Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Análisis Matemático II

Tarea 1

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 1.1. – *Sean* $a_n, b_n \in \mathbb{R} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. *Pruebe que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{|a_i|^2+|b_i|^2}\right)^2$$

Demostración: Consideremos el vector $c_i = (|a_i|,|b_i|)$ para cada i, entonces por la desigualdad del triángulo tenemos

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}c_i\right\| \le \sum_{i=1}^{n}\|c_i\| \ \Rightarrow \ \left\|\left(\Sigma_{i=1}^{n}|a_i|,\Sigma_{i=1}^{n}|b_i|\right)\right\| \le \sum_{i=1}^{n}\left\|(|a_i|,|b_i|)\right\|$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\Sigma_{i=1}^{n}|a_i|\right)^2+\left(\Sigma_{i=1}^{n}|b_i|\right)^2} \le \sum_{i=1}^{n}\sqrt{|a_i|^2+|b_i|^2}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{|a_i|^2+|b_i|^2}\right)^2$$

■

Problema 1.2. – *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *y* $P \in \wp[a,b]$. *Definimos la longitud parcial de la curva* $y=f(x)$ *en* $[a,b]$ *como:*

$$L_P(f)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[x_k-x_{k-1}]^2+[f(x_k)-f(x_{k-1})]^2}$$

de donde la longitud de la curva $y=f(x)$ *en* $[a,b]$ *se define como:*

$$L_a^b(f)=\sup\{L_P(f):P\in\wp[a,b]\}$$

demuestre que

$$\sqrt{\left(V_a^b(f)\right)^2+\left(b-a\right)^2} \leq L_a^b(f) \leq V_a^b(f)+(b-a)$$

Demostración:

• Si $V_a^b(f)=0$ entonces f es constante y efectivamente su longitud será $b-a$.

• Si $V_a^b(f)<\infty$. Así sea $P=\{x_0,..,x_n\}\in\wp[a,b]$

Consideremos $a_i=f(x_i)-f(x_{i-1})$ y $b_i=x_i-x_{i-1}$, entonces por el problema 1.1

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n |a_i|\right)^2+\left(\sum_{i=1}^n |b_i|\right)^2} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{|a_i|^2+|b_i|^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n f(x_i)-f(x_{i-1})\right)^2+\left(\sum_{i=1}^n x_i-x_{i-1}\right)^2} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2+(x_i-x_{i-1})^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(V_a^b(f)\right)^2+\left(b-a\right)^2} \leq L_P(f) \leq L_a^b(f)$$

Para la segunda desigualdad considerando $c_i=(a_i,b_i)$ tendremos por análisis I que $\|c_i\| \leq \|c_i\|_1$, entonces

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2+(x_i-x_{i-1})^2} = \sum_{i=1}^n \|c_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|c_i\|_1$$

$$= \sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})|+|x_i-x_{i-1}| = \sum_{i=1}^n f(x_i)-f(x_{i-1})+\sum_{i=1}^n x_i-x_{i-1} = V_a^b(f)+(b-a)$$

por lo tanto $L_P(f)\leq V_a^b(f)+(b-a)\ \forall P\in\wp[a,b]$ por lo que por definición de supremo $L_a^b(f)\leq V_a^b(f)+(b-a)$

■

Problema 1.3. – *Demuestra que* $f\in BV[a,b]$ *sí, y solo si,* $L_a^b(f)<\infty$.

Demostración:

⇒] Supongamos que $f\in BV[a,b]$ entonces $V_a^b(f)<\infty$, y entonces por el problema 1.2 $L_a^b(f)\leq V_a^b(f)+(b-a)<\infty$.

⇐] Supongamos que $V_a^b(f)<\infty$ entonces por el problema 1.2

$$\left(V_a^b(f)\right)^2+\left(b-a\right)^2 \leq L_a^b(f)^2 \iff \left(V_a^b(f)\right)^2 \leq L_a^b(f)^2-\left(b-a\right)^2 \iff V_a^b(f) \leq \sqrt{L_a^b(f)^2-\left(b-a\right)^2}$$

y como $L_a^b(f)$ es finito, entonces $V_a^b(f)$ es finita, por lo que $f \in BV[a,b]$.

