Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Análisis Matemático II

Tarea 2

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 5. –

Sean $E_1, \dots, E_n \subset X$ dados.

i) Pruebe: $x \in E_1 \triangle (E_2 \triangle E_3) \Leftrightarrow x \in E_j$ exactamente para un número impar de $j \in \{1, 2, 3\}$.
Pruebe lo mismo para $(E_1 \triangle E_2) \triangle E_3$ y concluya que la diferencia simétrica es una operación asociativa.

ii) Generalice el inciso anterior como sigue:

$$x \in E_1 \triangle E_2 \triangle \dots \triangle E_n \Leftrightarrow x \in E_j$$

exactamente para un número impar de $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

iii) Si además $E_1, \dots, E_n \in S$ con (X, S, μ) un espacio de medida y $\mu(E_j) < \infty$ para toda $j = 1, 2, \dots, n$ entonces:

$$\begin{aligned}\mu(E_1 \triangle E_2 \triangle \dots \triangle E_n) = &\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) - 2^1 \sum_{i<j} \mu(E_i \cap E_j) \\ &+ 2^2 \sum_{i<j<k} \mu(E_i \cap E_j \cap E_k) - \dots \\ &+ (-1)^{n-1} 2^{n-1} \mu(E_i \cap \dots \cap E_n)\end{aligned}$$

(Sugerencia: Pruebe los casos $n = 2$ y $n = 3$ y luego use inducción. Compare con la "fórmula de inclusión-exclusión" para obtener $\mu(E_i \cup \dots \cup E_n)$).

Demostración: Para los incisos 1 y 2 usaremos que $A \Delta B = [A \cap B^c] \cup [A^c \cap B]$ y para el ultimo inciso usaremos que $A \Delta B = [A - (A \cap B)] \cup [B - (A \cap B)]$.

(i) Se tiene que

$$\begin{aligned}(E_1 \Delta E_2) \Delta E_3 &= [(E_1 \cap E_2{}^c) \cup (E_2 \cap E_1{}^c)] \Delta E_3 \\ &= ([(E_1 \cap E_2{}^c) \cup (E_2 \cap E_1{}^c)] \cap E_3{}^c) \cup (E_3 \cap [(E_1 \cap E_2{}^c) \cup (E_2 \cap E_1{}^c)]^c)\end{aligned}$$

$$= ((E_1 \cap E_2{}^c \cap E_3{}^c) \cup (E_2 \cap E_1{}^c \cap E_3{}^c)) \cup (E_3 \cap [(E_1{}^c \cup E_2) \cap (E_2{}^c \cup E_1)])$$
$$= (E_1 \cap E_2{}^c \cap E_3{}^c) \cup (E_2 \cap E_1{}^c \cap E_3{}^c) \cup (E_3 \cap (E_1{}^c \cup E_2) \cap (E_2{}^c \cup E_1))$$
$$= (E_1 \cap E_2{}^c \cap E_3{}^c) \cup (E_2 \cap E_1{}^c \cap E_3{}^c) \cup (([E_3 \cap E_1{}^c] \cup [E_3 \cap E_2]) \cap (E_2{}^c \cup E_1))$$
$$= (E_1 \cap E_2{}^c \cap E_3{}^c) \cup (E_2 \cap E_1{}^c \cap E_3{}^c) \cup (E_3 \cap E_1{}^c \cap E_2{}^c) \cup (E_3 \cap E_2 \cap E_1)$$

por lo que si $x \in (E_1 \Delta E_2) \Delta E_3 \Rightarrow x \in E_1$ y $x \notin E_2, E_3$ o $x \in E_2$ y $x \notin E_1, E_3$ *o* $x \in E_3$ y $x \notin E_1, E_2$ o $x \in E_1, E_2, E_3$ por lo cual esta en un numero par de conjuntos.

Por otro lado

$$E_1 \Delta (E_2 \Delta E_3) = E_1 \Delta [(E_2 \cap E_3{}^c) \cup (E_3 \cap E_2{}^c)]$$
$$= (E_1 \cap [(E_2 \cap E_3{}^c) \cup (E_3 \cap E_2{}^c)]^c) \cup ([(E_2 \cap E_3{}^c) \cup (E_3 \cap E_2{}^c)] \cap E_1{}^c)$$
$$= (E_1 \cap [(E_2{}^c \cup E_3) \cap (E_3{}^c \cup E_2)]) \cup ((E_2 \cap E_3{}^c \cap E_1{}^c) \cup (E_3 \cap E_2{}^c \cap E_1{}^c))$$
$$= (E_1 \cap (E_2{}^c \cup E_3) \cap (E_3{}^c \cup E_2)) \cup (E_2 \cap E_3{}^c \cap E_1{}^c) \cup (E_3 \cap E_2{}^c \cap E_1{}^c)$$
$$= (([E_1 \cap E_2{}^c] \cup [E_1 \cap E_3]) \cap (E_3{}^c \cup E_2)) \cup (E_2 \cap E_3{}^c \cap E_1{}^c) \cup (E_3 \cap E_2{}^c \cap E_1{}^c)$$
$$= (E_1 \cap E_2{}^c \cap E_3{}^c) \cup (E_2 \cap E_1{}^c \cap E_3{}^c) \cup (E_3 \cap E_1{}^c \cap E_2{}^c) \cup (E_3 \cap E_2 \cap E_1)$$

con lo que tendremos que igualmente el elemento en diferencia estará en un numero impar de los conjuntos, además tenemos que las ultimas igualdades de ambos desarrollos son iguales por lo que $(E_1 \Delta E_2) \Delta E_3 = E_1 \Delta (E_2 \Delta E_3)$, siendo así la operación asociativa

■

(ii) Por inducción sobre n.

El caso base para $n = 3$ lo hicimos en el inciso anterior. Supongamos pues que se cumple para un $n > 3$ y consideremos $E_1, E_2, ..., E_n, E_{n+1} \subset X$, llamemos $E = E_1 \Delta E_2 \Delta \cdots \Delta E_n$, entonces tendremos que $E \Delta E_{n+1} = (E \cap E_{n+1}{}^c) \cup (E_{n+1} \cap E^c)$, entonces dado $x \in E \Delta E_{n+1}$ se tendrá que $x \in E$ y $x \notin E_{n+1}$ o $x \in E_{n+1}$ y $x \notin E$.

En el primer caso tendremos por hipótesis de inducción que $x \in E_j$ para un numero impar de $j \in \{1, 2, ..., n\}$ para el segundo caso tendremos que $x \in E_{n+1}$ siendo es un numero impar de conjuntos. Por lo tanto, tendremos que $x \in E_j$ para un numero impar de $j \in \{1, 2, ..., n+1\}$, terminando así la prueba.

