MATEMÁTICAS

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Análisis Combinatorio

Tarea Examen I

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 1. –

Ejercicio 1. *Supongamos que cada automóvil se identifica mediante una sucesión de tres letras seguidas de tres dígitos, y que las placas se otorgan en orden alfabético-numérico comenzando con AAA000. Las letras que se utilizan son las 26 siguientes:*
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
¿cuántas placas diferentes son posibles con este sistema? ¿cuántos carros se matricularon antes que el CGU735?.

Solución:

• Tenemos un total de 26^3 formas de formar una sucesión de 3 letras de las 26, ya que podemos repetir letras y cualquier permutación de ellas la consideramos distinta, igualmente con los dígitos tendremos estas condiciones, por lo que hay 10^3 formas de tomar los tres dígitos. Con esto tendremos que la cantidad de placas distintas será de $26^3 \cdot 10^3$.

• Suponiendo que el orden de las placas es $AAA000, AAB000, ..., ABA000, ..., ZZZ000, AAA001, ...$, tendremos que para llegar a $AAA735$, debimos haber pasado por todas las combinaciones de las tres letras un total de 735 veces, es decir, $735 \cdot 26^3$, luego para llegar de la placa $AAA735$ a la placa $CAA735$ debimos pasar por las combinaciones de las ultimas letras un total de 3 veces (que es la posición de C en el abecedario), teniendo $7 \cdot 26^2$ placas más, ahora para llegar de la placa $GAA735$ a la placa $CGA735$ debimos pasar por las combinaciones de la última letra un total de 7 veces (que es la posición de G en el abecedario), siendo $7 \cdot 26$ placas, y por ultimo para llegar de la placa $CGA735$ a la placa $CGU735$ tenemos que imprimir 21 placas más. Por lo que se matriculan $735 \cdot 26^3 + 3 \cdot 26^2 + 7 \cdot 26 + 21 - 1$ carros antes de llegar al $CGU735$.

■

Problema 2. –

Ejercicio 2. *a) ¿De cuántas maneras pueden colocarse en un tablero de ajedrez tres torres blancas idénticas de modo que no se ataquen?*

b) ¿De cuántas maneras pueden colocarse un alfil blanco y uno negro en un tablero de ajedrez de modo que se ataque mutuamente (es decir, que estén sobre la misma diagonal)?

c) Pruebe que el número máximo de fichas que se pueden colocar en un tablero cuadrado de $n \times n$ sin que haya dos en la misma diagonal es $2n - 2$, y que el número de estas configuraciones maximales es 2^n.

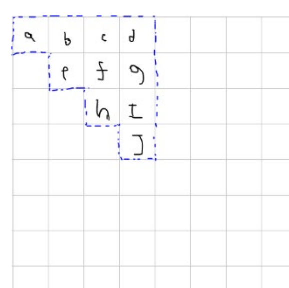
Solución:

a) De manera estricta las torres blancas no se atacan entre si pues son del mismo color, entonces el numero de formas seria de $64 \cdot 63 \cdot 62$ formas de acomodarlas. Pero creo que es claro si lo hacen en este problema, entonces tenemos lo siguiente.

Notemos que las torres son indistinguibles, por lo que da igual cual se pone primero y cual después. Para la primera torre tenemos 64 formas de ponerla, para la segunda torre, tendremos 64-15 formas, ya que la primer torre esa sobre una fila y una columna de 8 mosaicos cada una, menos el que esta puesta la torre, son 7 mosaicos en la columna y 7 en la fila donde la torre ataca, entonces la segunda torre no lo puedo poner en ninguna de ellas que son 14, mas el mosaico donde está la primer torre, teniendo un total de 64-15=49 posibles lugares. Para la tercera tendremos 64-30+2 formas, ya que la primer y segunda torre cubren 15 y 15 mosaicos donde atacan y están sobre puestas. Pero hay que tomar en cuenta que estamos contando dos mosaicos de más, pues al estar la torre 1 y 2 sin atacarse, entonces sus filas y columnas de ataque se deben intersecar en un mosaico cada una, ya que, de no ser así, se estarían atacando, entonces a las 64-30 formas le debo sumar 2, que son las que quite de más, teniendo un total de 64-30+2=36. Por lo tanto, las maneras de colocar tres torres blancas tales que no se ataquen son $64 \cdot 49 \cdot 36$.

