MATEMÁTICAS

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Análisis Combinatorio
Tarea Examen II

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 1. –

Pruebe que $\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$

Demostración: Por inducción sobre n. Para $n = 0$ tenemos que $\sum_{k=0}^{0} F_k = F_0 = 0 = 1 - 1 = F_2 - 1$ por lo que se cumple. Supongamos que es valido para un $n > 0$ entonces tendremos que $\sum_{k=1}^{n+1} F_k = F_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} F_k \underset{H.I}{=} F_{n+1} + F_{n+2} - 1 = F_{n+3} - 1 = F_{(n+1)+2} - 1$ por tanto se cumple para $n+1$, por lo que, por inducción matemática es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

Problema 2. –

Pruebe que $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$

Demostración: Tenemos que la sucesión de Fibonacci cumple la relación $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ con $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$, entonces considerando su polinomio asociado que es $x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ o $x = \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, y al ser $\varphi \neq \psi$ tendremos que $\{\varphi^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi^n : n \in \mathbb{N}\}$ forman una base para la relación por lo que $F_n = a\varphi^n + b\psi^n$ para algunos $a, b \in \mathbb{R}$, pero recordando los valores base tenemos

$$\begin{matrix} 0 = F_0 = a\varphi^0 + b\psi^0 = a + b \\ 1 = F_1 = a\varphi^1 + b\psi^1 = a\varphi + b\psi \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 = a + b \quad \Rightarrow \quad a = -b \\ 1 = a\varphi + b\psi \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad 1 = -b\varphi + b\psi$$

$$\Rightarrow \quad 1 = b(-\varphi + \psi) \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{\psi - \varphi}$$

por lo que

$$F_n = -\frac{1}{\psi - \varphi}\varphi^n + \frac{1}{\psi - \varphi}\psi^n = \frac{-\varphi^n + \psi^n}{\psi - \varphi} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

usaremos esto para la demostración. Desarrollando:

$$
\begin{aligned}
F_{n-1}F_{n+1}-{F_n}^2- &= \left(\frac{\Phi^{n-1}-\Psi^{n-1}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\Phi^{n+1}-\Psi^{n+1}}{\sqrt{5}}\right)-\left(\frac{\Phi^{n}-\Psi^{n}}{\sqrt{5}}\right)^2\\
&=\frac{1}{5}\cdot\left[(\Phi^{n-1}-\Psi^{n-1})(\Phi^{n+1}-\Psi^{n+1})-(\Phi^{n}-\Psi^{n})^2\right]\\
&=\frac{1}{5}\cdot\left[(\Phi^{2n}-\Phi^{n-1}\Psi^{n+1}-\Phi^{n+1}\Psi^{n-1}+\Psi^{2n})-(\Phi^{2n}-2\Phi^{n}\Psi^{n}+\Psi^{2n})\right]\\
&=\frac{1}{5}\cdot\left[\Phi^{2n}-\Phi^{n-1}\Psi^{n+1}-\Phi^{n+1}\Psi^{n-1}+\Psi^{2n}-\Phi^{2n}+2\Phi^{n}\Psi^{n}-\Psi^{2n}\right]\\
&=\frac{1}{5}\cdot\left[-\Phi^{n-1}\Psi^{n+1}-\Phi^{n+1}\Psi^{n-1}+2\Phi^{n}\Psi^{n}\right]=\frac{1}{5}\cdot(\Phi^{n-1}\Psi^{n-1})\left[\Psi^2-\Phi^2+2\Phi\Psi\right]
\end{aligned}
$$

Por otro lado, tenemos que:

- $\Phi^{n-1}\Psi^{n-1}=(\Phi\Psi)^{n-1}=[\Phi(1-\Phi)]^{n-1}=[\Phi-\Phi^2]^{n-1}=(-1)^{n-1}$
- $-\Psi^2-\Phi^2+2\Phi\Psi=-(\Psi^2-2\Phi\Psi+\Phi^2)=-(\Psi-\Phi)^2=-(-\sqrt{5})^2=-5$

$\therefore\ F_{n-1}F_{n+1}-{F_n}^2=\frac{1}{5}(-1)^{n-1}(-5)=(-1)^n$.