■

Problema 2. – *Evaluar las siguientes integrales.*

i) $\int_0^1 xd(x^3)$

ii) $\int_0^2 x^3 d[x]$

iii) $\int_0^4 x^2 d[x^2]$

iv) $\int_{-2}^2 xd(|x|)$

v) $\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x} d(e^{-x})$

vi) $\int_0^1 f(x)d[nx],\ n \in \mathbb{N}$ y $f \in C[a,b]$

y luego el límite cuando $n \to \infty$

Demostración:

i) Tenemos que $f(x) = x$ es acotada en $[0,1]$ y $g(x) = x^3$ es de clase C^1 por lo que $f \in R_0^1[g]$ y además

$$\int_0^1 xd(x^3) = \int_0^1 fdg = \int_0^1 fg'dx = \int_0^1 x(3x^2)dx = \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4}$$

■

ii) Tenemos que $f(x) = x^3$ es acotada en $[0,2]$, y además $[x]$ es escalonada tal que f y g no comparten discontinuidades (pues *f* es continua), por lo que $f \in R_0^1[g]$, y además

$$\int_0^2 x^3 d[x] = f(0)C_0 + f(1)C_1 + f(2)C_2 \text{ donde } C_i = g(x_i^+) - g(x_i^-) \text{ con } g(x) = [x]$$

y en este caso $x_0 = 0,\ x_1 = 1$ y $x_2 = 2$ pues son los puntos de salto de la función $[x]$, con ello

$$\int_0^2 x^3 d[x] = C_1 + 8C_2 = [g(1^+) - g(1^-)] + 8[g(2) - g(2^-)] = [1-0] + 8[2-1] = 9$$

■

iii) Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = [x^2]$, así como g es acotada en $[0,4]$ y f es de clase C^1 tendremos que $g \in R_0^4[f]$ y entonces

$$\int_0^4 gdf = \int_0^4 g(x)f'(x)dx = \int_0^4 [x^2]2xdx = \int_0^1 [x^2]2xdx + \int_1^2 [x^2]2xdx + \int_2^3 [x^2]2xdx + \int_3^4 [x^2]2xdx$$

$$= \int_0^1 0\cdot 2xdx + \int_1^2 1\cdot 2xdx + \int_2^3 2^2\cdot 2xdx + \int_3^4 3^2\cdot 2xdx = \int_1^2 2xdx + \int_2^3 8xdx + \int_3^4 18xdx$$

$$= 2[\frac{x^2}{2}]_1^2 + 8[\frac{x^2}{2}]_2^3 + 18[\frac{x^2}{2}]_3^4 = 2[\frac{x^2}{2}]_1^2 + 8[\frac{x^2}{2}]_2^3 + 18[\frac{x^2}{2}]_3^4 = 2[\frac{3}{2}] + 8[\frac{5}{2}] + 18[\frac{7}{2}] = 3 + 20 + 63$$
$$= 86$$

por otro lado, como $g \in R_0^4[f] \Leftrightarrow f \in R_0^4[g]$ y además

$$\int_0^4 fdg + \int_0^4 gdf = f(4)g(4) - f(0)g(0) = 16 \cdot 16 - 0 \cdot 0 = 256$$
$$\Rightarrow \int_0^4 fdg = 256 - \int_0^4 gdf = 256 - 86 = 170 \quad \therefore \quad \int_0^4 x^2 d[x^2] = 170$$

■

iv) Sean $f(x) = x$ y $g(x) = |x|$, así como g es acotada en $[-2,2]$ y f es de clase C^1 tendremos que $g \in R_{-2}^2[f]$ y entonces

$$\int_{-2}^2 gdf = \int_{-2}^2 g(x)f'(x)dx = \int_{-2}^2 |x| 1dx = \int_{-2}^0 |x|\, dx + \int_0^2 |x|\, dx = \int_{-2}^0 -xdx + \int_0^2 xdx$$
$$= 2 + 2 = 4$$

por otro lado, como $g \in R_{-2}^2[f] \Leftrightarrow f \in R_{-2}^2[f]$ y además

$$\int_{-2}^2 fdg + \int_{-2}^2 gdf = f(2)g(2) - f(-2)g(-2) = 2 \cdot 2 - (-2) \cdot |-2| = 8$$
$$\Rightarrow \int_{-2}^2 fdg = 8 - \int_{-2}^2 gdf = 8 - 4 = 4 \quad \therefore \quad \int_{-2}^2 xd\,|x| = 4$$

■

v) Tenemos que $f(x) = e^{-x}$ es de clase C^1 tendremos que $f \in R_a^b[f]$ y entonces por integración por partes

$$\int_a^b e^{-x} d(e^{-x}) + \int_a^b e^{-x} d(e^{-x}) = f(b)^2 - f(a)^2 \Rightarrow 2\int_a^b e^{-x} d(e^{-x}) = e^{-2b} - e^{-2a}$$
$$\Rightarrow \int_a^b e^{-x} d(e^{-x}) = \frac{1}{2}e^{-2b} - \frac{1}{2}e^{-2a} \quad \therefore \quad \lim_{b\to\infty} \int_a^b e^{-x} d(e^{x}) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}e^{-2b} - \frac{1}{2}e^{-2a} = -\frac{1}{2}e^{-2a}$$

■

vi) Tenemos que $f(x)$ es acotada en $[0,1]$ pues f es continua. Ahora para continuar primero analicemos a la función $[nx]$ con $n \in \mathbb{N}$.

