Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

PARCIAL III

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 1. –
Sea $f \in M^+(X,S)$ tal que $\int f\, d\mu < +\infty$ Pruebe:

i) $\mu(\{x \in X : f(x)\} = +\infty) = 0$.

ii) $\{x \in X : f(x) > 0\}$ es σ-finito.

Demostración:
(i) Sea $E = \{x \in X : f(x) = +\infty\}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $E_n = \{x \in X : f(x) \geq n\}$, entonces es claro que $E \subseteq E_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ por lo que $\mu(E) \leq \mu(E_n)$, con esto bastara probar que cuando $n \to \infty \Rightarrow \mu(E_n) = 0$.

Notemos que para cada $x \in E_n \Rightarrow f(x) \geq n$ por lo que si $x \in E_n$ entonces $f(x) \geq \chi_{E_n}(x) \cdot n$, y por hipótesis $f(x) \geq 0$ por lo que si $x \notin E_n$ entonces $f(x) \geq 0 = 0 \cdot n = \chi_{E_n}(x) \cdot n$, en conclusión, $\chi_{E_n} \cdot n \leq f \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\int \chi_{E_n} \cdot n d\mu \leq \int f d\mu \quad \Leftrightarrow \quad n \int \chi_{E_n} d\mu \leq \int f d\mu \quad \Leftrightarrow \quad n\mu(E_n) \leq \int f d\mu$$
$$\Leftrightarrow \quad \mu(E_n) \leq \frac{1}{n} \int f d\mu \underset{\text{hip}}{<} +\infty \quad \forall n \geq 1$$

con esto tendremos que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int f d\mu = \int f d\mu \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

por lo tanto, $\mu(E) = 0$.

■

(ii) En efecto, para cada $n \geq 1$ sea $F_n = \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ siguiendo el mismo procedimiento que el inciso anterior tenemos que $\chi_{F_n} \cdot \frac{1}{n} \leq f$ por lo que $\mu(F_n) \leq n \int f d\mu < +\infty \quad \forall n \geq 1$.
Únicamente faltaría ver qué $\{x \in X : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.
En efecto, si $x \in \{x \in X : f(x) > 0\} \;\Leftrightarrow\; f(x) > 0 \underset{\text{prop.aquimediana}}{\Leftrightarrow} \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) > \frac{1}{n} \;\Leftrightarrow\; x \in F_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, por tanto, $\{x \in X : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ con cada $\mu(F_n) < +\infty$, es decir, es σ finito.

■

Problema 2. –

Pruebe:

i) Si (f_n) es una sucesión de elementos en $M(X,S)$ y si existe $g \in M^+(X,S)$ con $\int g\, d\mu < +\infty$ tal que $f_n \geq -g$ (c.d rel. μ) en $E \in S$ entonces:

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu$$

ii) Si existe $g \in M^+(X,S)$ con $\int g\, d\mu < +\infty$ tal que $f_n \leq -g$ (c.d rel. μ) en $E \in S$, entonces:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu \leq \int_E \varlimsup_{n\to\infty} f_n\, d\mu$$

Demostración:

Lema. – Sean $f \in M(X,S)$, $E \in S$ y $N \in N(\mu)$, entonces $\int_E fd\mu = \int_{E-N} fd\mu$.

Dem. – En efecto, como N es nulo entonces $E \cap N$ es nulo, por lo que $\int_{E\cup N} fd\mu = \int_E fd\mu + \int_N fd\mu$ y como N es nulo, entonces $\int_{E\cup N} fd\mu = \int_E fd\mu$. Por otro lado, tenemos que $\int_{(E-N)\cup N} fd\mu = \int_{E\cup N} fd\mu$ pero $\int_{(E-N)\cup N} fd\mu = \int_{E-N} fd\mu + \int_N fd\mu = \int_{E-N} fd\mu$ pues $E-N$ y N son disjuntos, así tendremos que $\int_{E-N} fd\mu = \int_{(E-N)\cup N} fd\mu = \int_{E\cup N} fd\mu = \int_E fd\mu$.