■

(iii) Notemos que cada nuevo sumando nos da la medida de cada intersección posible de los conjuntos E_i, entonces si llamamos por $F \subseteq \mathbb{N}_n = \{1, 2, ..., n\}$ y por $E_F = \bigcap_{i \in F} E_i$ tendremos que

$$\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)=\sum_{\substack{F\subseteq\mathbb{N}_n\\|F|=1}}\mu(E_F)$$

$$\sum_{i<j}\mu(E_i\cap E_j)=\sum_{\substack{F\subseteq\mathbb{N}_n\\|F|=2}}\mu(E_F)$$

$$\sum_{i<j<k}\mu(E_i\cap E_j\cap E_k)=\sum_{\substack{F\subseteq\mathbb{N}_n\\|F|=3}}\mu(E_F)$$

$$\vdots$$

$$\mu(E_1\cap\cdots\cap E_n)=\sum_{\substack{F\subseteq\mathbb{N}_n\\|F|=n}}\mu(E_F)$$

por lo que es equivalente demostrar que

$$\mu(E_1\Delta E_2\Delta\cdots\Delta E_n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}2^{k-1}\sum_{\substack{F\subseteq\mathbb{N}_n\\|F|=k}}\mu(E_F)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{F\subseteq\mathbb{N}_n\\|F|=k}}(-1)^{k-1}2^{k-1}\mu(E_F)$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{F\subseteq\mathbb{N}_n\\|F|=k}}(-1)^{|F|-1}2^{|F|-1}\mu(E_F)=\sum_{\varnothing\neq F\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|F|-1}2^{|F|-1}\mu(E_F)$$

Por inducción sobre n.

Para $n=2$ tenemos que $\mu(E_1\Delta E_2)=\mu([E_1-(E_1\cap E_2)]\cup[E_2-(E_1\cap E_2)])$ y notemos que los conjuntos son ajenos pues $[E_1-(E_1\cap E_2)]\cap[E_2-(E_1\cap E_2)]=[E_1\cap E_2{}^c]\cap[E_2\cap E_1{}^c]=\varnothing$, por lo que $\mu(E_1\Delta E_2)=\mu(E_1-(E_1\cap E_2))+\mu(E_2-(E_1\cap E_2))$, y además como $E_1\cap E_2\subseteq E_1,E_2$ tendremos que $\mu(E_1\Delta E_2)=\mu(E_1)-\mu(E_1\cap E_2)+\mu(E_2)-\mu(E_1\cap E_2)=\mu(E_1)+\mu(E_2)-2\mu(E_1\cap E_2)$ por lo que

$$\mu(E_1\Delta E_2)=\mu(E_1)+\mu(E_2)-2\mu(E_1\cap E_2)$$
$$=(-1)^{1-1}2^{1-1}\mu(E_1)+(-1)^{1-1}2^{1-1}\mu(E_2)+(-1)^{2-1}2^{2-1}\mu(E_1\cap E_2)$$
$$=\sum_{\varnothing\neq F\subseteq\mathbb{N}_2}(-1)^{|F|-1}2^{|F|-1}\mu(E_F)$$

ahora supongamos que es cierta para alguna $n>2$, es decir que la proposición se cumple para n conjuntos cualesquiera y consideremos $E_1,\dots,E_n,E_{n+1}\subset X$ y sea $E=E_1\cup\cdots\cup E_n$, entonces tendremos que por el caso base

$$\mu(E_1\Delta E_2\Delta\cdots\Delta E_{n+1})=\mu(E\Delta E_{n+1})=\mu(E)+\mu(E_{n+1})-2\mu(E\cap E_{n+1})$$

$$\underset{H.I}{=}\left[\sum_{\varnothing\neq F\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|F|-1}2^{|F|-1}\mu(E_F)\right]+\mu(E_{n+1})-2\mu(E\cap E_{n+1})$$

por otro lado, tenemos que $\mu(E\cap E_{n+1})=\mu(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\cap E_{n+1})$ y llamando $B_i=E_i\cap E_{n+1}$, tendremos que dado $F\subseteq N_n \Rightarrow B_F=E_F\cap E_{n+1}$, por lo que

$$\begin{aligned}\mu(E_1\Delta E_2\Delta\cdots\Delta E_{n+1})&=\left[\sum_{\varnothing\neq F\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|F|-1}2^{|F|-1}\mu(E_F)\right]+\mu(E_{n+1})-2\left[\sum_{\varnothing\neq F\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|F|-1}2^{|F|-1}\mu(B_F)\right]\\&=\left[\sum_{\varnothing\neq F\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|F|-1}2^{|F|-1}\mu(E_F)\right]+\mu(E_{n+1})+\left[\sum_{\varnothing\neq F\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|F|}2^{|F|}\mu(E_F\cap E_{n+1})\right]\\&=\left[\sum_{\substack{\varnothing\neq F\subseteq\mathbb{N}_{n+1}\\ n+1\notin F}}(-1)^{|F|-1}2^{|F|-1}\mu(E_F)\right]+\mu(E_{n+1})+\left[\sum_{\substack{\varnothing\neq G\subseteq\mathbb{N}_{n+1}\\ n+1\in G,\ G\neq\{n+1\}}}(-1)^{|G|}2^{|G|}\mu(E_G)\right]\end{aligned}$$

Esto último pues en el primer sumando tenemos las intersecciones de tamaño a lo mas n de los $E_i\acute{}s$ tales que no está E_{n+1}, y en los segundos sumandos tenemos a todas las intersecciones de tamaño a lo más n para las cuales si esta E_{n+1}, excepto E_{n+1}, esto constituye para el primer sumando todas las intersecciones de tamaño a lo mas $n+1$ de los $E_i\acute{}s$ tales que no está E_{n+1} , y en los segundos sumandos tenemos a todas las intersecciones de tamaño a lo más $n+1$ para las cuales si esta E_{n+1}, excepto E_{n+1}, entonces para agregar este sumando el índice se recorre uno siendo entonces

$$\begin{aligned}\mu(E_1\Delta E_2\Delta\cdots\Delta E_{n+1})&=\left[\sum_{\substack{\varnothing\neq F\subseteq\mathbb{N}_{n+1}\\ n+1\notin F}}(-1)^{|F|-1}2^{|F|-1}\mu(E_F)\right]+\left[\sum_{\substack{\varnothing\neq F\subseteq\mathbb{N}_{n+1}\\ n+1\in F}}(-1)^{|F|-1}2^{|F|-1}\mu(E_F)\right]\\&=\sum_{\varnothing\neq F\subseteq\mathbb{N}_{n+1}}(-1)^{|F|-1}2^{|F|-1}\mu(E_F)\end{aligned}$$

que es lo que se quería probar $\therefore$ por inducción matemática se cumple lo pedido.

■

Problema 8. –

Sea $\mathbb{E}=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}\subset\mathcal{P}(X)$ dada, denotamos

$$A^a=\begin{cases}A & \text{si } a=0\\ A^c & \text{si } a=1\end{cases}$$

Para cada $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\{0,1\}^n$ definimos $E_a=A_1^{a_1}\cap A_2^{a_2}\cap\cdots\cap A_n^{a_n}$. Pruebe:

i) $\mathcal{A}(\mathbb{E}) = \left\{ \bigcup_{a\in D} E_a : D \subset \{0,1\}^n \right\}$ (convenimos en poner $\bigcup_{a\in\emptyset} E_a = \emptyset$).

ii) Concluya que $\#(\mathcal{A}(\mathbb{E})) \leq 2^{2^n}$

(Sugerencia: para probar la cerradura bajo complementación en (i), empiece con E_a y luego trate el caso general).

Demostración:

(i) Por lo visto en clase sabemos que, dada una clase cualquiera, el algebra generada viene dada por $A(\mathrm{E}) = \Theta^3$, con lo que vasta probar que $\Theta^3 = \{\bigcup_{a\in D} E_a : D \subset \{0,1\}^n\}$.

Tenemos que

$$\Theta^{\mathrm{E}} = \{E \in \wp(X) : E \in \mathrm{E} \text{ ó } E^c \in \mathrm{E}\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n, A_1{}^c, A_2{}^c, \dots, A_n{}^c\}$$

con ello

$$\Theta^1 = \{A_1, A_2, \dots, A_n, A_1{}^c, A_2{}^c, \dots, A_n{}^c, \varnothing, X\}$$

con veamos tenemos que

$$\Theta^2 = \{\bigcap_{i=1}^m F_i : F_i \in \Theta^1,\ m \in \mathbb{N}\}$$

entonces como $F_i \in \Theta^1$ tendremos que $F_i = A_{j_i}{}^{a_i}$, con lo que $E = \bigcap_{i=1}^m A_{j_i}{}^{a_i}$, y al ser $\varnothing = A_1{}^c \cap A_1 \Rightarrow \varnothing \in \Theta^2 \ \therefore\ X \in \Theta^2$, entonces

$$\Theta^2 = \{\bigcap_{i=1}^m A_{j_i}{}^{a_i} : m \in \mathbb{N}\} \cup \{X\}$$

finalmente queremos probar que $\Theta^3 = \{\bigcup_{a\in D} E_a : D \subset \{0,1\}^n\} = L$.

$\subseteq]$ Sea $G \in \Theta^3 \Rightarrow G = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\tilde{n}} F_i,\ F_i \in \Theta^2$, y como $F_i \in \Theta^2 \Rightarrow F_i = \bigcap_{k=1}^{m_i} A_{j_k}{}^{a_k}$ o $F_i = X$.

Caso 1: Si un $F_i = X$. Entonces tendremos que $G = X$ y veamos que $X \in L$.

En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} X = A_1 \cup A_1{}^c &= (A_1 \cup A_1{}^c) \cap (A_2 \cup A_2{}^c) = (A_1 \cup A_1{}^c) \cap A_2 \cup (A_1 \cup A_1{}^c) \cap A_2{}^c \\ &= (A_1 \cap A_2) \cup (A_1{}^c \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2{}^c) \cup (A_1{}^c \cap A_2{}^c) \\ &= [(A_1 \cap A_2) \cup (A_1{}^c \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2{}^c) \cup (A_1{}^c \cap A_2{}^c)] \cap (A_3 \cup A_3{}^c) \\ &\ \vdots \\ &= (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1{}^c \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2{}^c \cap A_3) \cup (A_1{}^c \cap A_2{}^c \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3{}^c) \end{aligned}$$

$$\cup(A_1{}^c \cap A_2 \cap A_3{}^c) \cup (A_1 \cap A_2{}^c \cap A_3{}^c) \cup (A_1{}^c \cap A_2{}^c \cap A_3{}^c)$$

y haciendo estos pasos de manera inductiva obtendremos que $X = E_{a_1} \cup \cdots \cup E_{a_{2^n}}$ por lo que $X \in L$.

Caso 2: Si ningún $F_i = X$.

Obs.- Para lo que haremos a continuación usaremos la siguiente propiedad de los conjuntos $C \cap D = [C \cap D \cap K] \cup [C \cap D \cap K^c]$

Tenemos que

$$G = [\bigcap_{k=1}^{m_1} A_{j_k}{}^{a_k}] \cup [\bigcap_{k=1}^{m_2} A_{j_k}{}^{a_k}] \cup \cdots \cup [\bigcap_{k=1}^{m_{\tilde{n}}} A_{j_k}{}^{a_k}]$$

si alguna de las intersecciones es vacía (esto pues hay dos complementos intersecándose) no afectara a nuestra unión por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que todas las intersecciones son no vacías, i.e, que no hay dos complementos de un mismo conjunto en las intersecciones, por lo que cada intersección tiene a un solo $A_i{}^{a_i}$ no a su complemento.

Con esto tendremos que para cualquiera de las m si $m_i = n$ entonces necesariamente tendremos a todos los posibles $A_i{}^{a_i}$, es decir, $\bigcap_{k=1}^{m_2} A_{j_k}{}^{a_k} = A_1{}^{a_1} \cap \cdots \cap A_n{}^{a_n} = E_a$, para algún $a \in \{0,1\}^n$ y no tenemos nada que hacer, si pasa que $m_i < n$, entonces nos faltan elementos en la intersección y los agregaremos de la siguiente manera:

Consideremos la intersección $\bigcap_{k=1}^{m_i} A_{j_k}{}^{a_k} = A_{j_1}{}^{a_1} \cap A_{j_2}{}^{a_2} \cap \cdots \cap A_{j_{m_i}}{}^{a_{m_i}}$ y supongamos que los ordenamos de menor a mayor índice, pues cada $j_k \in \{1,...,n\}$. Entonces por la observación, podemos agregar los conjuntos que nos falten de la siguiente manera

$$\bigcap_{k=1}^{m_i} A_{j_k}{}^{a_k} = [\bigcap_{k=1}^{m_i} A_{j_k}{}^{a_k} \cap A_1] \cup [\bigcap_{k=1}^{m_i} A_{j_k}{}^{a_k} \cap A_1{}^c]$$
$$= [\bigcap_{k=1}^{m_i} A_{j_k}{}^{a_k} \cap A_{r_1} \cap A_{r_2}] \cup [\bigcap_{k=1}^{m_i} A_{j_k}{}^{a_k} \cap A_{r_1} \cap A_{r_2}{}^c] \cup [\bigcap_{k=1}^{m_i} A_{j_k}{}^{a_k} \cap A_{r_1}{}^c \cap A_{r_2}] \cup [\bigcap_{k=1}^{m_i} A_{j_k}{}^{a_k} \cap A_{r_1}{}^c \cap A_{r_2}{}^c]$$

prosiguiendo de esta manera agregaremos todos los conjuntos restantes, teniendo al final que

$$\bigcap_{k=1}^{m_i} A_{j_k}{}^{a_k} = E_{a_1} \cup E_{a_2} \cup \cdots \cup E_{a_{m_{2^{n-m_i}}}}$$

con lo que $G = \bigcup E_a$ para algunos $a \in D \subseteq \{0,1\}^n$, por lo que $G \in L$.

$\supseteq$] Sea $G \in L \Rightarrow G = \bigcup_{a \in D} E_a$ para algún $D \subseteq \{0,1\}^n$, y justamente cada $E_a \in \Theta^2$ por lo que $G \in \Theta^3$.

$\therefore\ A(\mathrm{E}) = \Theta^3 = \{\bigcup_{a \in D} E_a : D \subset \{0,1\}^n\}$.

■

(ii) En efecto tenemos que por cada $D \subset \{0,1\}^n$ tendremos un elemento del conjunto, entonces el total de elementos serán menor al total de subconjunto del conjunto $\{0,1\}^n$, siendo $2^{\left|\{0,1\}^n\right|} = 2^{2^n}$, es decir, $\# A(\mathrm{E}) \leq 2^{2^n}$.

■

Problema 11. –

Sea $S \subset \mathcal{P}(X)$ una σ-álgebra con un número infinito de elementos. Pruebe que S es no-numerable (i.e. no hay σ-álgebra numerable infinita).

(Sugerencia: Sea $\{A_1, A_2, \dots\} \subset S$ un conjunto infinito. Imitando la construcción de los subconjuntos E_a como en (8) pero ahora con $\alpha \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, obtenga una familia numerable infinita $\{E_1, E_2, \dots\}$ de subconjuntos en S no vacíos y ajenos. Halle una función inyectiva $i : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to S$).

Demostración: Por contradicción supongamos que $|S| = |\mathbb{N}|$, es decir, $S = \{A_1, A_2, \dots.\}$
Imitando la construcción del problema 8, para cada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, a_i, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ definimos $E_\alpha = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i^{\alpha_i}$, y consideremos el conjunto de todos estos, es decir, $E = \{E_\alpha : \alpha \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$.
Notemos que cualesquiera dos elementos de E son disjuntos, pues si $\alpha \neq \beta$ querrá decir que existe por lo menos un $\alpha_j \neq \beta_j$ y al tener solo dos opciones se tendrá que ($\alpha_j = 1$ y $\beta_j = 0$) o ($\alpha_j = 0$ y $\beta_j = 1$), en cualquier caso tendremos que

$$E_\alpha = [\bigcap_{j \neq i \in \mathbb{N}} A_i^{\alpha_i}] \cap A_j^{\alpha_j} \text{ y } E_\beta = [\bigcap_{j \neq i \in \mathbb{N}} A_i^{\beta_i}] \cap A_j^{\beta_j}$$

$$\Rightarrow E_\alpha \cap E_\beta = [\bigcap_{j \neq i \in \mathbb{N}} A_i^{\alpha_i}] \cap [\bigcap_{j \neq i \in \mathbb{N}} A_i^{\beta_i}] \cap A_j^{\alpha_j} \cap A_j^{\beta_j} = [\bigcap_{j \neq i \in \mathbb{N}} A_i^{\alpha_i}] \cap [\bigcap_{j \neq i \in \mathbb{N}} A_i^{\beta_i}] \cap \varnothing$$
$$= \varnothing$$

además, es claro que cada E_α es no vacío. Finalmente veamos qué $E \subseteq S$.
En efecto pues cada E_α es intersección numerable de elementos de S (los A_i y sus complementos), por lo que $E_\alpha \in S$. Por lo tanto, dado que $E \subseteq S$ tendremos que $|E| \leq |S| \Rightarrow 2^{|\mathbb{N}|} \leq |\mathbb{N}|$!!!!, pero esto no es posible, por lo tanto S es no numerable.

■

Problema 17. –

Sea $(E_n)_1^\infty$ una sucesión de subconjuntos de X. Pruebe:

i) $\chi_{\underline{\lim}_{n\to\infty}(E_n)} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \chi_{E_n}$ y $\chi_{\overline{\lim}_{n\to\infty}(E_n)} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \chi_{E_n}$.

ii) $(\chi_{E_n})_1^\infty$ converge si y sólo si $\underline{\lim}_{n\to\infty}(E_n) = \overline{\lim}_{n\to\infty}(E_n)$. En cuyo caso $\underline{\lim}_{n\to\infty} \chi_{E_n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \chi_{E_n}$.

Demostración:

(i) Sea $x \in X$.

Caso 1 : Si $x \in \underline{\lim}_{n\to\infty} E_n$. Entonces tendremos que $\chi_{\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n}(x) = 1$ y por otro lado dado que $x \in \underline{\lim}_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{k=n}^\infty E_k \Rightarrow$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \bigcap_{k=m}^\infty E_k$ por lo que $x \in E_k$ $\forall k \geq m$, por lo que $\chi_{E_k}(x) = 1$ para toda $k \geq m$, entonces $\lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \chi_{E_k}(x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n>m}} \inf_{k\geq n} \chi_{E_k}(x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n>m}} 1 = 1$ por lo que $\chi_{\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n}(x) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \chi_{E_k}(x)$.

Caso 2 : Si $x \notin \underline{\lim}_{n\to\infty} E_n$. Entonces tendremos que $\chi_{\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n}(x) = 0$ y por otro lado dado que $x \notin \underline{\lim}_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{k=n}^\infty E_k \Rightarrow$ existe $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin \bigcap_{k=n}^\infty E_k$ por lo que debe de existir un $m \geq n$ para cada n tal que $x \notin E_m$. Por lo que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ que demos siempre encontraremos un $m \geq n$ tal que $\chi_{E_m}(x) = 0$, con lo que $\lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \chi_{E_k}(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$ por lo que $\chi_{\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n}(x) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \chi_{E_k}(x)$.

De forma similar se demuestra lo segundo.

(ii) En efecto, supongamos que $\lim_{n\to\infty} \chi_{E_n} = L \Leftrightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} \chi_{E_n} = L = \overline{\lim}_{n\to\infty} \chi_{E_n} \overset{(i)}{\Leftrightarrow} \chi_{\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n} = L = \chi_{\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n} \Leftrightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} E_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} E_n$. Esto último pues $\chi_A = \chi_B \Leftrightarrow A = B$, cuya demostración es sencilla.

■

Problema 18. –

Sea $(E_n)_1^\infty$ una sucesión de subconjuntos de X. Definimos $D_1 = E_1$, $D_2 = D_1 \triangle E_2$ y en general $D_{n+1} = D_n \triangle E_{n+1}$ para $n = 1, 2, \ldots$ Pruebe:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(D_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(D_n) \Leftrightarrow \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(E_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(E_n) = \emptyset$$

(Sugerencia: Use el anterior).

Demostración: Supongamos que $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, D_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, D_n$ esto pasa (por el problema 17) si y solo si (D_n) converge y además $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{D_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{D_n}$. Por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned}\underline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{D_n} &= \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{D_{n-1}\Delta E_{n-1}} \underset{\otimes}{=} \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{D_{n-1}} + \chi_{E_{n-1}} - 2\chi_{D_{n-1}}\chi_{E_{n-1}} \\ &= \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{D_{n-1}} + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{E_{n-1}} - 2\,\underline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{D_{n-1}} \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{E_{n-1}}\end{aligned}$$

llamando a $L = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{D_n}$ y $M = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{E_n}$ tendremos

$$L = L + M - 2L\cdot M \quad \Leftrightarrow \quad 0 = M(1-2L) \quad \Leftrightarrow \quad M = 0 \text{ o } L = \tfrac{1}{2}$$

pero tenemos que $L = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{D_n} = 0$ o 1 por lo que $L \neq \frac{1}{2}$ por lo que $M = 0$, es decir, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{E_n} = 0 \;\Leftrightarrow\; \chi_{\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n} = 0 \;\Leftrightarrow\; \underline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n = \varnothing$.

Y de forma análoga para $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{D_n}$ obtenemos que $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{E_n} = 0 \;\Leftrightarrow\; \chi_{\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n} = 0 \;\Leftrightarrow$ $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n = \varnothing$ por lo que $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n = \varnothing$.

■

$\otimes$ Se tiene que $\chi_{A\Delta B} = \chi_{(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)} = \chi_{A\cap B^c} + \chi_{A^c\cap B} - \chi_{(A\cap B^c)\cap(A^c\cap B)} = \chi_{A\cap B^c} + \chi_{A^c\cap B} - \chi_\varnothing = \chi_{A\cap B^c} + \chi_{A^c\cap B} = \chi_A\chi_{B^c} + \chi_{A^c}\chi_B = \chi_A(1-\chi_B) + (1-\chi_A)\chi_B = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B$, por lo tanto $\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B$.

Problema 19. –

Sea $f : X \to Y$ una función y sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ dado. Pruebe que:

$$\mathcal{A}\left(f^{-1}(\mathcal{B})\right) = f^{-1}\left(\mathcal{A}(\mathcal{B})\right) \quad \text{y} \quad \mathcal{S}\left(f^{-1}(\mathcal{B})\right) = f^{-1}\left(\mathcal{S}(\mathcal{B})\right)$$

(Sugerencia: Considere a la familia $K = \{D \subset Y : f^{-1}(D) \in \mathcal{A}(f^{-1}(\mathcal{B}))\}$ y análogamente con $\mathcal{S}(f^{-1}(\mathcal{B}))$).

Demostración: Basta probarlo para la sigma algebra, pues esta es un algebra que soporta uniones numerables, por lo que las demás propiedades se valdrán.

Por lo visto en clase sabemos que la imagen inversa preserva sigmas algebras, por lo que $f^{-1}(S(B))$ es sigma algebra de conjuntos de X.

PD] $S(f^{-1}(B)) = f^{-1}(S(B))$

$\subseteq$] En efecto, como $B \subseteq S(B) \Rightarrow f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(S(B)) \Rightarrow S(f^{-1}(B)) \subseteq S(f^{-1}(S(B))) = f^{-1}(S(B))$.

$\supseteq$] Sea $K = \{D \subset Y : f^{-1}(D) \in S(f^{-1}(B))\}$, por lo visto en clase el 21 de abril sabemos que K es sigma algebra de conjuntos de Y y además $B \subseteq K$ pues para cada $E \in B \subseteq S(B)$ se tiene que $f^{-1}(E) \subseteq f^{-1}(S(B))$, con ello tenemos una sigma algebra que contiene a K por lo que por definición de sigma algebra generada $\Rightarrow S(B) \subseteq K$ entonces tendremos que para todo $E \in S(B)$ tendremos que $f^{-1}(E) \in S(f^{-1}(B)) \Rightarrow f^{-1}(S(B)) \subseteq S(f^{-1}(B))$. Terminando la prueba.

■

Problema 21. –

Sea (X, S) un espacio medible y sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función S-medible, pruebe que

$$\{x \in X : f(x) = a\} \in S \quad \text{para toda } a \in \overline{\mathbb{R}}$$

Dé un ejemplo de una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que

$$\{x \in X : f(x) = a\} \in S \quad \text{para toda } a \in \overline{\mathbb{R}}$$

pero que no sea S-medible.

Demostración: En efecto, para $a \in \mathbb{R}$ por lo visto en clase sabemos que $\{a\} \in B_{\mathbb{R}} \subset B_{\overline{\mathbb{R}}}$, y al ser f función S-medible tendremos que $f^{-1}(\{a\}) \in f^{-1}(B_{\overline{\mathbb{R}}}) \subseteq S \Rightarrow f^{-1}(\{a\}) \in S$ $\therefore$ $\{x \in X : f(x) = a\} \in S$. Y como $B_{\overline{\mathbb{R}}} = S(B_{\mathbb{R}} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\})$ pues en efecto $\{+\infty\}, \{-\infty\} \in B_{\overline{\mathbb{R}}}$ y entonces $f^{-1}(\{\pm\infty\}) \in f^{-1}(B_{\overline{\mathbb{R}}}) \subseteq S \Rightarrow f^{-1}(\{\pm\infty\}) \in S$.

■

Problema 24. –

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable. Pruebe que $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Borel medible. (Sugerencia: $f'(x) = \lim_{n\to\infty} n\{f(x+1/n) - f(x)\}$ $(x \in \mathbb{R})$. Pruebe que $f_a(x) = f(x+a)$ es Borel medible, para cada $a \in \mathbb{R}$ fija).

Demostración: Veamos que $f_a(x) = f(x+a)$ es Borel medible para cada $a \in \mathbb{R}$ fija.

En efecto, como f es diferenciable, entonces es continua y por tanto al componerla con la función $x+a$ que es continua en $\mathbb{R}$ obtendré una función continua, por lo que f_α es continua y por lo visto el día 13 de mayo, f_α es Boreliana.

Ahora consideremos $f_n(x) = n[f(x+1/n) - f(x)]$ sucesión de funciones Borelianas ya que, por lo anterior, $f(x+1/n)$ es Boreliana y al ser $M(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ espacio vectorial, la suma y el producto por escalar seguirá siendo Boreliana. Entonces tendremos que de existir $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = F(x)$ será una función Boreliana. Finalmente veamos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n[f(x+1/n) - f(x)] \underset{m=\frac{1}{n}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+m)-f(x)}{m} = f'(x)$$

por lo que $f'(x)$ es Boreliana ya que es el limite de funciones Borelianas.

■

Problema 25. –

Sea (f_n) una sucesión de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y sea

$$A = \{x \in X : (f_n(x)) \text{ converge en } \mathbb{R}\}.$$

Pruebe que

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{p=1}^{\infty} \left\{x \in X : |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \frac{1}{k}\right\}$$

Demostración: Por doble contención, llamemos A_1 y A_2 al primer y segundo conjunto.

$\subseteq$] Sea $x \in A_1 \Rightarrow (f_n(x))$ converge en $\mathbb{R}$ y esto es si y solo si $(f_n(x))$ es de Cauchy, por lo que para cada $\frac{1}{k} > 0$ con $k \in \mathbb{N}$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n, n+p > N$ con $p \in \mathbb{N}$ tendremos que

$$\left|f_n(x) - f_{n+p}(x)\right| < \frac{1}{k}$$

con lo que tenemos que x cumple que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $p \in \mathbb{N}$ se tiene que $\left|f_n(x) - f_{n+p}(x)\right| < \frac{1}{k}$ $\therefore$ $x \in A_2$.