Tenemos que $[x] = m$ si $m \leq x < m+1$ con $m \in \mathbb{Z}$, de esta manera $[nx] = m$ si $m \leq nx < m+1$ con $m \in \mathbb{Z}$ y esto es si y solo si $[nx] = m$ si $\frac{m}{n} \leq x < \frac{m+1}{n}$ de esta manera

$$[nx] = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ 0 & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \le x < \frac{2}{n} \\ 2 & \text{si } \frac{2}{n} \le x < \frac{3}{n} \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

En este caso como solo nos interesa el intervalo $[0,1]$ tendremos que dado $n \in \mathbb{N}$, para $x \in [0,1]$

$$[nx] = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \le x < \frac{2}{n} \\ \vdots & \vdots \\ n-1 & \text{si } \frac{n-1}{n} \le x < 1 \\ n & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, $g(x) = [nx]$ es escalonada con saltos en $x_i = \frac{i}{n}$, $i \in \{0,1,2,...,n\}$ y es tal que f y g no comparten discontinuidades (pues f es continua), por lo que $f \in R_0^1[g]$, y además

$$\int_0^1 f dg = \int_0^1 f(x) d[nx] = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) C_i \text{ donde } C_i = g(x_i^{\,+}) - g(x_i^{\,-})$$

Para cada $0 < i < n$ tendremos que $C_i = g(x_i^{\,+}) - g(x_i^{\,-}) = g(\frac{i}{n}) - g(\frac{i-1}{n}) = i - (i-1) = 1$ y para $i = 1$ e $i = n$ tendremos que

$$C_0 = g(x_0^{\,+}) - g(x_0) = g(0) - 0 = 0 \text{ y } C_n = g(x_n) - g(x_n^{\,-}) = g(1) - (n-1) = 1$$

$$\therefore \int_0^1 f(x) d[nx] = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$$

entonces sacando el límite obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) d[nx] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$$

$\blacksquare$

Problema 3.1. – *Sea* $f \in C^1[a,b]$ *entonces*

$$\sum_{a\le n\le b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)\{x\}\,dx + f(a)\{a\} - f(b)\{b\}$$

donde $\{x\} = x - [x]$ *es la parte fraccionaria.*

Demostración: Sean $g_1(x) = x$, $g_2(x) = [x]$ y $g(x) = \{x\} = x - [x] = g_1(x) - g_2(x)$. Como $g_1(x)$ y $g_2(x)$ son funciones acotadas en $[a,b]$ y además $f(x)$ es de clase C^1 tendremos por teorema visto que $g_1, g_2 \in R_a^b[f]$ y entonces $g_1 - g_2 = g \in R_a^b[f]$ con lo que

$$\int_a^b g(x)d(f(x)) = \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

por otro lado, como tenemos que $g_1, g_2 \in R_a^b[f]$ esto es si y solo si $f \in R_a^b[g_1], R_a^b[g_2]$, con lo que $f \in R_a^b[g]$ y usando integración por partes obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b gdf + \int_a^b fdg = f(b)g(b) - f(a)g(a) \;&\Leftrightarrow\; \int_a^b gf'dx + \int_a^b fd(g_1 - g_2) = f(b)\{b\} - f(a)\{a\}\\
&\underset{f\in R_a^b[g_1],R_a^b[g_2]}{\Leftrightarrow} \int_a^b gf'dx + \int_a^b fdg_1 - \int_a^b fdg_2 = f(b)\{b\} - f(a)\{a\}\\
&\Leftrightarrow \int_a^b gf'dx + \int_a^b fdx - \int_a^b fd[x] = f(b)\{b\} - f(a)\{a\}\\
&\Leftrightarrow \int_a^b f(x)d[x] = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)\{x\}\,dx + f(a)\{a\} - f(b)\{b\}
\end{aligned}$$

finalmente como f es de clase C^1 entonces es acotada y además $[x]$ es una función escalonada con saltos en $x_i = i,\ i \in \mathbb{Z}$, en este caso como consideramos el intervalo $[a,b]$ serán saltos en los enteros i tales que $a \le i \le b$, con ello $f \in R_a^b([x])$

$$\int_a^b f(x)d[x] = \sum_{a\le n\le b} f(x_n)C_n = \sum_{a\le n\le b} f(n)C_n$$

si $a < n < b$ tendremos que $C_n = g(x_n{}^+) - g(x_n{}^-) = [n^+] - [n^-] = n - (n-1) = 1$ y si $n = a$ tendremos que $C_a = g(x_a{}^+) - g(x_a) = [a^+] - [a] = a - a = 0$, finalmente si $n = b$ tendremos que $C_b = g(x_b) - g(x_b{}^-) = [b] - [b^-] = b - (b-1) = 1$, entonces

$$\int_a^b f(x)d[x] = \sum_{a<n\leq b} f(n)$$

por lo tanto

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)\{x\}dx + f(a)\{a\} - f(b)\{b\}$$