(i) Para cada $n \in \mathbb{N}$ defino $h_n := f_n + g \geq 0$, entonces como $f_n, g \in M(X,S)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tendremos que $h_n \in M^+(X,S)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y además como por hipótesis existe $F \in N(\mu)$ nulo tal que $f_n \geq -g$ en $E-F$, entonces $h_n = f_n + g \geq 0$ en $E-F$ por lo que

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_E h_n d\mu \underset{\text{lema}}{=} \varliminf_{n\to\infty} \int_{E-F} h_n d\mu$$

y como en $E-F$ se tiene que $h_n \geq 0$ entonces por el Lema de Fatou

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_{E-F} h_n d\mu \geq \int_{E-F} \varliminf_{n\to\infty} h_n d\mu$$

por lo que

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_E h_n d\mu \geq \int_{E-F} \varliminf_{n\to\infty} h_n d\mu \;\Rightarrow\; \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n - gd\mu \geq \int_{E-F} \varliminf_{n\to\infty} f_n - gd\mu$$

$$\Rightarrow\; \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu - \int_E gd\mu \geq \int_{E-F} (\varliminf_{n\to\infty} f_n) - gd\mu \;\Rightarrow\; \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu + \varliminf_{n\to\infty} -\int_E gd\mu \geq \int_{E-F} \varliminf_{n\to\infty} f_n d\mu + \int_{E-F} -gd\mu$$

$$\Rightarrow\; \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu - \int_E gd\mu \geq \int_{E-F} \varliminf_{n\to\infty} f_n d\mu - \int_{E-F} gd\mu$$

y como $\int_{E-F} gd\mu \leq \int_E gd\mu < +\infty$ entonces

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu \geq \int_{E-F}\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu \underset{\text{lema}}{=} \int_E \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu$$

por lo que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu \geq \int_E \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu$$

■

(ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ defino $h_n := -f_n - g \geq 0$, entonces como $f_n, g \in M(X,S)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tendremos que $h_n \in M^+(X,S)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y además como por hipótesis existe $F \in N(\mu)$ nulo tal que $f_n \leq -g$ en $E-F$, entonces $h_n = -f_n - g \geq 0$ en $E-F$ por lo que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E h_n d\mu \underset{\text{lema}}{=} \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_{E-F} h_n d\mu$$

y como en $E-F$ se tiene que $h_n \geq 0$ entonces por el Lema de Fatou

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_{E-F} h_n d\mu \geq \int_{E-F}\underline{\lim}_{n\to\infty} h_n d\mu$$

por lo que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E h_n d\mu \geq \int_{E-F}\underline{\lim}_{n\to\infty} h_n d\mu \;\Rightarrow\; \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E -f_n - g d\mu \geq \int_{E-F}\underline{\lim}_{n\to\infty} - f_n - g d\mu$$
$$\Rightarrow\; \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E -f_n d\mu - \int_E g d\mu \geq \int_{E-F}(\underline{\lim}_{n\to\infty} - f_n) - g d\mu \;\Rightarrow\; \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E -f_n d\mu + \underline{\lim}_{n\to\infty} - \int_E g d\mu \geq \int_{E-F}\underline{\lim}_{n\to\infty} - f_n d\mu + \int_{E-F} -g d\mu$$
$$\Rightarrow\; \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E -f_n d\mu - \int_E g d\mu \geq \int_{E-F}\underline{\lim}_{n\to\infty} - f_n d\mu - \int_{E-F} g d\mu$$

y como $\int_{E-F} g d\mu \leq \int_E g d\mu < +\infty$ entonces

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E -f_n d\mu \geq \int_{E-F}\underline{\lim}_{n\to\infty} - f_n d\mu \underset{\text{lema}}{=} \int_E \underline{\lim}_{n\to\infty} - f_n d\mu$$

por lo que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E -f_n d\mu \geq \int_E \underline{\lim}_{n\to\infty} - f_n d\mu \;\Rightarrow\; \underline{\lim}_{n\to\infty}(-1)\int_E f_n d\mu \geq \int_E -\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu \Rightarrow\; \overline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu \leq \int_E \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu$$

■

Problema 3. –

(Lema del promedio).