■

b) Tenemos que ambas piezas son diferenciables, por lo que al colocar los dos alfiles de una manera y hacer el intercambio entre ambos la posición resultante será distinta a la original, con esto las permutaciones son irrelevantes, pues son distintas posiciones.



Para el primer alfil tenemos 64 posibles posiciones, con lo que todo el problema es ver cuantas posiciones le quedan como posibilidad al segundo alfil que dependerá de donde se coloca el primero.

Notemos que al ser el tablero de ajedrez simétrico en sus dos dimensiones y simétrico sobre su diagonal basta ver cuantas casillas está atacando el primer alfil en la escalera que se muestra en la imagen. Para la casilla *a* tenemos que el alfil ataca a 7 casillas, para la casilla *b* se tiene que atacar a $6+1=7$ casillas, para la casilla c esta atacara a $5+2=7$ casillas e igualmente la casilla *d* ataca a $4+3=7$ casillas. Para la casilla *e, f y g* el alfil ataca a 9 casillas, para las casillas h e i el alfil ataca a 11 y finalmente para la casilla j el alfil ataca a 13 casillas. Teniendo entonces la siguiente tabla, donde cada casilla representa la cantidad de casillas que ataca el primer alfil si se coloca en ella.

7	7	7	7	7	7	7	7
7	9	9	9	9	9	9	7
7	9	11	11	11	11	9	7
7	9	11	13	13	11	9	7
7	9	11	13	13	11	9	7
7	9	11	11	11	11	9	7
7	9	9	9	9	9	9	7
7	7	7	7	7	7	7	7

Con esto podemos concluir el problema. Para el primer alfil (A) tenemos 64 casillas posibles:

• Si A queda en una de las 28 casillas marcadas con 7, tendremos que habrá 7 posibles casillas para el alfil B, siendo entonces un total de $28 \cdot 7$ posibles formas.

• Si A queda en una de las 20 casillas marcadas con 9, tendremos que habrá 9 posibles casillas para el alfil B, siendo entonces un total de $20 \cdot 9$ posibles formas.

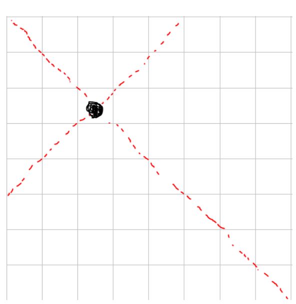
• Si A queda en una de las 12 casillas marcadas con 11, tendremos que habrá 11 posibles casillas para el alfil B, siendo entonces un total de $12 \cdot 11$ posibles formas.

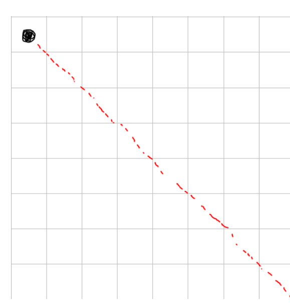
• Si A queda en una de las 4 casillas marcadas con 13, tendremos que habrá 13 posibles casillas para el alfil B, siendo entonces un total de $4 \cdot 13$ posibles formas.

$\therefore$ hay un total de $28 \cdot 7 + 20 \cdot 9 + 12 \cdot 11 + 4 \cdot 13 = 560$ formas posibles de colocar un alfil blanco y uno negro de tal forma que se ataquen.

■

c) Notemos que si tenemos un cuadrado de $n \times n$ y colocamos una ficha en alguna de sus casillas, esta me bloquea una diagonal (si es una de las esquinas) o dos diagonales (si no es una esquina) de la casilla a las demás casillas, tal como se ven en esta imagen:



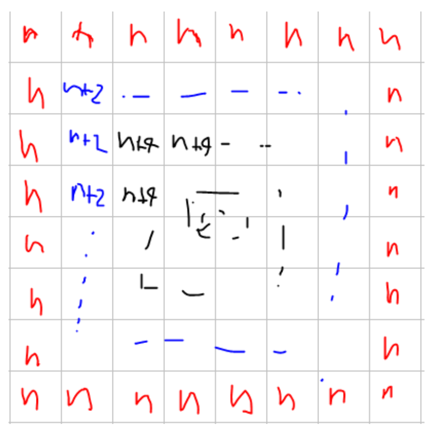


donde las líneas rojas me representan que ya no podre colocar otra ficha en esas casillas.