■

Problema 3.2. – *Sean* $a, b \in \mathbb{Z}$ *y* $f \in C^1[a,b]$, *prueba que*

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)(\{x\} - \tfrac{1}{2})dx + \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Demostración: Por el problema 3.1 tenemos que

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)\{x\}dx + f(a)\{a\} - f(b)\{b\}$$

pero como $a, b \in \mathbb{Z}$ entonces $\{a\} = \{b\} = 0$ y $\sum_{a<n\leq b} f(n) = \sum_{n=a}^{b} f(n) - f(a)$, por lo que

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b} f(n) - f(a) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)\{x\}dx \Leftrightarrow \sum_{n=a}^{b} f(n) &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)\{x\}dx + f(a) \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)\{x\}dx + f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{2} - \frac{f(b)-f(a)}{2} \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)\{x\}dx - \frac{f(b)-f(a)}{2} + \frac{f(a)+f(b)}{2} \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)\{x\}dx - \frac{1}{2}[\int_a^b f'(x)dx] + \frac{f(a)+f(b)}{2} \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)(\{x\} - \tfrac{1}{2})dx + \frac{f(a)+f(b)}{2}\end{aligned}$$

por lo tanto, $\sum_{n=a}^{b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)(\{x\} - \tfrac{1}{2})dx + \frac{f(a)-f(b)}{2}$

■

Problema 4.1. – *Sea* $f \in R_a^b[f]$, *demostrar que*

$$\int_a^b fdf = \frac{1}{2}\{f(b)^2 - f(a)^2\}$$

Usando dos sumas de Riemann-Stieltjes para una partición $P \in \wp[a,b]$ *obtenida usando* $z_k = x_{k-1}$ y $z_k = x_k$

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Como $f \in R_a^b[f]$ entonces existe $P_\varepsilon \in \wp[a,b]$ tal que $\forall P \supseteq P_\varepsilon$, se tiene que $\left|S(f,f,P) - \int_a^b fdf\right| < \varepsilon$.

Consideremos los puntos intermedios $z_k = x_{k-1}$ y $\tilde{z}_k = x_k$, y veamos que en ambos casos obtenemos el mismo resultado.

- Caso 1

En efecto, demostraremos que $\int_a^b fdf = f(b)^2 - f(a)^2 - \int_a^b fdf$. Sea $P \supseteq P_\varepsilon$ entonces por un lado tenemos que

$$S(f,f,P_\varepsilon) = \sum_{i=1}^n f(z_i)[f(x_i) - f(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})[f(x_i) - f(x_{i-1})]$$
$$= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})f(x_i) - f(x_{i-1})f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})f(x_i) - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})f(x_{i-1}) \quad \dots (1)$$

y por otro lado tenemos que

$$f(b)^2 - f(a)^2 = \sum_{i=1}^n f(x_i)^2 - f(x_{i-1})^2 = \sum_{i=1}^n f(x_i)^2 - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})^2$$
$$= \sum_{i=1}^n f(x_i)f(x_i) - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})f(x_{i-1}) \quad \dots (2)$$

Restando (2)-(1), obtenemos

$$f(b)^2 - f(a)^2 - S(f,f,P) = \sum_{i=1}^n f(x_i)f(x_i) - f(x_{i-1})f(x_i) + \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})f(x_{i-1}) - f(x_{i-1})f(x_{i-1})$$
$$= \sum_{i=1}^n f(x_i)f(x_i) - f(x_{i-1})f(x_i) = \sum_{i=1}^n f(x_i)[f(x_i) - f(x_{i-1})] = S(f,f,P)$$

con lo que

$$\left|S(f,f,P) - [f(b)^2 - f(a)^2 - \int_a^b fdf]\right| = \left|\int_a^b fdf - [f(b)^2 - f(a)^2 - S(f,f,P)]\right|$$

$$= \left|\int_a^b fdf - S(f,f,P)\right| = \left|S(f,f,P) - \int_a^b fdf\right| < \varepsilon$$

$$\therefore \int_a^b fdf = f(b)^2 - f(a)^2 - \int_a^b fdf \iff \int_a^b fdf = \tfrac{1}{2}\{f(b)^2 - f(a)^2\}.$$