■

Problema 3. –

Pruebe que si $n \mid m$ entonces $F_n \mid F_m$.

Demostración:

Suponiendo $n,m>0$. En efecto, si $n \mid m$ entonces $m=kn$ para algún $k\in\mathbb{Z}^+$ y entonces por lo visto en clase sabemos que

$$F_m=F_{kn}=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}F_n^jF_{n-1}^{k-j}F_j=\binom{k}{0}F_n^0F_{n-1}^kF_0+\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}F_n^jF_{n-1}^{k-j}F_j=\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}F_n^jF_{n-1}^{k-j}F_j$$

por lo que para cada $1\le j\le n$, $F_n \mid {F_n}^j \Rightarrow F_n \mid \binom{k}{j}F_n^jF_{n-1}^{k-j}F_j \Rightarrow F_n \mid \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}F_n^jF_{n-1}^{k-j}F_j=F_m$.

■

Problema 4. –

Pruebe que números de Fibonacci consecutivos son coprimos.

Demostración: Sea $d=(F_n,F_{n+1}) \Rightarrow d\mid F_n$ y $d \mid F_{n+1}$ pero $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ por lo que al tener que $d\mid F_n$ y $d\mid F_n+F_{n-1} \Rightarrow d\mid F_{n-1}$. Con esto tendremos que $d\mid F_{n-1}$, $d\mid F_n$ y $d\mid F_{n+1}$ entonces $d\mid F_{n-1}F_{n+1}-{F_n}^2$ que por el problema 2 implica que $d\mid(-1)^n \Rightarrow d=1$. Por tanto $(F_n,F_{n+1})=1$, es decir, dos números de Fibonacci consecutivos son coprimos.

■

Problema 5. –

Ejercicio 5. *Pruebe que si d es el máximo común divisor de n y m entonces el máximo común divisor de F_n y F_m es F_d.*

Demostración:

Obs. – En clase vimos que dadas $l, m, n \in \mathbb{N}$ se tiene que (esto lo usamos en el problema 3)

$$F_{l+mn} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_m^k F_{l+k} F_{m-1}^{n-k}$$

por lo que

$$F_{l+m} = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} F_m^k F_{l+k} F_{m-1}^{1-k} = \binom{1}{0} F_m^0 F_{l+0} F_{m-1}^{1-0} + \binom{1}{1} F_m^1 F_{l+1} F_{m-1}^{1-1} = F_l F_{m-1} + F_{l+1} F_m$$

$\therefore F_{l+m} = F_l F_{m-1} + F_{l+1} F_m$.

Sea $d = (n,m) \Rightarrow d \mid n$ y $d \mid m$, entonces por el problema 3, $F_d \mid F_n$ y $F_d \mid F_m$, por lo que es divisor común. Veamos que es el máximo. Sea $\tilde{d}$ divisor común de F_n y F_m, ahora supongamos sin perdida de generalidad que $m > n$ entonces por el algoritmo de la división aplicado a n y a m, $F_m = F_{qn+r}$ para algunas $q, r \in \mathbb{Z}$, entonces por la observación anterior $F_m = F_{qn+r} = F_{qn} F_{r-1} + F_{qn+1} F_r$, entonces tendremos que $\tilde{d} \mid F_{qn} F_{r-1} + F_{qn+1} F_r$ pero como $n \mid qn \Rightarrow F_n \mid F_{qn}$ y teníamos que $\tilde{d} \mid F_n$ por lo que $\tilde{d} \mid F_{qn} \Rightarrow \tilde{d} \mid F_{qn} F_{r-1}$ entonces $\tilde{d} \mid F_{qn+1} F_r$ y como $\tilde{d} \mid F_{qn}$ y por el problema 4 $(F_{qn}, F_{qn+1}) = 1$ entonces $\tilde{d} \mid F_r$. Con todo esto tendremos que $\tilde{d} \mid F_m$ y $\tilde{d} \mid F_r$. Ahora, si nuevamente aplicamos el algoritmo de la división a m y a r llegaremos de la misma manera a que si $m = q_1 r + r_1$ entonces $\tilde{d} \mid F_{r_1}$ siguiendo de esta manera sabemos, por el algoritmo de la división, que terminaremos cuando $r_{\tilde{n}} = (n,m) = d$ para algún $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ y tendremos que $\tilde{d} \mid F_d$ por lo que F_d es máximo común divisor. Por lo tanto, por todo lo anterior $(F_n, F_m) = F_d$.