Ahora, notemos que para tener el número máximo de fichas tendremos que tomar dos esquinas del tablero, esto pues, si ponemos una a una cada ficha sin tocar ninguna de las esquinas tendremos que cada vez que pongamos una ficha estaremos bloqueando 2 diagonales, con lo que al colocar k fichas habremos bloqueado $2k$ diagonales, si pasara que solo usamos una de las esquinas tendremos que la primer ficha bloqueara una diagonal, y a partir de la segunda bloquearemos de 2 en 2, así que al colocar k fichas tendremos bloqueadas $2k-1$ diagonales, y por ultimo si al colocar las fichas si bloqueamos dos esquinas tendremos que las primeras dos fichas bloquea únicamente una diagonal cada una, y a partir de la tercera 2 cada ficha, con lo que al colocar k fichas tendremos bloqueadas $2k-4$ diagonales, y tendremos que esta es la última opción posible, ya que no podemos usar 3 o 4 esquinas pues estas al colocar 2 quedan bloqueadas. Con esto podemos concluir que la forma en la que me quedan mas espacios libres es que en la configuración de las fichas tome 2 esquinas del tablero.

Obs- Esto último se da ya que como las fichas son indistinguibles, da igual en que orden las coloquemos.

Además, notemos que como en el inciso $b)$ de este problema, por cada corona cuadrada tendremos que las fichas (análogo a los alfiles del inciso anterior) bloquean más celdas mientras más en el centro se encuentran, por lo que necesariamente la configuración máxima tendrá todas las fichasen la corona cuadrada más grande, esto pues de tener una configuración máxima donde todas están en la corona más grande y otra donde hay al menos una dentro tendremos que la primera tiene más celdas libres. (En la imagen cada celda tiene el número de celdas que bloquea una ficha al colocarla en ese lugar)



Entonces nuestra pregunta es ¿Cuál es el número máximo de fichas que puedo colocar en la corona cuadrada más grande?

Tenemos un total de $n+n+(n-2)+(n-2)=4n-4$ celdas en la corona mas grande, entonces al colocar la primer y segunda ficha nos quedaran $4n-8$ lugares libres. Notemos que por cada ficha que pongamos (que ya no son esquinas) bloquearemos 2 celdas de los demás lados. Entonces, para la tercer ficha tengo $4n-8$ posibles celdas donde colocarla, para la cuarta ficha tendré $4n-10$ ya que en la anterior me bloqueo 2 fichas más, y así sucesivamente tendré que para la ficha k me quedan $4n-2(k+1)$ celdas libres ($k \geq 3$), y debo de hacer este proceso hasta que ya no queden celdas, es decir, $4n-2(k+1)=0 \Rightarrow 4n=2(k+1) \Rightarrow k=2n-1$, con lo que al llegar a la ficha $2n-1$ ya no me quedan celdas libres, con lo que en la ficha $2n-2$ debí haber terminado con las celdas, por lo que el número máximo de fichas será $2n-2$.

Me falto contar cuantas formas había : (.

■

Problema 3. –

Ejercicio 3. *En el alfabeto Morse, usado en telegrafía, se emplean solamente dos caracteres: el punto y la raya, ¿Cuántas palabras distintas pueden formarse compuestas de uno, dos, tres, cuatro y cinco caracteres? Generalice.*

Solución: Para dos caracteres, tenemos dos símbolos para dos lugares, y podemos repetir por lo que hay 2^2 palabras posibles, y así sucesivamente, si quiero una palabra de k caracteres, tengo 2 símbolos para cada lugar, siendo un total de 2^k, entonces suponiendo que quiero formar palabras de hasta n letras tendremos que la cantidad de palabras posibles serán $2^1+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-2$

■

Problema 4. –

Ejercicio 4. *¿Cuántos números mayores que 3000 y menores que 4000 pueden formarse con los dígitos 2, 3, 5 y 7*

a) si cada cifra puede usarse sólo una vez?

b) si cada cifra puede emplearse las veces que se desee?

Solución:

a) Tenemos que el número necesariamente debe de empezar con 3 ya que si no es así sería menor a 3000 o mayor a 4000 en los demás casos. Entonces una vez puesto el digito 3, tendremos 3 lugares más, para el primer tengo 3 opciones, y como no voy a repetir para el segundo tendré 2 y para el ultimo solo me quedara un digito, por lo que hay $3!=6$ números distintos.

■

b) Análogamente al anterior el primer digito es 3, entonces como si puedo repetir tengo que colocar los dígitos 2,3,5 y 5 en los próximos 3 lugares, habiendo 4 opciones para cada uno, siendo entonces $4^3=64$ números distintos.

■

Problema 5. –

Ejercicio 5. *¿Cuántas palabras diferentes pueden formarse usando las letras de la palabra POLINOMIO?*

Solución: Tenemos que hay objetos que los consideramos como iguales, los cuales son la letra O, 3 veces, la letra P, 1 vez, la letra L, 1 vez, la letra I, 2 veces, la letra N, 1 vez y la letra M, 1 vez, entonces por lo visto en clase tendremos que las posibles combinaciones de estas en una palabra de 9 letras serán

$$\binom{9}{3,1,1,2,1,1} = \binom{9}{3,2} = \frac{9!}{3!2!} = 30,240$$

■

Problema 6. –

Ejercicio 6. *Pruebe que para todo $n > 0$ se tiene:*

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

Solución: Sea $n > 0$ entonces

$$0 = 0^n = (1 + (-1))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^n 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^n$$

que es lo que se quería demostrar.

■

Problema 7. –

Ejercicio 7. *Pruebe la Identidad de Vandermonde:*

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{r-2} + \ldots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}.$$

Solución:

Por un lado tenemos que

$$(1+x)^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+m}{k} x^k$$

pues por definición $\binom{s}{t} = 0$ si $t > s$, pero por el otro tenemos que

$$(1+x)^n (1+x^m) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

$$\underset{\text{producto de cauchy}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j} \right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} \right) x^k$$

por lo tanto, tendremos que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+m}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}\right)x^k \Leftrightarrow \binom{n+m}{k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$$

que es lo que queríamos demostrar

■

Problema 8. –

Ejercicio 8. *a) Pruebe que el número de subconjuntos de $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ con k elementos y sin enteros consecutivos es $\binom{n-k+1}{k}$.*

b) Pruebe que el número de subconjuntos de $\mathbb{N}_n$ con k elementos y que no contienen enteros consecutivos ni a 1 ni a n ***simultáneamente*** *es:*

$$\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}.$$

Solución:

a) Supongamos que tenemos uno de estos arreglos. Entonces tendremos que el subconjunto consta de k elementos del conjunto $\mathbb{N}_n$ y hay $n-k$ elementos que no fueron seleccionados. Haremos la siguiente asignación, para cada elemento que este en el subconjunto le asignaremos 1 y por cada elemento consecutivo que no este en el subconjunto le asignamos un 0

Por ejemplo, si $n=5$ y $k=3$ tendríamos por ejemplo $\{1,3,5\} \to \underbrace{1}_{1}\underbrace{0}_{2}\underbrace{1}_{3}\underbrace{0}_{4}\underbrace{1}_{5}$.

Entonces nuestro problema se basará saber de cuantas formas puedo ordenar los $n-k$ 0´s y los k 1´s de tal manera que no haya dos 1´s consecutivos. Primero colocamos los $n-k$ ceros, y estos me dejaran $n-k+1$ lugares entre ellos para poder colocar los 1´s

$$\underbrace{(\_\underbrace{0\_0\_0\_\cdots\_0}_{n-k}\_)}_{n-k+1}$$

con lo que solo necesito saber de cuantas formas puedo colocar k 1´s en $n-k+1$ lugares, que sabemos que serán $\binom{n-k+1}{k}$.

■

b) Por el inciso anterior tenemos que $\binom{n-k+1}{k}$ es el numero de subconjuntos de tamaño k sin elementos consecutivos, pero estos se pueden dividir en tres, aquellos que tienen al 1 y no tienen al n (A_n), aquellos que tienen al n y no tienen al 1 (B_n), aquellos que tienen al 1 y al n (C_n) y aquellos que no tienen al 1 ni al n (D_n). Entonces tendremos que

$$\binom{n-k+1}{k} = A_n + B_n + C_n + D_n$$

Entonces tendremos que $A_n + B_n + D_n = \binom{n-k+1}{k} - C_n$ es lo que nosotros queremos.