- Caso 2

En efecto, demostraremos que $\int_a^b fdf = f(b)^2 - f(a)^2 - \int_a^b fdf$. Sea $P \supseteq P_\varepsilon$ entonces por un lado tenemos que

$$S(f,f,P_\varepsilon) = \sum_{i=1}^n f(z_i)[f(x_i) - f(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n f(x_i)[f(x_i) - f(x_{i-1})]$$
$$= \sum_{i=1}^n f(x_i)f(x_i) - f(x_i)f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(x_i)f(x_i) - \sum_{i=1}^n f(x_i)f(x_{i-1}) \ \dots (1)$$

y por otro lado tenemos que

$$f(b)^2 - f(a)^2 = \sum_{i=1}^n f(x_i)^2 - f(x_{i-1})^2 = \sum_{i=1}^n f(x_i)^2 - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})^2$$
$$= \sum_{i=1}^n f(x_i)f(x_i) - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})f(x_{i-1}) \ \dots (2)$$

Restando (2)-(1), obtenemos

$$f(b)^2 - f(a)^2 - S(f,f,P) = \sum_{i=1}^n f(x_i)f(x_i) - f(x_i)f(x_i) + \sum_{i=1}^n f(x_i)f(x_{i-1}) - f(x_{i-1})f(x_{i-1})$$
$$= \sum_{i=1}^n f(x_i)f(x_{i-1}) - f(x_{i-1})f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})[f(x_i) - f(x_{i-1})] = S(f,f,P)$$

con lo que

$$\left|S(f,f,P) - [f(b)^2 - f(a)^2 - \int_a^b fdf]\right| = \left|\int_a^b fdf - [f(b)^2 - f(a)^2 - S(f,f,P)]\right|$$
$$= \left|\int_a^b fdf - S(f,f,P)\right| = \left|S(f,f,P) - \int_a^b fdf\right| < \varepsilon$$

$$\therefore \int_a^b fdf = f(b)^2 - f(a)^2 - \int_a^b fdf \iff \int_a^b fdf = \tfrac{1}{2}\{f(b)^2 - f(a)^2\}.$$

■

Problema 6. – *Sea* $g(x)=x$ *en* $[a,b]$. *Demostrar que* $f\in R_a^b[g]$ *si y solo si* f *es (*) integrable con respecto a* g *en* $[a,b]$.

Demostración:
$\Leftarrow$] Es inmediato por lo demostrado en el problema 5.1.

$\Rightarrow$] Supongamos que $f\in R_a^b[g]$, entonces, como g es estrictamente creciente, tenemos por teorema visto en ayudantía que $\forall\varepsilon>0$ existe $P_\varepsilon\in\wp[a,b]$ tal que $\overline{S}(f,g,P_\varepsilon)-\underline{S}(f,g,P_\varepsilon)<\varepsilon$, pero notemos que $\overline{S}(f,g,P_\varepsilon)=\overline{S}(f,x,P_\varepsilon)=\sum_{i=1}^n M_i[x_i-x_{i-1}]=\overline{S}(f,P_\varepsilon)$ análogamente $\underline{S}(f,g,P_\varepsilon)=\underline{S}(f,P_\varepsilon)$, por lo que $\forall\varepsilon>0$ existe $P_\varepsilon\in\wp[a,b]$ tal que $\overline{S}(f,P_\varepsilon)-\underline{S}(f,P_\varepsilon)<\varepsilon$ y entonces $f\in R_a^b$ respecto a Darboux, y por Calculo II esto es si y solo si $f\in R_a^b$ respecto a Riemann, entonces existe $I\in\mathbb{R}$ tal que $\forall\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $\|P\|>\delta$ entonces $\left|S(f,P)-I\right|<\varepsilon$, y como $S(f,P)=S(f,x,P)=S(f,g,P)$ entonces $\left|S(f,g,P)-I\right|<\varepsilon$ por lo que f es (*) integrable con respecto a g en $[a,b]$.

$\blacksquare$

Problema 7. – *Sea* $\varphi:[a,b]\to[c,d]$ *la (única) función lineal tal que* $\varphi(a)=c$ *y* $\varphi(b)=d$. *Sean* $f\in C[c,d]$ *y* $g\in BV[c,d]$ *dadas. Pruebe:*

$$i)\ g\circ\varphi\in BV[a,b] \text{ y } V_a^b(g\circ\varphi)=V_c^d(g)$$

$$ii)\ f\circ\varphi\in R_a^b[g\circ\varphi] \text{ y } \int_a^b (f\circ\varphi)d(g\circ\varphi)=\int_c^d fdg$$

$$iii)\ \text{Si además } g'\in R_a^b \text{ entonces } \int_c^d fg'dx=\int_a^b (fg')\circ(\varphi\varphi')dx$$

Demostración: Primero notemos que dada una partición $P=\{a=x_0,x_1,\dots,x_n=b\}\in\wp[a,b]$ esta me induce una partición de $[c,d]$ dada por $\varphi(P)=\{c=\varphi(a)=\varphi(x_0),\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n)=\varphi(b)=d\}$, la cual esta bien definida, pues al ser φ un transformación lineal de un intervalo a otro, esta es biyectiva y continua.

