- Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Análisis Matemático II

Tarea 3

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 43. –

Sea $f \in M^+(X, S)$ tal que $\int f\, d\mu < +\infty$ Pruebe:

i) $\mu(\{x \in X : f(x)\} = +\infty) = 0$.

ii) $\{x \in X : f(x) > 0\}$ es σ-finito.

Demostración:

(i) Sea $E = \{x \in X : f(x) = +\infty\}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $E_n = \{x \in X : f(x) \geq n\}$, entonces es claro que $E \subseteq E_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ por lo que $\mu(E) \leq \mu(E_n)$, con esto bastara probar que cuando $n \to \infty \Rightarrow \mu(E_n) = 0$.

Notemos que para cada $x \in E_n \Rightarrow f(x) \geq n$ por lo que si $x \in E_n$ entonces $f(x) \geq \chi_{E_n}(x) \cdot n$, y por hipótesis $f(x) \geq 0$ por lo que si $x \notin E_n$ entonces $f(x) \geq 0 = 0 \cdot n = \chi_{E_n}(x) \cdot n$, en conclusión, $\chi_{E_n} \cdot n \leq f$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\int \chi_{E_n} \cdot n d\mu \leq \int f d\mu \quad \Leftrightarrow \quad n\int \chi_{E_n} d\mu \leq \int f d\mu \quad \Leftrightarrow \quad n\mu(E_n) \leq \int f d\mu$$
$$\Leftrightarrow \quad \mu(E_n) \leq \frac{1}{n}\int f d\mu \underset{\text{hip}}{<} +\infty \quad \forall n \geq 1$$

con esto tendremos que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int f d\mu = \int f d\mu \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

por lo tanto, $\mu(E) = 0$.

$\blacksquare$

(ii) En efecto, para cada $n \geq 1$ sea $F_n = \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ siguiendo el mismo procedimiento que el inciso anterior tenemos que $\chi_{F_n} \cdot \frac{1}{n} \leq f$ por lo que $\mu(F_n) \leq n\int f d\mu < +\infty$ $\forall n \geq 1$. Únicamente faltaría ver qué $\{x \in X : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

En efecto, si $x \in \{x \in X : f(x) > 0\} \Leftrightarrow f(x) > 0 \underset{\text{prop.aquimediana}}{\Leftrightarrow} \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) > \frac{1}{n} \Leftrightarrow x \in F_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, por tanto, $\{x \in X : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ con cada $\mu(F_n) < +\infty$, es decir, es σ finito.

$\blacksquare$

Problema 44. –

Si $\mu(X) < +\infty$ y $f \in M^+(X,S)$ entonces:

$$\int f\, d\mu < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \mu(\{x \in X : f(x) \geq 2^n\}) < +\infty.$$

Demostración: Sea $E_0 = f^{-1}(-\infty, 2)$ y para cada $n > 0$, $E_n = f^{-1}[2^n, \infty)$, como $f \in M^+(X,S)$ entonces para cada n se tiene que $E_n \in S$ y además si $n > 0$ entonces $\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k = E_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}[2^k,\infty) = f^{-1}(-\infty,2) \cup f^{-1}[2,\infty) = f^{-1}[\mathbb{R}] = X$.

Por lo anterior tenemos que si $x \in X$ entonces $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_m$, con lo que si definimos $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \chi_{E_k}$ se tiene que $s_m = 2^m \leq f < 2^{m+1} = 2 \cdot 2^m = 2s_m$. Además, también es claro que $s_n \to s$ puntualmente donde $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \chi_{E_k}$, por lo que de lo anterior $s \leq f < 2s$ (pues para cada $x \in X$ podre encontrar un $m \in \mathbb{N}$ tal que $s_m \leq f < 2s_m$ y tendiendo m a infinito se tiene)

Finalmente notemos que de esto tendremos que $\int s d\mu \leq \int f d\mu < 2\int s d\mu$, pero por el teorema de convergencia monótona (pues $s_m(x) \leq s_{m+1}(x)$ ya que es una suma) tendremos

$$\begin{aligned}\int s d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int s_n d\mu \underset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 2^k \mu(E_k) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \mu(E_k) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \mu(f^{-1}[2^k,\infty)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \mu(\{x \in X : f(x) \in [2^k,\infty)) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \mu(\{x \in X : f(x) \geq 2^k)\end{aligned}$$

(*) esto se da por la proposición 4.4 del Grabinsky que fue demostrado en clase.