Para C_n, como mis subconjuntos tendrán al 1 y al n me quedaran $n-4$ opciones para los $k-2$ elementos restantes (pues no puedo tomar los números $1, 2, n-1$ y n), con lo que C_n serán los posibles subconjuntos de $k-2$ elementos de un conjunto de $n-4$ elementos, siendo $\binom{n-k-1}{k-2}$

Por lo que tendremos que $A_n + B_n + D_n = \binom{n-k+1}{k} - \binom{n-k-1}{k-2}$ y por la fórmula de recurrencia tendremos

$$\binom{n-k+1}{k} = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k-1} = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k-1}{k-2}$$

$$\Rightarrow A_n + B_n + D_n = \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k-1}{k-2}\right] - \binom{n-k-1}{k-2}$$

$$= \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} = \binom{n-k}{k} + \frac{k}{n-k}\binom{n-k}{k} = [1 + \frac{k}{n-k}]\binom{n-k}{k}$$

$$\therefore \quad A_n + B_n + C_n = [1 + \frac{k}{n-k}]\binom{n-k}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$$

■

Problema 9. –

Ejercicio 9. *Pruebe las identidades siguientes:*

(a) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

(b) $(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$.

(c) $\binom{m-1}{n-1} + 2\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+2}{n+1}$.

(d) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$.

Solución:

a) Tenemos que

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

$b)$ Tenemos que

$$(n-k)\binom{n}{k}=(n-k)\frac{n!}{k!(n-k)!}=n\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}=n\binom{n-1}{k}$$

$c)$ Tenemos por lo visto en clase que

$$\binom{m+2}{n+1}=\binom{m+1}{n+1}+\binom{m+1}{n}=\left[\binom{m}{n+1}+\binom{m}{n}\right]+\left[\binom{m}{n}+\binom{m}{n-1}\right]$$
$$=\binom{m}{n+1}+2\binom{m}{n}+\binom{m}{n-1}$$

■

$d)$ Por el inciso $a)$ sabemos que $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$ para cada $k\geq 1$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}=n2^{n-1}$$

donde la última desigualdad se da por lo visto en clase, ya que la suma es el número de subconjuntos de un conjunto de $n-1$ elementos.

■

Problema 10. –

Ejercicio 10. *Dados n conjuntos finitos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pruebe que:*

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|=-\sum_{\emptyset\neq F\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|F|}\left|\bigcup_{i\in F}A_i\right|.$$

Solución: Consideremos $B_i=A_i{}^c$, entonces tendremos que

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|=\left|\bigcap_{i=1}^{n}B_i{}^c\right|\underset{Sylvester}{=}\sum_{F\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|F|}\left|B_F\right|=\sum_{F\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|F|}\left|\bigcap_{i\in F}B_i\right|$$
$$=\sum_{F\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|F|}\left|\bigcap_{i\in F}A_i{}^c\right|=\sum_{F\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|F|}\left|X-\bigcup_{i\in F}A_i\right|=\sum_{F\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|F|}\left(|X|-\left|\bigcup_{i\in F}A_i\right|\right)$$
$$=\sum_{F\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|F|}|X|-\sum_{F\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|F|}\left|\bigcup_{i\in F}A_i\right|=|X|\sum_{F\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|F|}-\sum_{F\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|F|}\left|\bigcup_{i\in F}A_i\right|$$
$$=-\sum_{F\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|F|}\left|\bigcup_{i\in F}A_i\right|$$

pero se tiene que $\left|\bigcup_{i\in\varnothing} A_i\right| = |\varnothing| = 0$ por lo que

$$\begin{aligned}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| &= -\sum_{F\subseteq \mathbb{N}_n} (-1)^{|F|}\left|\bigcup_{i\in F} A_i\right| = -\sum_{\varnothing\neq F\subseteq \mathbb{N}_n} (-1)^{|F|}\left|\bigcup_{i\in F} A_i\right| - (-1)^{|\varnothing|}\left|\bigcup_{i\in\varnothing} A_i\right| \\ &= -\sum_{\varnothing\neq F\subseteq \mathbb{N}_n} (-1)^{|F|}\left|\bigcup_{i\in F} A_i\right| - (1)(0) = -\sum_{\varnothing\neq F\subseteq \mathbb{N}_n} (-1)^{|F|}\left|\bigcup_{i\in F} A_i\right|\end{aligned}$$

■