(i) Sea $P\in\wp[a,b]$, tenemos que

$$V_P(g\circ\varphi)=\sum_{i=1}^n\left|(g\circ\varphi)(x_i)-(g\circ\varphi)(x_{i-1})\right|=\sum_{i=1}^n\left|g(\varphi(x_i))-g(\varphi(x_{i-1}))\right|=V_{\varphi(P)}(g)$$

entonces $V_a^b(g\circ\varphi)=\sup\{V_P(g\circ\varphi):P\in\wp[a,b]\}=\sup\{V_{\varphi(P)}(g):\varphi(P)\in\wp[c,d]\}=V_c^d(g)$ donde la ultima igualdad se da pues al ser φ biyectiva tendremos que cada partición de $[c,d]$ viene de una de $[a,b]$.

$\blacksquare$

(ii) Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua y $g \in BV[c,d]$ entonces $f \in R_c^d[g]$ con lo que dado $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $P_{\tilde{\varepsilon}} \in \wp[c,d]$ tal que si $Q \supseteq P_{\tilde{\varepsilon}}$ entonces $\left|S(f,g,Q) - \int_a^b fdg\right| < \tilde{\varepsilon}$

PD existe $\tilde{P}_\varepsilon \in \wp[a,b]$ tal que si $\tilde{Q} \supseteq \tilde{P}_\varepsilon$ entonces $\left|S(f\circ\varphi, g\circ\varphi, \tilde{Q}) - \int_a^b fdg\right| < \varepsilon$

Sea $\tilde{P}_\varepsilon = \varphi^{-1}(P_{\tilde{\varepsilon}}) = \{\varphi^{-1}(x_0),\ldots,\varphi^{-1}(x_n)\}$, y sea $\tilde{Q} \supseteq \tilde{P}_\varepsilon$. Veamos que estos son los buscados. En efecto, dado que $\tilde{Q} \supseteq \tilde{P}_\varepsilon = \varphi^{-1}(P_{\tilde{\varepsilon}})$ entonces $\varphi(\tilde{Q}) \supseteq \varphi(\tilde{P}_\varepsilon) = P_{\tilde{\varepsilon}}$ siendo $\varphi(\tilde{Q}) \in \wp[c,d]$, entonces por hipótesis

$$\left|S(f,g,\varphi(\tilde{Q})) - \int_a^b fdg\right| < \tilde{\varepsilon}$$

entonces

$$\begin{aligned}\left|S(f\circ\varphi, g\circ\varphi, \tilde{Q}) - \int_a^b fdg\right| &= \left|S(f\circ\varphi, g\circ\varphi, Q) - S(f,g,\varphi(\tilde{Q})) + S(f,g,\varphi(\tilde{Q})) - \int_a^b fdg\right| \\ &\leq \left|S(f\circ\varphi, g\circ\varphi, \tilde{Q}) - S(f,g,\varphi(\tilde{Q}))\right| + \left|S(f,g,\varphi(\tilde{Q})) - \int_a^b fdg\right| \\ &\leq \left|S(f\circ\varphi, g\circ\varphi, \tilde{Q}) - S(f,g,\varphi(\tilde{Q}))\right| + \tilde{\varepsilon}\end{aligned}$$

pero notemos que

$$\begin{aligned}S(f,g,\varphi(\tilde{Q})) &= \sum_{i=1}^n f(\varphi(x_i))[g(\varphi(x_i)) - g(\varphi(x_{i-1}))] \\ &= \sum_{i=1}^n (f\circ\varphi)(x_i)[(g\circ\varphi)(x_i) - (g\circ\varphi)(x_{i-1})] = S(f\circ\varphi, g\circ\varphi, \tilde{Q})\end{aligned}$$

entonces

$$\left|S(f\circ\varphi, g\circ\varphi, \tilde{Q}) - \int_a^b fdg\right| \leq \left|S(f\circ\varphi, g\circ\varphi, \tilde{Q}) - S(f,g,\varphi(\tilde{Q}))\right| + \tilde{\varepsilon} = 0 + \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$$

por lo tanto $\int_a^b (f\circ\varphi)d(g\circ\varphi) = \int_c^d fdg$.