$\supseteq]$ Sea $x \in A_2 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{p=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : \left|f_n(x) - f_{n+p}(x)\right| < \frac{1}{k}\}$ por lo que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ para el cual $x \in \bigcap_{p=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : \left|f_N(x) - f_{N+p}(x)\right| < \frac{1}{k}\}$ $\therefore$ $\forall k \in \mathbb{N}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left|f_N(x) - f_{N+p}(x)\right| < \frac{1}{k}$ para cualquier $p \in \mathbb{N}$.

Con esto sea $\varepsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2k} < \varepsilon$ y aplicando lo anterior a este $2k$ tenemos que existirá un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p \in \mathbb{N}$ se tiene que $\left|f_N(x) - f_{N+p}(x)\right| < \frac{1}{2k}$, entonces sean $n, m \geq N$ por lo que existen $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n = N + p_1$ y $m = N + p_2$, con lo que

$$\left|f_n(x) - f_m(x)\right| \leq \left|f_n(x) - f_N(x)\right| + \left|f_N(x) - f_m(x)\right| = \left|f_{N+p_1}(x) - f_N(x)\right| + \left|f_N(x) - f_{N+p_2}(x)\right|$$
$$< \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} < \frac{1}{k} = \varepsilon$$

por lo que $(f_n(x))$ es de Cauchy, por tanto, converge $\therefore$ $x \in A_1$.

■

Problema 29. –

Sea (X, S, μ) un espacio de medida y $E_1, \ldots, E_n \in S$.

Para cada $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fija, sea $C_m = \{x \in X : x \in E_j$ para exactamente m índices $j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Pruebe:

i) $C_m \in S$.

ii) $\sum_{m=1}^{n} \mu(E_m) = \sum_{m=1}^{n} m\mu(C_m)$.

iii) Si $D_m = \{x \in X : x \in E_j$ para a lo más m índices $j \in \{1, \ldots, n\}\}$ $(1 \leq m \leq n)$ entonces:

$$\sum_{m=1}^{n} \mu(E_m) \leq \sum_{m=1}^{n} m\mu(D_m).$$

iv) Suponga ahora que $\mu(X) = 1$ y que $A_1, A_2, \ldots, A_n \in S$ son tales que cada $x \in X$ pertenece al menos a r de los conjuntos A_i. Concluya que existe al menos un índice i tal que $\mu(A_i) \geq r/n$.

Demostración:

(i)

Problema 30. –

Sea (X, S, μ) un espacio de medida y $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de elementos de S.

i) Si $\mu(A_n \cap A_m) = 0$ para toda $n \neq m$ entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{(casi } \sigma\text{-aditividad)}$$

ii) Si $\mu(A_n \triangle B_n) = 0$ para toda n entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right),\ \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \triangle \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right)$$

$$\mu\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n \triangle \overline{\lim_{n\to\infty}}\, B_n\right) \quad \text{y} \quad \mu\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n \triangle \underline{\lim_{n\to\infty}}\, B_n\right)$$

son todos iguales a cero.

(Sugerencia: Use la sugerencia del ejercicio (6)).

Demostración:

(i)

Caso 1: Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_m) = +\infty$.

Entonces tendremos que $+\infty = \mu(A_m) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = +\infty$ y por otro lado tendremos que $+\infty = \mu(A_m) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = +\infty$ por lo que son iguales.

Caso 2: Si $\mu(A_n) < +\infty\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Sea $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Denotaremos por $A_F = \bigcap_{i\in F} A_i$ con $\varnothing \neq F \subseteq \mathbb{N}_k$.

Obs 1.- Se tiene que $\mu(A_F) = 0\ \forall \varnothing \neq F \subset \mathbb{N}_k$ con $|F| \geq 2$, es decir la medida de cualquier intersección de al menos dos elementos de la sucesión es cero, esto pues tenemos que $\mu(A_F) \leq \mu(A_i \cap A_j)$ para algunos $i, j \in F$ pero por hipótesis $\mu(A_i \cap A_j) = 0$, por lo que $\mu(A_F) = 0$.

Obs 2.- Para cualquiera $C_1, ..., C_k$ conjuntos se tiene que $\mu(\bigcup_{n=1}^{k} C_n) = -\sum_{\varnothing \neq F \subseteq \mathbb{N}_k} (-1)^{|F|} \mu(C_F)$.

En efecto, con $k = 2$ tenemos que

$$\mu(C_1 \cup C_2) = \mu(C_1) + \mu(C_2) - \mu(C_1 \cap C_2) = -[-\mu(C_1) - \mu(C_2) + \mu(C_1 \cap C_2)]$$

Ahora supongamos que es valido para una $k > 2$. Tenemos que

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{k+1} C_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{k} C_n \cup C_{k+1}) \underset{PB}{=} \mu(\bigcup_{n=1}^{k} C_n) + \mu(C_{k+1}) - \mu([\bigcup_{n=1}^{k} C_n] \cap C_{k+1})$$
$$\underset{HI}{=} -\sum_{\varnothing\neq F\subseteq \mathbb{N}_k} (-1)^{|F|}\mu(C_F) + \mu(C_{k+1}) - \mu(\bigcup_{n=1}^{k}[C_n \cap C_{k+1}])$$

llamando $D_n = C_n \cap C_{k+1}$ y por hipótesis de inducción obtenemos

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{k+1} C_n) = -\sum_{\varnothing\neq F\subseteq \mathbb{N}_k} (-1)^{|F|}\mu(C_F) + \mu(C_{k+1}) - (-\sum_{\varnothing\neq F\subseteq \mathbb{N}_k} (-1)^{|F|}\mu(D_F))$$
$$= -\sum_{\varnothing\neq F\subseteq \mathbb{N}_k} (-1)^{|F|}\mu(C_F) - \sum_{\substack{\varnothing\neq F\subseteq \mathbb{N}_{k+1} \\ k+1\in F}} (-1)^{|F|+1}\mu(C_F))$$
$$= -\sum_{\substack{\varnothing\neq F\subseteq \mathbb{N}_{k+1} \\ k+1\notin F}} (-1)^{|F|}\mu(C_F) - \sum_{\substack{\varnothing\neq F\subseteq \mathbb{N}_{k+1} \\ k+1\in F}} (-1)^{|F|+1}\mu(C_F))$$
$$= -\sum_{\varnothing\neq F\subseteq \mathbb{N}_{k+1}} (-1)^{|F|}\mu(C_F)$$

Por lo tanto $\mu(\bigcup_{n=1}^{k} C_n) = -\sum_{\varnothing\neq F\subseteq \mathbb{N}_k} (-1)^{|F|}\mu(C_F)$.

Con esto tendremos que $\mu(\bigcup_{n=1}^{k} A_n) = -\sum_{\varnothing\neq F\subseteq \mathbb{N}_k} (-1)^{|F|}\mu(A_F)$, pero por la observación 1 si $|F| \geq 2$ entonces $\mu(A_F) = 0$, con lo que $\mu(\bigcup_{n=1}^{k} A_n) = -\sum_{\substack{\varnothing\neq F\subseteq \mathbb{N}_k \\ |F|=1}} (-1)^{|F|}\mu(A_F) = \sum_{n=1}^{k}\mu(A_n)$.

Por otro lado tenemos que $\mu(\bigcup_{n=1}^{k} A_n) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ y al ser la sucesión $E_k = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$ creciente y por continuidad tendremos que $\lim_{k\to\infty}\mu(\bigcup_{n=1}^{k} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ pero por lo anterior $\lim_{k\to\infty}\mu(\bigcup_{n=1}^{k} A_n) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\mu(A_n)$ por lo que $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$.

■

(ii)

⊙ Veamos qué $\bigcup A_n \Delta \bigcup B_n \subseteq \bigcup A_n \Delta B_n$. En efecto, sea $x \in \bigcup A_n \Delta \bigcup B_n$ entonces ($x \in \bigcup A_n$ y $x \notin \bigcup B_n$) o ($x \notin \bigcup A_n$ y $x \in \bigcup B_n$). En el primer caso tendremos que $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_m$ y $\forall n \in \mathbb{N}, x \notin B_n$ en particular para m, con lo que $x \in A_m$ y $x \notin B_m \Rightarrow x \in A_m \Delta B_m \subseteq \bigcup A_n \Delta B_n$, el otro caso es análogo.

Con esto tendremos que $\mu(\bigcup A_n \Delta \bigcup B_n) \leq \mu(\bigcup A_n \Delta B_n) \leq \sum \mu(A_n \Delta B_n) \underset{Hip}{=} 0$.

⊙ Ahora notemos que si $C \subseteq D$ y $E \subseteq F$ entonces $C\Delta E \subseteq D \Delta F$, pues si $x \in C\Delta E \Rightarrow$ ($x \in C$ y $x \notin E$) o ($x \notin C$ y $x \in E$) y en el primer caso tendremos que $x \in D$ y $x \notin F \Rightarrow x \in D\Delta F$, análogamente el otro caso.

Entonces como $\bigcap A_n \subseteq \bigcup A_n$ y $\bigcap B_n \subseteq \bigcup B_n$ entonces $\bigcap A_n \Delta \bigcap B_n \subseteq \bigcup A_n \Delta \bigcup B_n$ así $\mu(\bigcap A_n \Delta \bigcap B_n) \leq \mu(\bigcup A_n \Delta \bigcup B_n) = 0$ por lo que $\mu(\bigcap A_n \Delta \bigcap B_n) = 0$.

⊙ Sean $E_k = \bigcup_{k\geq n} A_k$ y $F_k = \bigcup_{k\geq n} A_k$, entonces notemos que por lo anterior $\mu(E_k \Delta F_k) = 0$, esto pues en las demostraciones anteriores no importaba desde donde empezaban las uniones.

Con ello $\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \Delta \overline{\lim_{n\to\infty}} B_n) = \mu(\bigcap_{n=1} \bigcup_{k\geq n} A_k \Delta \bigcap_{n=1} \bigcup_{k\geq n} B_k) = \mu(\bigcap_{n=1} E_k \Delta \bigcap_{n=1} F_k)$ y por lo anterior tenemos que $\mu(\bigcap_{n=1} E_k \Delta \bigcap_{n=1} F_k) = 0$ por lo que $\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \Delta \overline{\lim_{n\to\infty}} B_n) = 0$.

De forma análoga definiendo $E_k = \bigcap_{k\geq n} A_k$ y $F_k = \bigcap_{k\geq n} A_k$ se obtiene lo mismo para el límite inferior.

■

Problema 33. –

Sea (X, S, μ) un espacio de medida y (E_n) una sucesión de elementos de S. Pruebe:

i) $\mu\left(\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n\right) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \mu(E_n)$. Dé un ejemplo en el que la desigualdad sea estricta.

ii) Si $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < +\infty$ entonces $\overline{\lim}_{n\to\infty} \mu(E_n) \leq \mu\left(\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n\right)$. Dé un ejemplo en el que la desigualdad sea estricta.

iii) Pruebe con un ejemplo que (ii) podría no cumplirse si

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = +\infty.$$

Demostración:

(i)

Caso 1: Si $\mu(E_n) = +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces tendremos que $\underline{\lim}_{n\to\infty} \mu(E_n) = +\infty$ y efectivamente sea cual sea el valor tendremos que

$$\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

Caso 2: Si existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(E_n) < +\infty \ \forall n \geq m$.

Tenemos que $\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ siendo $F_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$ sucesión creciente de conjuntos, ya que $F_n \subseteq F_{n+1}$ entonces por la continuidad de la medida (clase 16 de mayo):

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n>m}} \mu(F_n)$$

y por otro lado tendremos que $F_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \subseteq E_k \quad \forall k > n$ por lo que $\mu(F_n) \leq \mu(E_k)\ \forall k > n$, por lo que

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n>m}} \mu(F_n) \leq \lim_{\substack{n\to\infty \\ n>m}} \inf_{k\geq n} \mu(E_n) = \underline{\lim}_{\substack{n\to\infty \\ n>m}} \mu(E_n) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

■

(ii) No necesitaremos dos casos, pues se dará por consecuencia del teorema visto en la clase del 16 de mayo que es valido si hay o no un conjunto con medida no finita.

Tenemos que $\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ con $G_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ sucesión decreciente de conjuntos, ya que $G_n \supseteq G_{n+1}$, y tal que $\mu(G_1) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) < +\infty$ (por hipótesis), entonces por el teorema mencionado anteriormente tendremos que

$$\mu(\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(G_n)$$

y por otro lado tendremos que $G_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \supseteq E_k \quad \forall k > n$ por lo que $\mu(G_n) \geq \mu(E_k)\ \forall k > n$, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(G_n) \geq \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \mu(G_n) = \overline{\lim}_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

por lo tanto $\mu(\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n) \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

(iii) Dicha desigualdad

Problema 34. –

Sea (X, S, μ) un espacio de medida y sea $\mathcal{F} = \{A \in S : \mu(A) < +\infty\}$. Definimos una relación $\sim$ en $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ poniendo: $A \sim B (A, B \in \mathcal{F}) \Leftrightarrow \mu(A \triangle B) = 0$.

i) Pruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia.

ii) Denotamos por $\widetilde{\mathcal{F}}$ al conjunto de las clases de equivalencias y por $[A]$ la clase de equivalencia de $A \in \mathcal{F}$. Pruebe que $d : \widetilde{\mathcal{F}} \times \widetilde{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}$ dada por $d([A], [B]) = \mu(A \triangle B)$ está bien definida y que $\left(\widetilde{\mathcal{F}}, d\right)$ es un espacio métrico completo.

(Sugerencia: Si $([A_n])_1^\infty$ es una sucesión d-Cauchy, halle una subsucesión $([A_{n_k}])_{k=1}^\infty$ tal que $d\left([A_{n_k}], [A_{n_{k+1}}]\right) < \frac{1}{2^k}$. Sea $A_* = \varliminf_{k\to\infty} A_{n_k}$. Pruebe que $A_* \in \mathcal{F}$ y usando la sugerencia del ejercicio (6) pruebe que

$$A_* \triangle A_{n_k} \subset \bigcup_{j=k}^{\infty} A_{n_j} \triangle A_{n_{j+1}}$$

por lo que $d\left([A_{n_k}], [A_*]\right) \to 0$. Concluya que $d\left([A_n], [A_*]\right) \to 0$).

Demostración:

(i) En efecto.

• Reflexiva. Sea $A \in F$ entonces $\mu(A\Delta A) = \mu(\varnothing) = 0$ por lo que $A \sim A$.

• Simétrica. Sean $A, B \in F$ tales que $A \sim B$ entonces $0 = \mu(A\Delta B) = \mu(B\Delta A)$ $\mu(A\Delta A) = \mu(\varnothing) = 0$ por lo que $B \sim A$.

• Transitiva. Sean $A, B, C \in F$ tales que $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $\mu(A\Delta B) = 0$ y $\mu(B\Delta C) = 0$ pero tenemos que $A\Delta C \subseteq (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$. En efecto, dado $x \in A\Delta C$ tendremos que ($x \in A$ y $x \notin C$) o ($x \notin A$ y $x \in C$), en el primer caso tendremos dos subcasos. Si $x \in B$ entonces tenemos que $x \in B$ y $x \notin C$ por lo que $x \in B\Delta C$ y si $x \notin B$ tendremos que $x \notin B$ y $x \in A$ por lo que $x \in A\Delta B$, en cualquier caso tendremos que $x \in (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$, análogamente para el caso en que ($x \notin A$ y $x \in C$). Entonces tendremos que $\mu(A\Delta C) \le \mu((A\Delta B) \cup (B\Delta C)) \le \mu(A\Delta B) + \mu(B\Delta C)$ $= 0 + 0$ por lo que $\mu(A\Delta C) = 0$ $\therefore$ $A \sim C$.

■

(ii) Tenemos que ver varias cosas.

(1) d es métrica.

-Sean $[A], [B] \in \tilde{F}$ tal que $d([A], [B]) = 0 \iff \mu(A\Delta B) = 0 \iff A \sim B \iff [A] = [B]$.

-Sean $[A], [B] \in \tilde{F}$, entonces $d([A], [B]) = \mu(A\Delta B) = \mu(B\Delta A) = d([B], [A])$.

-Sean $[A], [B], [C] \in \tilde{F}$, entonces por el inciso anterior sabemos que $A\Delta C \subseteq (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$ por lo que $\mu(A\Delta C) \le \mu(A\Delta B) + \mu(B\Delta C) \iff d([A], [C]) \le d([A], [B]) + d([B], [C])$.

Con lo que, en efecto, es métrica.

(2) Si $([A_n])_1^\infty$ es sucesión d-Cauchy entonces existe $([A_{n_k}])_1^\infty$ subsucesión tal que $d([A_{n_k}],[A_{n_{k+1}}])$ $< \frac{1}{2^k}$.

Sea $([A_n])_1^\infty$ sucesión d-Cauchy,

Problema 36. –

(La compleción de un espacio de medida).

Sea (X, S, μ) un espacio de medida y sea $\mathcal{N} = \{N \in S : \mu(N) = 0\}$ el σ-anillo de conjuntos S-medibles de medida cero. Definimos

$$\overline{S} = \{(E \cup M_1) - M_2 : E \in S \quad \text{y} \quad M_1 \subset N_i \in \mathcal{N} \quad (i = 1, 2)\}.$$

Pruebe

i) $F \in \overline{S} \Leftrightarrow F = E \cup M_0$ con $E \in S$ y M_0 un subconjunto de algún $N_0 \in \mathcal{N}$. (E y M_0 no son necesariamente únicos).

ii) $\overline{S}$ es una σ-álgebra y $S \subset \overline{S}$. (Sugerencia: Use (i)).

iii) $\overline{\mu} : \overline{S} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $\overline{\mu}(E \cup M_0) = \mu(E)$ está bien definida, es una medida en $\overline{S}$ y $\overline{\mu}|_S = \mu$.

Demostración:

(i)

$\Rightarrow]$ Sea $F \in \overline{S} \Leftrightarrow \exists A \in S$ y $M_i \subset N_i \in N$ $(i = 1, 2)$ tales que

$$\begin{aligned} F = [A \cup M_1] - M_2 &= (A - M_2) \cup (M_1 - M_2) = (A - [N_2 \cap M_2]) \cup (M_1 - M_2) \\ &= (A - N_2) \cup (A - M_2) \cup (M_1 - M_2) \end{aligned}$$

sean $E = A - N_2$ y $N_0 = (A - M_2) \cup (M_1 - M_2)$ y veamos que estos son los buscados. En efecto, como $A, N_2 \in S \Rightarrow E = A - N_2 \in S$ por ser sigma algebra, y por otro lado tenemos que $N_0 = (A - M_2) \cup (M_1 - M_2) \subseteq (M_2{}^c) \cup (M_1 - M_2) = (M_2{}^c) \cup (M_1 \cap M_2{}^c) = (M_2{}^c \cup M_1) \cap M_2{}^c$

Problema 38. –

Sea (X, S) un espacio medible y sea $\mu : S \to \mathbb{R}$ una función finita, no negativa y aditiva. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes para sucesiones (A_k) de elementos de S:

i) $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ $\quad (A_l \cap A_k = \emptyset, l \neq k)$ (σ-aditividad).

ii) Si $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ y $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ entonces: $\mu(A) = \lim_{k\downarrow\infty} \mu(A_k)$ (continuidad por arriba).

iii) Si $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ y $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ entonces: $\mu(A) = \lim_{k\uparrow\infty} \mu(A_k)$ (continuidad por abajo).

iv) $\mu\left(\lim_{k\to\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$ (continuidad).[15]

Demostración:

Consideremos una curva C

Problema 39. –

Sea (X, S, μ) un espacio de medida σ-finita y sea $\mathcal{D} \subset S$ una familia consistente de conjuntos ajenos entre sí. Sea $E \in S$ con $\mu(E) > 0$ fijo.

Pruebe que la familia $\mathcal{D}_E = \{D \in \mathcal{D} : \mu(E \cap D) > 0\}$ es a lo sumo numerable.

(Sugerencia: Empiece con el caso $\mu(E) < +\infty$).

Demostración:

Consideremos una curva C

Problema 41. –

Sea (X, S, μ) un espacio de medida σ-finita y sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función S-medible. Pruebe que existe una sucesión de funciones S-simples $(s_n)_1^{\infty}$ tales que $s_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$ y $\mu(\{x \in X : s_n(x) \neq 0\}) < \infty$ para toda n.

Demostración:

Consideremos una curva C