Por todo lo anterior tendremos pues

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \mu(\{x \in X : f(x) \geq 2^k) \leq \int f d\mu < 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \mu(\{x \in X : f(x) \geq 2^k)$$

de lo que concluimos que $\int f d\mu < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mu(\{x \in X : f(x) \geq 2^n) < +\infty$

■

Problema 48. –

i) Pruebe con contraejemplos que no hay equivalente al teorema de la convergencia monótona si la sucesión de funciones (f_n) es monótona decreciente. Sin embargo, pruebe que si $f_1 \geq f_2 \geq \dots$ y $\int f_1\, d\mu < +\infty$ entonces:

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

ii) Pruebe que la conclusión del lema de Fatou podría fallar si no se requiere que $f_n \geq 0$.

Demostración:

(i)

⊙ Sea $X = \mathbb{N}$ y $S = \wp(\mathbb{N})$ y consideremos la sucesión de funciones dada para cada $n \in \mathbb{N}$ como $f_n : X \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{\text{Pares}}(x) + 0 \cdot \chi_{\text{Impares}}(x)$ que al ser combinación lineal de características será una sucesión de funciones $s-$medibles y además positivas. Notemos que la sucesión es monótona decreciente, pues para cada x par, $f_n(x) = \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} = f_{n+1}(x)$, por lo que, $f_n(x) > f_{n+1}(x)$ y si x impar entonces $f_n(x) = 0 \geq 0 = f_{n+1}(x)$ por lo que $f_n(x) > f_{n+1}(x)$ $\therefore$ $f_n > f_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir, es decreciente.

Además, notemos que $f_n \to 0$ puntualmente, pues $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\chi_{\text{par}}(x) = 0$, pero tendremos que

$$\int 0 d\mu = 0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\text{pares}| + 0 \cdot |\text{impares}| = \infty$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \neq \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu$$

⊙ Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \bar{M}^+(X,S)$ sucesión tal que $f_1 > f_2 > \ldots$ y $\int f_1 d\mu < +\infty$.
Sea $g_n(x) = f_1(x) - f_n(x)$. Tenemos por hipótesis que $0 \leq f_{n+1} < f_n < f_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ por lo que para cada $x \in X$, $g_n(x) \geq 0$ y además es una sucesión creciente, pues $g_{n+1}(x) = f_1(x) - f_{n+1}(x)$ $> f_1(x) - f_n(x) = g_n(x)$. Finalmente dado que la sucesión $0 \leq f_n < f_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ tendremos que para cada $x \in X$ la sucesión $f_n(x)$ es acotada y creciente, por tanto convergente, entonces $f_n \to f = \lim f_n$ que como $f_n \in \bar{M}^+(X,S)$ $\Rightarrow f \in \bar{M}^+(X,S)$. Con todo lo anterior tengo una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \bar{M}^+(X,S)$ no decreciente tal que converge a $g = f_1 - f \in \bar{M}^+(X,S)$, entonces por el teorema de convergencia monótona

$$\int_E g d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu \Leftrightarrow \int_E f_1 - f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_1 - f_n d\mu$$
$$\Leftrightarrow \int_E f_1 d\mu - \int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} [\int_E f_1 d\mu - \int_E f_n d\mu] = \lim_{n\to\infty} \int_E f_1 d\mu - \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