■

(iii) Supongamos que $g' \in R_a^b$, entonces como f es continua tendremos que $fg' \in R_a^b$ entonces por teorema visto en clase $f \in R_a^b[g]$ y además

$$\int_a^b fdg = \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

y haciendo cambio de variable sea $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$ por lo que

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(t))g'(\varphi(t))\varphi'(t)dx = \int_c^d f(\varphi(t))g'(\varphi(t))\varphi'(t)dx$$

■

Problema 8. – *Sea* $f \in C^1[a,b]$. *Probar que*

$$i)\ f^m \in R_a^b[f^n] \text{ para todo } n, m \in \mathbb{N}$$

$$ii)\ f \in R_a^b[\sin(f)] \text{ y } \int_a^b fd(\sin(f)) = f\sin(f)\mid_a^b + \cos(f)_a^b$$

Demostración:

(i) Como $f \in C^1[a,b]$, entonces $f^k \in C^1[a,b]\ \forall k \in \mathbb{N}$, y así tenemos entonces que f^m es acotada y $f^n \in C^1[a,b]$ por lo que $f^m \in R_a^b[f^n]$.

(ii) Como $f \in C^1[a,b]$, $\sin(f) \in C^1[a,b]$ (pues $\sin(f)' = \cos(f)f' \in C[a,b]$) y entonces por teorema visto $f \in R_a^b[\sin(f)]$ y además

$$\int_a^b fd(\sin(f)) = \int_a^b f(x)[\sin(f(x))]'dx = \int_a^b f(x)\cos(f(x))f'(x)dx$$

sea $t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x)dx$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\cos(f(x))f'(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} t\cos(t)dt = [t\sin(t) + \cos(t)]_{f(a)}^{f(b)}$$

$$= [f(x)\sin(f(x)) + \cos(f(x))]_a^b$$

por lo tanto $\int_a^b fd(\sin(f)) = f\sin(f)\mid_a^b + \cos(f)_a^b$

■

Problema 9. – *Sea* $f \in C[a,b]$ *y* g *estrictamente creciente en* $[a,b]$. *Probar que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f|^n\, dg\right)^{1/n} = \|f\|_{[a,b]}$$

Demostración: Notemos que como $f \in C[a,b] \Rightarrow |f| \in C[a,b]$ (esto es pues $\left||f(x)| - |f(y)|\right|$

$\leq |f(x)-f(y)|$ entonces se da la definición de limite) y entonces $|f|^n \in C[a,b] \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (composición con x^n que es continua), y dado que g estrictamente creciente en $[a,b]$, por Teorema visto en clase tenemos que $|f|^n \in R_a^b[g]$, con lo cual el límite está bien definido.

Ahora, por lo visto en clases (18 de marzo) tenemos que

$$\int_a^b |f|^n \, dg \leq \left\| |f|^n \right\|_{[a,b]} V_a^b(g)$$

(Como g estrictamente creciente en $[a,b]$ $\Rightarrow$ es de variación acotada y existe $V_a^b(g)$ y es distinto de cero)

Afirmación: $\left\| |f|^n \right\|_{[a,b]} \leq \|f\|^n{}_{[a,b]} \; \forall n \in \mathbb{N}$

En efeto, sea $x \in [a,b]$, entonces $|f(x)|^n = |f(x)| \underbrace{\cdots}_{n \text{ veces}} |f(x)| \leq \|f\|_{[a,b]} \underbrace{\cdots}_{n \text{ veces}} \|f\|_{[a,b]} = \|f\|^n{}_{[a,b]}$ y entonces $\|f\|_{[a,b]}$ es cota superior de $\{|f(x)|^n : x \in [a,b]\}$ y entonces $\sup\{|f(x)|^n : x \in [a,b]\} \leq \|f\|^n{}_{[a,b]}$, es decir, $\left\| |f|^n \right\|_{[a,b]} \leq \|f\|^n{}_{[a,b]}$.

Con esto tenemos que

$$\int_a^b |f|^n \, dg \leq \|f\|^n{}_{[a,b]} V_a^b(g) \; \forall n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \left(\int_a^b |f|^n \, dg \right)^{1/n} \leq \left(\|f\|^n{}_{[a,b]} \right)^{1/n} \left(V_a^b(g) \right)^{1/n} \; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b |f|^n \, dg \right)^{1/n} \leq \|f\|_{[a,b]} \left(V_a^b(g) \right)^{1/n} \; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b |f|^n \, dg \right)^{1/n} \leq \lim_{n\to\infty} \|f\|_{[a,b]} \left(V_a^b(g) \right)^{1/n} = \|f\|_{[a,b]} \lim_{n\to\infty} \left(V_a^b(g) \right)^{1/n}$$

y sabemos que $\forall a \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$, por lo que $\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b |f|^n \, dg \right)^{1/n} \leq \|f\|_{[a,b]}$

PD $\|f\|_{[a,b]} \leq \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b |f|^n \, dg \right)^{1/n}$

Falto.... : (

Problema 10. – *Sea* $g \in [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función tal que* g' *existe y es Riemann-Integrable en* $[a,b]$. *Pruebe que*

$$i)\ g \in BV[a,b] \text{ y que } V_a^b(g) = \int_a^b |g'(t)|\,dt$$

$$ii)\ g \in BV[a,b] \text{ si y solo si } \ell(\Gamma_g) < \infty$$

Demostración:

(i) Sea $P \in \wp[a,b]$. Como $g'(x)$ existe tendremos que g es continua en $[a,b]$, en particular lo será para cada $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición, y entonces por el teorema del valor medio

$$\exists c_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ tal que } g'(c_i) = \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$\Rightarrow \quad |g'(c_i)||x_i - x_{i-1}| = |g(x_i) - g(x_{i-1})|$$

entonces

$$V_P(g) = \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n |g'(c_i)||x_i - x_{i-1}|$$

y entonces $V_a^b(g) = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |g'(c_i)|(x_i - x_{i-1}) : P \in \wp[a,b]\right\} = \sup\left\{S(|g'(c_i)|, P) : P \in \wp[a,b]\right\}$

$= \int_a^b |g'(x)|\,dx$, esta ultima igualdad se da ya que como $g' \in R_a^b \ \Rightarrow \ |g'| \in R_a^b$.

■

(ii) Demostraremos que $V_a^b(g) < \ell(\Gamma_g) \le V_a^b(g) + (b-a)$. En efecto, tenemos que

$$V_a^b(g) = \int_a^b |g'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{g'(t)^2}\,dt \le \int_a^b \sqrt{1 + g'(t)^2}\,dt = \ell(\Gamma_g)$$

$$\le \int_a^b \sqrt{1} + \sqrt{g'(t)^2}\,dt = \int_a^b 1 + |g'(t)|\,dt = \int_a^b |g'(t)|\,dt + (b-a) = V_a^b(g) + (b-a)$$

y con esto es claro que $V_a^b(g) < \infty \ \Leftrightarrow \ \ell(\Gamma_g) < \infty$. (En la demostración usamos el hecho de que $\sqrt{a^2 + b^2} \le \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$)

■

Problema 12. – *Sea* $p \in C[a,b]$, $P \ge 0$, $c > 0$ *tales que si* $p(x) \le c\int_a^x p(t)dt \ \forall x \in [a,b]$. *Demuestra que* $p(x) = 0$ en $[a,b]$.

Demostración: Sea $g(x) = \int_a^x p(t)dt$, la cual es de clase C^1 pues $g'(x) = p(x)$.

Como por hipótesis $0 \le p(x) \le c\int_a^x p(t)dt \;\Rightarrow\; 0 \le g'(x) \le cg(x)$, de esta manera como $p \in C[a,b]$ entonces existe $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |p| = \sup\limits_{x\in[a,b]} p$, y así por el TVM-I se tiene que $\int_a^x p(t)dt \le M(x-a)$, es decir, $g(x) \le M(x-a)$

Ahora, con todo lo anterior tenemos que

$$g'(t) \le cg(t) \le cM(x-a) \;\Rightarrow\; \int_a^x g'(t)dx \le \int_a^x cM(x-a)dx$$
$$\Rightarrow\; g(x)-g(a) \le \frac{cM(x-a)^2}{2} \;\Rightarrow\; g(x) \le \frac{cM(x-a)^2}{2}$$

pero esto quiere decir que $g'(x) \le cg(x) \le \dfrac{c^2M(x-a)^2}{2}$ y nuevamente tenemos que $g'(t) \le \dfrac{c^2M(t-a)^2}{2}$ con lo que

$$\int_a^x g'(t)dx \le \int_a^x \frac{c^2M(x-a)^2}{2}dx \Rightarrow g(x)-g(a) \le \frac{c^2M(x-a)^3}{3!} \;\Rightarrow\; g(x) \le \frac{c^2M(x-a)^3}{3!}$$

y así $g'(x) \le cg(x) \le \dfrac{c^3M(x-a)^3}{3!}$, de esta forma podemos proceder de manera inductiva, teniendo que $0 \le g'(x) \le \dfrac{c^nM(x-a)^n}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $0 \le g'(x) \le \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c^nM(x-a)^n}{n!} = 0$

$\therefore$ $g'(x) = 0$ es decir $\int_a^x p(t)dt = 0$ y como p es continua y tal que $p(t) \ge 0$ esto pasa si y solo si $p(t) = 0$ $\forall t \in [a,x]$ $\forall x \in [a,b]$ $\;\Rightarrow\;$ $p(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$.

■

Problema 14. – *Usando propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes obtener las siguientes*

$$i)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} + \alpha\int_1^n \frac{[x]}{x^{\alpha+1}}dx \text{ si } \alpha > 1$$
$$ii)\ \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} = \alpha\int_1^{2n} \frac{2[x/2]-[x]}{x^{\alpha+1}}dx \text{ si } \alpha \ne 1$$

Demostración: