Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_m) = +\infty$.

Entonces tendremos que $+\infty = \mu(A_m) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = +\infty$ y por otro lado tendremos que $+\infty = \mu(A_m) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = +\infty$ por lo que son iguales.

Caso 2: Si $\mu(A_n) < +\infty\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Sabiendo que cada A_n tiene medida finita sea $F_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, y por lo visto en clase con el profesor (16 de mayo), sabemos que $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos ajenos y tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, además es claro que $F_n \subseteq A_n$ por lo que $F_n \cap A_n = F_n$ entonces podemos escribir a F_n cómo $F_n = [A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k] \cap A_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1}[A_k \cap A_n]$, entonces

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \underset{\mu\text{-medida}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1}[A_k \cap A_n])$$

ahora, como $A_k \cap A_n \subseteq A_n\ \forall 1 \leq k \leq n-1 \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n-1}[A_k \cap A_n] \subseteq A_n$ y además $\mu(\bigcup_{k=1}^{n-1}[A_k \cap A_n])$ $\leq \sum_{k=1}^{n-1} \mu(A_k \cap A_n) \underset{\text{hip}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} 0 = 0$ por lo que $\mu(\bigcup_{k=1}^{n-1}[A_k \cap A_n]) = 0 < +\infty$ y puedo aplicar sustractividad, es decir

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1}[A_k \cap A_n]) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \mu(\bigcup_{k=1}^{n-1}[A_k \cap A_n]) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\end{aligned}$$

por lo tanto $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

■

(ii)

⊙ Veamos qué $\bigcup A_n \Delta \bigcup B_n \subseteq \bigcup A_n \Delta B_n$. En efecto, sea $x \in \bigcup A_n \Delta \bigcup B_n$ entonces $(x \in \bigcup A_n$ y $x \notin \bigcup B_n)$ o $(x \notin \bigcup A_n$ y $x \in \bigcup B_n)$. En el primer caso tendremos que $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que

$x \in A_m$ y $\forall n \in \mathbb{N},\, x \notin B_n$ en particular para m, con lo que $x \in A_m$ y $x \notin B_m \Rightarrow x \in A_m \Delta B_m \subseteq \bigcup A_n \Delta B_n$, el otro caso es análogo.

Con esto tendremos que $\mu(\bigcup A_n \Delta \bigcup B_n) \leq \mu(\bigcup A_n \Delta B_n) \leq \sum \mu(A_n \Delta B_n) \underset{Hip}{=} 0$.

⊙ Ahora notemos que si $C \subseteq D$ y $E \subseteq F$ entonces $C \Delta E \subseteq D \Delta F$, pues si $x \in C \Delta E \Rightarrow$ $(x \in C$ y $x \notin E)$ o $(x \notin C$ y $x \in E)$ y en el primer caso tendremos que $x \in D$ y $x \notin F \Rightarrow x \in D \Delta F$, análogamente el otro caso.

Entonces como $\bigcap A_n \subseteq \bigcup A_n$ y $\bigcap B_n \subseteq \bigcup B_n$ entonces $\bigcap A_n \Delta \bigcap B_n \subseteq \bigcup A_n \Delta \bigcup B_n$ así $\mu(\bigcap A_n \Delta \bigcap B_n) \leq \mu(\bigcup A_n \Delta \bigcup B_n) = 0$ por lo que $\mu(\bigcap A_n \Delta \bigcap B_n) = 0$.

⊙ Sean $E_k = \bigcup_{k \geq n} A_k$ y $F_k = \bigcup_{k \geq n} A_k$, entonces notemos que por lo anterior $\mu(E_k \Delta F_k) = 0$, esto pues en las demostraciones anteriores no importaba desde donde empezaban las uniones.

Con ello $\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \Delta \overline{\lim_{n\to\infty}} B_n) = \mu(\bigcap_{n=1} \bigcup_{k \geq n} A_k \Delta \bigcap_{n=1} \bigcup_{k \geq n} B_k) = \mu(\bigcap_{n=1} E_k \Delta \bigcap_{n=1} F_k)$ y por lo anterior tenemos que $\mu(\bigcap_{n=1} E_k \Delta \bigcap_{n=1} F_k) = 0$ por lo que $\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \Delta \overline{\lim_{n\to\infty}} B_n) = 0$.

De forma análoga definiendo $E_k = \bigcap_{k \geq n} A_k$ y $F_k = \bigcap_{k \geq n} A_k$ se obtiene lo mismo para el límite inferior.

■

Problema 3. –

(La compleción de un espacio de medida).

Sea (X, S, μ) un espacio de medida y sea $\mathcal{N} = \{N \in S : \mu(N) = 0\}$ el σ-anillo de conjuntos S-medibles de medida cero. Definimos

$$\overline{S} = \{(E \cup M_1) - M_2 : E \in S \quad \text{y} \quad M_1 \subset N_i \in \mathcal{N} \quad (i = 1, 2)\}.$$

Pruebe

i) $F \in \overline{S} \Leftrightarrow F = E \cup M_0$ con $E \in S$ y M_0 un subconjunto de algún $N_0 \in \mathcal{N}$. (E y M_0 no son necesariamente únicos).

ii) $\overline{S}$ es una σ-álgebra y $S \subset \overline{S}$.
(Sugerencia: Use (i)).

iii) $\overline{\mu} : \overline{S} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $\overline{\mu}(E \cup M_0) = \mu(E)$ está bien definida, es una medida en $\overline{S}$ y $\overline{\mu}|_S = \mu$.

Demostración:

(i)

$\Rightarrow]$ Sea $F \in \overline{S} \Leftrightarrow \exists A \in S$ y $M_i \subset N_i \in N$ $(i = 1,2)$ tales que

$$
\begin{aligned}
F = [A \cup M_1] - M_2 &= (A - M_2) \cup (M_1 - M_2) \\
&= (A - [N_2 \cap M_2]) \cup (M_1 - M_2) \\
&= (A - N_2) \cup (A - M_2) \cup (M_1 - M_2) \\
&= (A \cap N_2{}^c) \cup (A \cap M_2{}^c) \cup (M_1 \cap M_2{}^c) \\
&= (A \cap N_2{}^c) \cup (A \cap [X \cap M_2{}^c]) \cup (M_1 \cap M_2{}^c) \\
&= (A \cap N_2{}^c) \cup (A \cap [(N_2 \cup N_2{}^c) \cap M_2{}^c]) \cup (M_1 \cap M_2{}^c) \\
&= (A \cap N_2{}^c) \cup (A \cap [(N_2 \cap M_2{}^c) \cup (N_2{}^c \cap M_2{}^c)]) \cup (M_1 \cap M_2{}^c) \\
&= (A \cap N_2{}^c) \cup (A \cap N_2 \cap M_2{}^c) \cup (A \cap N_2{}^c \cap M_2{}^c) \cup (M_1 \cap M_2{}^c) \\
&= (A \cap N_2{}^c) \cup (A \cap N_2 \cap M_2{}^c) \cup (A \cap N_2{}^c) \cup (M_1 \cap M_2{}^c) \\
&= (A \cap N_2{}^c) \cup (A \cap N_2 \cap M_2{}^c) \cup (M_1 \cap M_2{}^c)
\end{aligned}
$$

con esto sean $E = (A \cap N_2{}^c)$ y $M_0 = (A \cap N_2 \cap M_2{}^c) \cup (M_1 \cap M_2{}^c)$ y veamos que son los buscados. En efecto, como $A, N_2 \in S \Rightarrow A \cap N_2{}^c \in S$ y por otro lado tenemos que $M_0 = (A \cap N_2 \cap M_2{}^c) \cup (M_1 \cap M_2{}^c) \subseteq (N_2) \cup (M_1) \subseteq (N_2) \cup (N_1) := N_0$ y es tal que $N_0 \in S$ pues $N_1, N_2 \in S$ y $\mu(N_0) \le \mu(N_2) + \mu(N_1) = 0 + 0$ por lo que $N_0 \in N$. Por lo tanto $F = E \cup M_0$ es tal como se buscaba.

$\Leftarrow]$ Sea $F = E \cup M_0$ con $E \in S$ y $M_0 \subseteq N_0 \in N$, entonces $F = E \cup M_0 = [E \cup M_0] - \varnothing$ con $\varnothing \subseteq \varnothing \in N$ por lo que $F \in \overline{S}$.

■

(ii) Sea $E \in S$ entonces $E = E \cup \varnothing$ con $\varnothing \subseteq \varnothing \in N$ por lo que por (i) $E \in \overline{S}$ entonces $S \subseteq \overline{S}$, más aun, la contención es propia, si tomo $M_0 \subseteq N_0 \in N$, entonces $\varnothing \cup M_0$ cumple (i) por lo que $M_0 \in \overline{S}$ pero no necesariamente $M_0 \in S$.

Ahora veamos que es sigma algebra.

- $X \in \overline{S}$ pues $X \in S \subset \overline{S}$ como mencionamos antes.
- Sea $F \in \overline{S} \Rightarrow F = [E \cup M_1] - M_2$ con $E \in S$ y $M_i \subset N_i \in \mathrm{N}$ entonces

$$
\begin{aligned}
F^c = ([E \cup M_1] - M_2)^c = ([E \cup M_1] \cap M_2{}^c)^c &= [E^c \cap M_1{}^c] \cup M_2 \\
= (E^c \cup M_2) \cap (M_1{}^c \cup M_2) &= (E^c \cup M_2) \cap (M_1 \cap M_2{}^c)^c
\end{aligned}
$$

llamando $\tilde{E} = E^c$, $\tilde{M}_1 = M_2$ y $\tilde{M}_2 = M_1 \cap M_2{}^c$ veamos que $F^c \in \overline{S}$. En efecto tenemos que $E \in S \Rightarrow \tilde{E} = E^c \in S$, también como $\tilde{M}_1 = M_2 \subset N_2 \in N$ y $\tilde{M}_2 = M_1 \cap M_2{}^c \subseteq M_1 \subset N_1 \in N$ por lo que $F^c = [\tilde{E} \cup \tilde{M}_1] - \tilde{M}_2 \in \overline{S}$. Por lo que es cerrada bajo complementos.

• Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{S}$ entonces por (i) $F_n = E_n \cup M_n$ para cada n con $E_n \in S$ y $M_n \subset N_n \in \mathrm{N}$, entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cup M_n = [\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n] \cup [\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n]$$

sean $\tilde{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y $\tilde{M} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ veamos que se tiene que $\tilde{F} = \tilde{E} \cup \tilde{M}$ cumple (i). En efecto, como $E_n \in S\ \forall n \Rightarrow \tilde{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in S$ por ser sigan algebra, y además $\tilde{M} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n = \tilde{N}$ con $\tilde{N} \in S$ (ya que cada $N_n \in S$) y $\mu(\tilde{N}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ por lo que $\tilde{N} \in N$, por lo tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \tilde{F} \in \overline{S}$. Por lo que es cerrado bajo uniones numerables.

Por los anteriores puntos tenemos que $\overline{S}$ es sigma algebra.

(iii) Veamos primero que está bien definida, sea $F \in \overline{S}$ tal que $F = E \cup M = \tilde{E} \cup \tilde{M}$ con $E, \tilde{E} \in S$, $M \subset N \in \mathrm{N}$ y $\tilde{M} \subset \tilde{N} \in \mathrm{N}$ por lo que

$$\mu(E \cup M) = \mu(E) \text{ y } \mu(\tilde{E} \cup \tilde{M}) = \mu(\tilde{E})$$

por otro lado tenemos que

$$E \subseteq E \cup M = \tilde{E} \cup \tilde{M} \subseteq \tilde{E} \cup \tilde{N}$$
$$\text{Y}$$
$$\tilde{E} \subseteq \tilde{E} \cup \tilde{M} = E \cup M \subseteq E \cup N$$

por lo que

$$\mu(E) \leq \mu(\tilde{E} \cup \tilde{N}) \text{ y } \mu(\tilde{E}) \leq \mu(E \cup N) \text{ entonces } \mu(E \cup M) \leq \mu(\tilde{E} \cup \tilde{N}) \text{ y } \mu(\tilde{E} \cup \tilde{M}) \leq \mu(E \cup N)$$
$$\Rightarrow \mu(\tilde{E} \cup \tilde{M}) = \mu(E \cup N)$$

por tanto, está bien definida.

Ahora veamos que es medida.

• $\overline{\mu}(\varnothing) = \overline{\mu}(\varnothing \cup \varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$

• $\overline{\mu}(E \cup M) = \mu(\mathrm{E}) \geq 0$

• Sea $(E_n \cup M_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{S}$ con $E_n \in S$ y $M_n \subset N_n \in N$ tales que $(E_n \cup M_n) \cap (E_m \cup M_m) = \varnothing$ si $n \neq m$, entonces

$$(E_n \cup M_n) \cap (E_m \cup M_m) = \emptyset \;\Rightarrow\; (E_n \cap E_m) \cup (E_n \cup M_m) \cup (E_m \cup M_n) \cup (M_n \cap M_m) = \emptyset$$
$$\Rightarrow\; E_n \cap E_m = E_n \cup M_m = E_m \cup M_n = M_n \cap M_m = \emptyset \text{ si } n \neq m$$

por lo que los E_n son ajenos, con esto tendremos lo siguiente

$$\overline{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cup M_n) = \overline{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n) = \overline{\mu}(E \cup M)$$

y como cada $E_n \in S \Rightarrow E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in S$ y además $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n = N_0$ tal que $\mu(N_0) = 0$ (esto ya lo hicimos varias veces arriba) entonces

$$\overline{\mu}(E \cup M) = \mu(E) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \underset{ajenos}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

pero notemos que $E_n \subseteq E_n \cup M_n \subseteq E_n \cup N_n \Rightarrow \mu(E_n) \leq \mu(E_n \cup M_n) \leq \mu(E_n \cup N_n)$ $\leq \mu(E_n) + \mu(N_n) = \mu(E_n) + 0 = \mu(E_n)$ por lo que $\mu(E_n) = \mu(E_n \cup M_n)$ entonces

$$\overline{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cup M_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cup M_n)$$

por lo que $\overline{\mu}$ es sigma aditiva y asi por todos los puntos anteriores es medida.

Finalmente tenemos que para cada $E \in S$ se tiene que $E = E \cup \emptyset$ y entonces $\mu_{|S}(E) = \mu_{|S}(E \cup \emptyset) = \mu(E)$ por lo que $\mu_{|S} = \mu$.

■