■

Problema 6. –

Ejercicio 6. *Halle la solución de la relación de recurrencia:*

$$x_n = 3x_{n-1} + 4x_{n-2} - 12x_{n-3}$$

con condiciones iniciales $x_0 = 1, x_1 = -27, x_2 = -1$.

Demostración: Tenemos que $x_{n+3} = 3x_{n+2} + 4x_{n+1} - 12x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $x_0 = 1$, $x_1 = -27$ y $x_2 = -1$ entonces $x_{n+3} z^{n+3} = 3x_{n+2} z^{n+3} + 4x_{n+1} z^{n+3} - 12x_n z^{n+3}$ por lo que llamando $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ tendremos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+3} z^{n+3} = 3\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+2} z^{n+3} + 4\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} z^{n+3} - 12\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{n+3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n - x_0 z^0 - x_1 z^1 - x_2 z^2 &= 3z \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+2} z^{n+2} + 4z^2 \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} z^{n+1} - 12z^3 \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n \\ &= 3z[f(z) - x_0 z^0 - x_1 z^1] + 4z^2[f(z) - x_0 z^0] - 12z^3 f(z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(z) - 1 + 27z + z^2 = 3z[f(z) - 1 + 27z] + 4z^2[f(z) - 1] - 12z^3 f(z)$$

$$\Rightarrow f(z)-1+27z+z^2 = 3zf(z)-3z+81z^2+4z^2f(z)-4z^2-12z^3f(z)$$
$$\Rightarrow f(z)-3zf(z)+12z^3f(z)-4z^2f(z) = -3z+81z^2-4z^2+1-27z-z^2$$
$$\Rightarrow f(z)[1-3z+12z^3-4z^2] = 76z^2+1-30z$$
$$\Rightarrow f(z) = \frac{76z^2+1-30z}{1-3z+12z^3-4z^2}$$

ahora, notemos que $1-3z-4z^2+12z^3 = (1-3z)(1-4z^2) = (1-3z)(1-2z)(1+2z)$ por lo que aplicando fracciones parciales

$$\frac{76z^2+1-30z}{1-3z+12z^3-4z^2} = \frac{76z^2+1-30z}{(1-3z)(1-2z)(1+2z)} = \frac{A}{1-3z}+\frac{B}{1-2z}+\frac{C}{1+2z}$$

$$\Rightarrow 76z^2+1-30z = (1-2z)(1+2z)A+(1-3z)(1+2z)B+(1-3z)(1-2z)C$$

- Si $z=\frac{1}{2} \Rightarrow 5 = (1-\frac{3}{2})(1+1)B \Rightarrow 5=-B \Rightarrow B=-5$
- Si $z=-\frac{1}{2} \Rightarrow 35 = (1+\frac{3}{2})(1+1)C \Rightarrow 35=5C \Rightarrow C=7$
- Si $z=\frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{5}{9} = (1-\frac{2}{3})(1+\frac{2}{3})A \Rightarrow -\frac{5}{9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3}A \Rightarrow A=-1$

Por lo tanto

$$f(z) = \frac{76z^2+1-30z}{1-3z+12z^3-4z^2} = -\frac{1}{1-3z}-\frac{5}{1-2z}+\frac{7}{1+2z}$$

ahora recordando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$$

tendremos que

$$f(z) = -\frac{1}{1-3z}-\frac{5}{1-2z}+\frac{7}{1+2z} = -\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n - 5\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n + 7\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n z^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} -3^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} -5\cdot 2^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 7(-1)^n 2^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} [-3^n - 5\cdot 2^n + 7(-1)^n 2^n] z^n$$

por lo tanto, recordando que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ tendremos que

$$x_n = -3^n - 5\cdot 2^n + 7(-1)^n 2^n$$

■