Sea $f \in \mathcal{L}_1(X,S,\mu)$ tal que $\left|\frac{1}{\mu(E)}\int\limits_E f\, d\mu\right| \leq k$ con $k \geq 0$ constante, para todo $E \in S$ con $0 < \mu(E) < +\infty$. Pruebe que $|f| \leq k$ (c.d rel. μ).

(Sugerencia: Empiece probando que si $f \in \mathcal{L}_1(X,S,\mu)$, entonces:

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} < +\infty,\ \text{para todo } \alpha > 0\right)).$$

Demostración: Sean $\alpha > 0$, $f \in L_1(X,S,\mu)$ y sea $A = \{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$. Probaremos que $\mu(A) = 0$. En efecto, primero notemos que

$$A = \{x \in X : f(x) > \alpha \ o \ -f(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \hat{\cup} \{x \in X : -f(x) > \alpha\}$$

y entonces si llamamos $A^+ = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$ y $A^- = \{x \in X : -f(x) > \alpha\}$, como $\mu(A) = \mu(A^+) + \mu(A^-)$ (pues son disjuntos) entonces basta probar que $\mu(A^+) = \mu(A^-) = 0$.
Para esto notemos que si $x \in A^+$ (A^-) entonces $f(x) > \alpha$ $(-f(x) > \alpha)$ y entonces $f(x) \cdot \chi_{A^+} > \alpha \cdot \chi_{A^+}$ $(-f(x) \cdot \chi_{A^-} > \alpha \cdot \chi_{A^-})$, por lo que $f \cdot \chi_{A^+} \geq \alpha \cdot \chi_{A^+}$ y $-f \cdot \chi_{A^-} \geq \alpha \cdot \chi_{A^-}$ (cuando un elemento no esté en el conjunto se cumple la igualdad), entonces

$$f \cdot \chi_{A^+} \geq \alpha \cdot \chi_{A^+} \ \Rightarrow \ \int f \cdot \chi_{A^+} d\mu \geq \int \alpha \cdot \chi_{A^+} d\mu \ \Rightarrow \ \int_{A^+} f d\mu \geq \alpha\mu(A^+)$$

Y

$$-f \cdot \chi_{A^-} \geq \alpha \cdot \chi_{A^-} \ \Rightarrow \ \int -f \cdot \chi_{A^-} d\mu \geq \int \alpha \cdot \chi_{A^-} d\mu \ \Rightarrow \ -\int_{A^-} f d\mu \geq \alpha\mu(A^-)$$

por lo que

$$\mu(A^+) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{A^+} f d\mu < +\infty \, (\text{pues } f \in L_1(\mu)) \ \Rightarrow \ \mu(A^+) < +\infty$$

para A^- si pasara que $\mu(A^-) = +\infty \ \Rightarrow \ \int_{A^+} f d\mu = -\infty$!!! lo cual es imposible, pues $f \in L_1(\mu)$, entonces $\mu(A^-) < +\infty$.

Ahora por contradicción supongamos que $\mu(A^+) > 0$ entonces sabemos que

$$\alpha\mu(A^+) \leq \int_{A^+} f d\mu \ \Rightarrow \ 0 < \alpha \leq \frac{1}{\mu(A^+)} \int_{A^+} f d\mu = \left| \frac{1}{\mu(A^+)} \int_{A^+} f d\mu \right| \ \forall \alpha > 0$$

pero por hipótesis (pues $0 < \mu(A^+) < +\infty$)

$$\left| \frac{1}{\mu(A^+)} \int_{A^+} f d\mu \right| \leq k$$

entonces en particular para $\alpha = k + 1$ tendremos que

$$k + 1 \leq \left| \frac{1}{\mu(A^+)} \int_{A^+} f d\mu \right| \leq k \ \ !!!$$

por tanto $\mu(A^+) = 0$. De forma similar tendremos que $\mu(A^-) = 0$. Por tanto $\mu(A) = \mu(A^+) + \mu(A^-) = 0$, entonces $|f| \leq k$ casi donde quiera pues el conjunto donde no se cumple (A) es nulo.

■