y como $\int_E f_1 < +\infty$ entonces

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

■

(ii) Sea $X = \mathbb{N}$ y $S = \wp(\mathbb{N})$ y consideremos la sucesión de funciones dada para cada $n \in \mathbb{N}$ como $f_n : X \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = -\frac{1}{n}\chi_{\text{Pares}}(x) + 0 \cdot \chi_{\text{Impares}}(x) \in M(X,S)$, entonces notemos que $f_n \to 0$ puntualmente, pues $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\chi_{\text{par}}(x) = 0$, pero tendremos que

$$\int 0 d\mu = 0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}|\text{pares}| + 0 \cdot |\text{impares}| = -\infty$$

por lo que

$$\int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu > \underline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

■

Problema 50. –

Pruebe:

i) Si (f_n) es una sucesión de elementos en $M(X,S)$ y si existe $g \in M^+(X,S)$ con $\int g\ d\mu < +\infty$ tal que $f_n \geq -g$ (c.d rel. μ) en $E \in S$ entonces:

$$\int_E \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n\ d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n\ d\mu$$

ii) Si existe $g \in M^+(X,S)$ con $\int g\ d\mu < +\infty$ tal que $f_n \leq -g$ (c.d rel. μ) en $E \in S$, entonces:

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n\ d\mu \leq \int_E \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n\ d\mu$$

Demostración:

Lema. – Sean $f \in M(X,S)$, $E \in S$ y $N \in N(\mu)$, entonces $\int_E fd\mu = \int_{E-N} fd\mu$.

Dem. – En efecto, como N es nulo entonces $E \cap N$ es nulo, por lo que $\int_{E\cup N} fd\mu = \int_E fd\mu + \int_N fd\mu$ y como N es nulo, entonces $\int_{E\cup N} fd\mu = \int_E fd\mu$. Por otro lado, tenemos que $\int_{(E-N)\cup N} fd\mu = \int_{E\cup N} fd\mu$ pero $\int_{(E-N)\cup N} fd\mu = \int_{E-N} fd\mu + \int_N fd\mu = \int_{E-N} fd\mu$ pues $E-N$ y N son disjuntos, así tendremos que $\int_{E-N} fd\mu = \int_{(E-N)\cup N} fd\mu = \int_{E\cup N} fd\mu = \int_E fd\mu$.

(i) Para cada $n \in \mathbb{N}$ defino $h_n := f_n + g \geq 0$, entonces como $f_n, g \in M(X,S)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tendremos que $h_n \in M^+(X,S)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y además como por hipótesis existe $F \in N(\mu)$ nulo tal que $f_n \geq -g$ en $E-F$, entonces $h_n = f_n + g \geq 0$ en $E-F$ por lo que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E h_n d\mu \underset{\text{lema}}{=} \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_{E-F} h_n d\mu$$

y como en $E-F$ se tiene que $h_n \geq 0$ entonces por el Lema de Fatou

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \int_{E-F} h_n d\mu \geq \int_{E-F} \underline{\lim}_{n\to\infty} h_n d\mu$$

por lo que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E h_n d\mu \geq \int_{E-F} \underline{\lim}_{n\to\infty} h_n d\mu \ \Rightarrow\ \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n - gd\mu \geq \int_{E-F} \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n - gd\mu$$
$$\Rightarrow\ \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu - \int_E gd\mu \geq \int_{E-F} (\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n) - gd\mu \ \Rightarrow\ \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu + \underline{\lim}_{n\to\infty} - \int_E gd\mu \geq \int_{E-F} \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu + \int_{E-F} -gd\mu$$
$$\Rightarrow\ \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu - \int_E gd\mu \geq \int_{E-F} \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu - \int_{E-F} gd\mu$$

y como $\int_{E-F} gd\mu \leq \int_E gd\mu < +\infty$ entonces

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu \geq \int_{E-F}\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu \underset{\text{lema}}{=} \int_E \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu$$

por lo que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu \geq \int_E \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu$$

■

(ii) Para cada $n\in\mathbb{N}$ defino $h_n := -f_n - g \geq 0$, entonces como $f_n, g \in M(X,S)$ para cada $n\in\mathbb{N}$ tendremos que $h_n \in M^+(X,S)$ para cada $n\in\mathbb{N}$, y además como por hipótesis existe $F\in N(\mu)$ nulo tal que $f_n \leq -g$ en $E-F$, entonces $h_n = -f_n - g \geq 0$ en $E-F$ por lo que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E h_n d\mu \underset{\text{lema}}{=} \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_{E-F} h_n d\mu$$

y como en $E-F$ se tiene que $h_n \geq 0$ entonces por el Lema de Fatou

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_{E-F} h_n d\mu \geq \int_{E-F}\underline{\lim}_{n\to\infty} h_n d\mu$$

por lo que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E h_n d\mu \geq \int_{E-F}\underline{\lim}_{n\to\infty} h_n d\mu \;\Rightarrow\; \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E -f_n - g d\mu \geq \int_{E-F}\underline{\lim}_{n\to\infty} - f_n - g d\mu$$

$$\Rightarrow\; \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E -f_n d\mu - \int_E g d\mu \geq \int_{E-F}(\underline{\lim}_{n\to\infty} - f_n) - g d\mu \;\Rightarrow\; \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E -f_n d\mu + \underline{\lim}_{n\to\infty} - \int_E g d\mu \geq \int_{E-F}\underline{\lim}_{n\to\infty} - f_n d\mu + \int_{E-F} -g d\mu$$

$$\Rightarrow\; \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E -f_n d\mu - \int_E g d\mu \geq \int_{E-F}\underline{\lim}_{n\to\infty} - f_n d\mu - \int_{E-F} g d\mu$$

y como $\int_{E-F} g d\mu \leq \int_E g d\mu < +\infty$ entonces

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E -f_n d\mu \geq \int_{E-F}\underline{\lim}_{n\to\infty} - f_n d\mu \underset{\text{lema}}{=} \int_E \underline{\lim}_{n\to\infty} - f_n d\mu$$

por lo que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E -f_n d\mu \geq \int_E \underline{\lim}_{n\to\infty} - f_n d\mu \;\Rightarrow\; \underline{\lim}_{n\to\infty}(-1)\int_E f_n d\mu \geq \int_E -\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu \Rightarrow\; \overline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu \leq \int_E \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu$$

■

Problema 51. –
(Lema del promedio).

Sea $f \in \mathcal{L}_1(X,S,\mu)$ tal que $\left|\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\, d\mu\right| \leq k$ con $k \geq 0$ constante, para todo $E \in S$ con $0 < \mu(E) < +\infty$. Pruebe que $|f| \leq k$ (c.d rel. μ).

(Sugerencia: Empiece probando que si $f \in \mathcal{L}_1(X,S,\mu)$, entonces:

$$\mu\left(\{x\in X : |f(x)| > \alpha\} < +\infty, \text{ para todo } \alpha > 0\right)).$$

Demostración: Sean $\alpha > 0$, $f \in L_1(X,S,\mu)$ y sea $A = \{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$. Probaremos que $\mu(A) = 0$. En efecto, primero notemos que

$$A = \{x \in X : f(x) > \alpha \ o \ -f(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \hat{\cup} \{x \in X : -f(x) > \alpha\}$$

y entonces si llamamos $A^+ = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$ y $A^- = \{x \in X : -f(x) > \alpha\}$, como $\mu(A) = \mu(A^+) + \mu(A^-)$ (pues son disjuntos) entonces basta probar que $\mu(A^+) = \mu(A^-) = 0$.
Para esto notemos que si $x \in A^+$ (A^-) entonces $f(x) > \alpha$ $(-f(x) > \alpha)$ y entonces $f(x) \cdot \chi_{A^+} > \alpha \cdot \chi_{A^+}$ $(-f(x) \cdot \chi_{A^-} > \alpha \cdot \chi_{A^-})$, por lo que $f \cdot \chi_{A^+} \geq \alpha \cdot \chi_{A^+}$ y $-f \cdot \chi_{A^-} \geq \alpha \cdot \chi_{A^-}$ (cuando un elemento no esté en el conjunto se cumple la igualdad), entonces

$$f \cdot \chi_{A^+} \geq \alpha \cdot \chi_{A^+} \ \Rightarrow \ \int f \cdot \chi_{A^+} d\mu \geq \int \alpha \cdot \chi_{A^+} d\mu \ \Rightarrow \ \int_{A^+} f d\mu \geq \alpha\mu(A^+)$$

Y

$$-f \cdot \chi_{A^-} \geq \alpha \cdot \chi_{A^-} \ \Rightarrow \ \int -f \cdot \chi_{A^-} d\mu \geq \int \alpha \cdot \chi_{A^-} d\mu \ \Rightarrow \ -\int_{A^-} f d\mu \geq \alpha\mu(A^-)$$

por lo que

$$\mu(A^+) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{A^+} f d\mu < +\infty \, (\text{pues } f \in L_1(\mu)) \ \Rightarrow \ \mu(A^+) < +\infty$$

para A^- si pasara que $\mu(A^-) = +\infty \ \Rightarrow \ \int_{A^+} f d\mu = -\infty$!!! lo cual es imposible, pues $f \in L_1(\mu)$, entonces $\mu(A^-) < +\infty$.

Ahora por contradicción supongamos que $\mu(A^+) > 0$ entonces sabemos que

$$\alpha\mu(A^+) \leq \int_{A^+} f d\mu \ \Rightarrow \ 0 < \alpha \leq \frac{1}{\mu(A^+)} \int_{A^+} f d\mu = \left| \frac{1}{\mu(A^+)} \int_{A^+} f d\mu \right| \ \forall \alpha > 0$$

pero por hipótesis (pues $0 < \mu(A^+) < +\infty$)

$$\left| \frac{1}{\mu(A^+)} \int_{A^+} f d\mu \right| \leq k$$

entonces en particular para $\alpha = k + 1$ tendremos que

$$k + 1 \leq \left| \frac{1}{\mu(A^+)} \int_{A^+} f d\mu \right| \leq k \ \ !!!$$

por tanto $\mu(A^+) = 0$. De forma similar tendremos que $\mu(A^-) = 0$. Por tanto $\mu(A) = \mu(A^+) + \mu(A^-) = 0$, entonces $|f| \leq k$ casi donde quiera pues el conjunto donde no se cumple (A) es nulo.

■

Problema 52. –

Sea (f_n) una sucesión de funciones de $\mathcal{L}_1(X, S, \mu)$, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, d\mu < +\infty.$$

Pruebe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge a una función $f \in \mathcal{L}_1(X, S, \mu)$ que satisface:

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu$$

¿Qué significa lo anterior si $X = \mathbb{N}$, $S = P(\mathbb{N})$ y μ es la medida de conteo?

Demostración:

Problema 53. –

Sea (f_n) una sucesión de elementos de $M^+(X, S)$ tal que: $f_n \to f$ (c.d. rel. μ) y $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu < +\infty$. Pruebe que

$$\int_E f_n \, d\mu \to \int_E f \, d\mu \quad \text{para todo } E \in S$$

(Sugerencia: Aplique el lema de Fatou a las sucesiones $(f_n \chi_E)$ y $(f_n \chi_{X-E})$).

Demostración: Sea $E \in S$ y $g_n = f_n \chi_E$, entonces como para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f_n \in M^+(X,S)$ y χ_E es característica, entonces $g_n \in M^+(X,S)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De la misma manera $h_n = f_n \chi_{X-E} \in M^+(X,S)$. Entonces aplicando el lema de Fatou a estas sucesiones tendremos que

$$\int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n \chi_E d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n \chi_E d\mu = \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

y

$$\int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n \chi_{X-E} d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n \chi_{X-E} d\mu = \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_{X-E} f_n d\mu$$

pero como por hipótesis $f_n \to f$ casi donde quiera entonces existe N nulo tal que $f_n \to f$ en $X - N$, pero entonces $\int \underline{\lim} f_n \chi_E d\mu = \int_E \underline{\lim} f_n d\mu = \int_{E-N} \underline{\lim} f_n d\mu = \int_{E-N} \lim f_n d\mu = \int_E \lim f_n d\mu = \int \lim f_n \chi_E d\mu$ y análogamente $\int \underline{\lim} f_n \chi_E d\mu = \int \lim f_n \chi_E d\mu$, entonces

$$\int_E f d\mu = \int \chi_E \cdot f d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \quad \text{y} \quad \int_{X-E} f d\mu = \int \chi_{X-E} \cdot f d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_{X-E} f_n d\mu$$

es decir

$$\int_E f d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \quad \text{y} \quad \int_{X-E} f d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_{X-E} f_n d\mu$$

ahora, como por hipótesis $\int_X fd\mu < +\infty$, entonces $\int_{X-E} fd\mu = \int_X fd\mu - \int_E fd\mu$ pues $\int_X fd\mu = \int fd\mu < +\infty$. Además, como por hipótesis $\int f_n d\mu \to \int fd\mu < +\infty$ tendremos por convergencia que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\int f_n d\mu - \int fd\mu\right| < +\infty$ por lo que $\int f_n d\mu < +\infty$, entonces de la misma manera $\int_{X-E} f_n d\mu = \int_X f_n d\mu - \int_E f_n d\mu$, con esto

$$\begin{aligned}\int_{X-E} fd\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_{X-E} f_n d\mu \;\Leftrightarrow\; \int_X fd\mu - \int_E fd\mu &\leq \varliminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu - \int_E f_n d\mu \\ &= \varliminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu - \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_X fd\mu - \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu\end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned}\int_X fd\mu - \int_E fd\mu \leq \int_X fd\mu - \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \;&\Rightarrow -\int_E fd\mu \leq -\varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \\ &\Rightarrow \int_E fd\mu \geq \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu\end{aligned}$$

esto último pues $\int_X fd\mu < +\infty$. Entonces por todo lo anterior tenemos que

$$\int_E fd\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \text{ y } \int_E fd\mu \geq \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

entonces

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E fd\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

por lo tanto

$$\int_E fd\mu = \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \;\Rightarrow\; \int_E fd\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

∎

Problema 54. –

(Una generalización del teorema de la convergencia dominada de H. Lebesgue).

Sea (g_n) una sucesión de elementos de $\mathcal{L}_1^+(X,S,\mu)$, tal que

$$g_n \to g \text{ (c.d. rel. } \mu\text{), con } g \in \mathcal{L}_1^+(X,S,\mu) \text{ y } \int g_n\, d\mu \to \int g\, d\mu.$$

Sea (f_n) una sucesión en $M(X,S)$ tal que $|f_n| \leq g_n$ y $f_n \to f \in M(X,S)$ (c.d. rel. μ), entonces:

i) $f \in \mathcal{L}_1(X,S,\mu)$ y

ii) $\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu$ para todo $E \in S$.

Demostración:

Lema. – Sean $f \in M(X,S)$, $E \in S$ y $N \in N(\mu)$, entonces $\int_E fd\mu = \int_{E-N} fd\mu$.

Dem. – En efecto, como N es nulo entonces $E \cap N$ es nulo, por lo que $\int_{E\cup N} fd\mu = \int_E fd\mu$ $+\int_N fd\mu$ y como N es nulo, entonces $\int_{E\cup N} fd\mu = \int_E fd\mu$. Por otro lado, tenemos que $\int_{(E-N)\cup N} fd\mu = \int_{E\cup N} fd\mu$ pero $\int_{(E-N)\cup N} fd\mu = \int_{E-N} fd\mu + \int_N fd\mu = \int_{E-N} fd\mu$ pues $E-N$ y N son disjuntos, así tendremos que $\int_{E-N} fd\mu = \int_{(E-N)\cup N} fd\mu = \int_{E\cup N} fd\mu = \int_E fd\mu$.

(i) Tenemos por hipótesis que $|f_n| \le g_n$ casi donde quiera, entonces existe $N \in N(\mu)$ tal que $|f_n| \le g_n$ en $X-N$, por lo que $\Rightarrow \int_{X-N} |f_n| d\mu \le \int_{X-N} g_n d\mu$ pero por el lema tendremos que $\int_X |f_n| d\mu \le \int_X g_n d\mu \Leftrightarrow \int |f_n| d\mu \le \int g_n d\mu \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} \int |f| d\mu \le \int g d\mu < +\infty$ por lo que $f \in L_1(\mu)$.

(ii) Tenemos que $f_n \le |f_n| \le g_n$ y $-f_n \le |f_n| \le g_n$ entonces definiendo $h_n = g_n + f_n$ y $r_n = g_n - f_n$ tendremos que $h_n, r_n \in M^+(X,S)$ y además como $g_n \to g$ c.d y $f_n \to f$ c.d, entonces tendremos que $h_n \to g+f$ y $r_n \to g-f$ *c.d*, pero no afectara en nada nuevamente por el Lema.
Por lo anterior aplicando el lema de Fatou tenemos que

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} h_n d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int_E h_n d\mu \quad \text{y} \quad \int_E \varliminf_{n\to\infty} r_n d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int_E r_n d\mu$$
$$\Rightarrow \int_E g+fd\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int_E g_n + f_n d\mu \quad \text{y} \quad \int_E g-fd\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int_E g_n - f_n d\mu$$
$$\Rightarrow \int_E g+fd\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu + \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \quad \text{y} \quad \int_E g-fd\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu - \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

y como por hipótesis $\int g_n \to \int g$, entonces

$$\Rightarrow \int_E g+fd\mu \le \int_E gd\mu + \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \quad \text{y} \quad \int_E g-fd\mu \le \int_E gd\mu - \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$
$$\Rightarrow \int_E gd\mu + \int_E fd\mu \le \int_E gd\mu + \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \quad \text{y} \quad \int_E gd\mu - \int_E fd\mu \le \int_E gd\mu - \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

como $\int g < +\infty \Rightarrow$

$$\int_E fd\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \quad \text{y} \quad -\int_E fd\mu \le -\varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$
$$\Rightarrow \int_E fd\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \quad \text{y} \quad \int_E fd\mu \ge \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$
$$\Rightarrow \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \le \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \le \int_E fd\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \le \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$
$$\Rightarrow \int_E fd\mu = \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

por lo tanto

$$\int_E fd\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

■

Problema 58. –
(La función Gamma $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$).

i) Sea $\alpha > 0$. Pruebe que $\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\, dx = \Gamma(\alpha)$ existe.
(Sugerencia: Examine por separado la integral sobre $(0, 1)$ y $[1, \infty)$).

ii) Pruebe:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1}\, dx = \Gamma(\alpha)$$

(Sugerencia: $(1 - \frac{x}{n})^n \le (1 - \frac{x}{n+1})^{n+1}$ si $\frac{x}{n} < 1$).

iii) Pruebe:

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} x^{\alpha-1}\, dx = \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{si } \alpha > 1.$$

(Sugerencia: $\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = e^{-x} + e^{-2x} + \dots$).

Demostración:

(i) Sea $\alpha > 0$ entonces, $\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx = \int_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}dx + \int_1^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx$, veamos cada una por separado.

⊙ Para la integral $\int_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}dx$ como $0 \le x \le 1$ entonces $-1 \le -x \le 0 \;\Rightarrow\; e^{-1} \le e^{-x} \le 1$ por lo que $e^{-1}x^{\alpha-1} \le e^{-x}x^{\alpha-1} \le x^{\alpha-1}$, entonces

$$e^{-1}\int_0^1 x^{\alpha-1}dx \le \int_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}dx \le \int_0^1 x^{\alpha-1}dx$$

ahora, notemos que

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}dx = \frac{x^\alpha}{\alpha}\Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha} \quad (\text{pues } \alpha > 0)$$

por tanto $\int_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}dx$ converge.

⊙ Para la integral $\int_1^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx$ la podemos reescribir como $\int_1^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{e^x}dx$, y sabemos por resultados de cálculo 2 que $e^{ax} \gg x^r \;\; \forall r \in \mathbb{R} \;\; \forall a > 0$, por lo que existe $\varepsilon > 0$ tal que si $x > \varepsilon$ entonces

$$\left|\frac{x^{\alpha-1}}{e^{\frac{1}{2}x}}\right| < 1 \;\;\Rightarrow\;\; x^{\alpha-1} < e^{\frac{1}{2}x}$$

con esto tendremos que

$$\int_1^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx = \int_1^\varepsilon e^{-x}x^{\alpha-1}dx + \int_\varepsilon^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx \le \int_1^\varepsilon e^{-x}x^{\alpha-1}dx + \int_\varepsilon^\infty e^{-x}e^{\frac{1}{2}x}dx$$
$$= \int_1^\varepsilon e^{-x}x^{\alpha-1}dx + \int_\varepsilon^\infty e^{-\frac{1}{2}x}dx$$

pero $\int_1^{\varepsilon} e^{-x}x^{\alpha-1}dx$ es convergente, pues la función es continua en el intervalo y la integral es finita. Por otro lado, se tiene que

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x}dx = -2e^{-\frac{1}{2}x}\,|_{\varepsilon}^{\infty} = 0 + 2e^{-\frac{1}{2}\varepsilon} = 2e^{-\frac{1}{2}\varepsilon} < +\infty$$

entonces $\int_1^{\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx \leq \int_1^{\varepsilon} e^{-x}x^{\alpha-1}dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x} < +\infty$.

De lo anterior concluimos que $\int_0^{\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx$ es convergente.

$\blacksquare$

(ii) Como $f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n x^{\alpha-1}$ es continua en $[0, n]$ tendremos que es Borel-medible y Riemann-integrable, entonces por el (v) del problema 55 del libro tendremos que

$$\int_0^n f_n(x)dx = \int_{[0,n]} f_n d\lambda \;\Rightarrow\; \int_0^n (1 + \tfrac{x}{n})^n x^{\alpha-1}dx = \int_{[0,n]} f_n d\lambda$$

pero puedo definir $f_n(x) = 0$ si $x > n$ entonces

$$\int_0^n (1 + \tfrac{x}{n})^n x^{\alpha-1}dx = \int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda$$

más aun, cómo $f_n > 0$ y por la sugerencia sabemos que $f_n < f_{n+1}$ (i.e, es creciente) tendremos por el teorema de convergencia monótona que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}^+} \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda$$

y se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{x}{n})^n x^{\alpha-1} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{(-x)}{n})^n x^{\alpha-1} = e^{-x}x^{\alpha-1}$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-x}d\lambda = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx = \Gamma(\alpha)$$

$\blacksquare$

(ii) Tenemos por la sugerencia que

$$\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$$

que es de hecho la serie de Taylor en el origen de la función, la cual sabemos que converge uniforme y absolutamente, por lo que

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} x^{\alpha-1}dx = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}x^{\alpha-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx}x^{\alpha-1}dx$$

y sea $t = nx \;\Rightarrow\; \frac{1}{n}dt = dx$ por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-nx}x^{\alpha-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-t}(\tfrac{t}{n})^{\alpha-1}\,\tfrac{1}{n}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$

$$= \Gamma(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$

■