Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Variable Compleja I

Examen 1

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 1. – *Sean* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ *tales que cumplen* $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$. *Demuestras que estos tres puntos determinan un triángulo equilátero.*

Demostración: Primero veamos que 3 complejos que cumplan esta igualdad son distintos entre sí y no son colineales.

1) Son distintos entre sí. Como se cumplen la igualdad tendremos que $z_3 - z_1 \neq 0$ y $z_2 - z_3 \neq 0$ $\Leftrightarrow z_3 \neq z_1$ y $z_2 \neq z_3$. Ahora, si suponemos que $z_2 = z_1$ tendremos que

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z_2 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_3} \quad \Rightarrow \quad 0 = 1!!!$$

por lo que $z_2 \neq z_1$ $\quad \therefore$ todos son distintos entre sí.

2) No son colineales. Supongamos que $z_3 = rz_1$ y $z_2 = sz_1$ con $r, s \in \mathbb{R} - \{1\}$ (pues ya vimos que no son iguales), entonces por hipótesis

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{sz_1 - z_1}{rz_1 - z_1} = \frac{z_1 - rz_1}{sz_1 - rz_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z_1(s-1)}{z_1(r-1)} = \frac{z_1(1-r)}{z_1(s-r)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{s-1}{r-1} = \frac{1-r}{s-r} \quad \Leftrightarrow \quad (s-1)(s-r) = -(r-1)^2$$

como $r \neq 1$ tendremos que $-(r-1)^2 < 0$ por lo que $(s-1)(s-r) < 0$ y tendremos dos casos:

• Sí $s-1<0$ y $s-r>0 \Rightarrow s<1$ y $s>r \Rightarrow r<s<1 \Rightarrow r-1<s-1<0$ y entonces $\frac{s-1}{r-1}>0$, además teniendo que $0<s-r<1-r \Rightarrow \frac{1-r}{s-r}>0$!!! y aquí llegamos a un absurdo, pues como $\frac{s-1}{r-1}=\frac{1-r}{s-r}$ estaríamos diciendo que un negativo es igual a un positivo.

• Sí $s-1>0$ y $s-r<0$ siguiendo un procedimiento similar llegamos a lo mismo.

$\therefore$ no son colineales.

3) Veamos que efectivamente forman un triángulo equilátero.
Obs. – Notemos que $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ *cumplen la ecuación si y solo si* $0, z_2-z_1, z_3-z_1 \in \mathbb{C}$ *la cumplen. En efecto, si* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ *cumplen la ecuación entonces*

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(z_2-z_1)-0}{(z_3-z_1)-0}=\frac{0-(z_1-z_3)}{0-(z_2-z_3)}$$

por lo que $0, z_2-z_1, z_3-z_1 \in \mathbb{C}$ cumplen la ecuación.

Esto me dice que es lo mismo trabajar con los complejos dados a trabajar con los complejos desplazados al origen, con ello vasta probar que dados $z, w \in \mathbb{C}$ tales que cumplen $\frac{z}{w}=\frac{-w}{z-w}$, estos forman un triángulo equilátero con el origen.

En efecto, como $\frac{z}{w}=\frac{-w}{z-w}$:

$$\Rightarrow z(z-w)=-w^2 \Rightarrow z^2-zw+w^2=0 \Rightarrow z=\frac{w \pm \sqrt{w^2-4(1)(w^2)}}{2}$$
$$=\frac{w \pm \sqrt{-3w^2}}{2} \overset{Z}{=} \frac{w \pm i\sqrt{3}w}{2}=(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2})w$$

Así, tendremos que $|z-0|=|z|=\left|(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2})w\right|=\left|\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right||w|=1\cdot|w|=|w|=|w-0|$, entonces la distancia de z a 0 es la misma que de w a 0, y por último la distancia de z a w es: $|z-w|=\left|(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2})w-w\right|=\left|(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2})w\right|=\left|-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right||w|=1\cdot|w|=|w|=|z|$ $\therefore$ todos los lados son iguales, por

Z Esto es pues dado $w=re^{i\theta}$ y $-3=3e^{i\pi} \Rightarrow -3w^2=3r^2e^{(\pi+2\theta)i}$ por lo que $\sqrt{-3w^2}=\sqrt{3r^2e^{(\pi+2\theta)i}}$ $=\sqrt{3}\cdot r\cdot e^{(\pi/2+\theta)i+\pi ki}$ con $k=0,1$ $\therefore$ $\sqrt{-3w^2}=\sqrt{3}\cdot re^{\theta i}e^{\pi/2 i}e^{\pi ki}=\pm i\sqrt{3}w$.

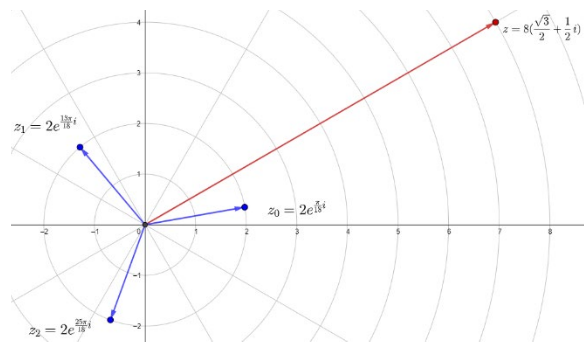
lo que forman un triángulo equilátero con el origen $\therefore$ si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ son tales que cumplen $\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$. Estos tres puntos determinan un triángulo equilátero. ■

Problema 2. – *Calcule las raíces cubicas de* $\overline{-(-4\sqrt{3} + 4i)}$.

Demostración: Primero simplificaremos la expresión.
Tenemos que $z = \overline{-(-4\sqrt{3} + 4i)} = -(-4\sqrt{3} - 4i) = 4\sqrt{3} + 4i = 8(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i)$, entonces expresando esto en forma polar tenemos que $z = 8e^{\pi/6 i}$ Ψ de esta manera tendremos que las raíces cubicas son:

$$z_k = \sqrt[3]{8} \exp(\tfrac{\pi}{6\cdot 3} i + \tfrac{2\pi i k}{3}) = 2\exp(\tfrac{\pi}{18} i + \tfrac{2\pi i k}{3}) \text{ con } k = 0,1,2$$

$$\begin{aligned} & z_0 = 2\exp(\tfrac{\pi}{18} i) \\ \Rightarrow \quad & z_1 = 2\exp(\tfrac{\pi}{18} i + \tfrac{2\pi i}{3}) = 2\exp(\tfrac{13\pi}{18} i) \\ & z_2 = 2\exp(\tfrac{\pi}{18} i + \tfrac{4\pi i}{3}) = 2\exp(\tfrac{25\pi}{18} i) \end{aligned}$$



Problema 3. – *Sean* $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. *Demuestre que* $|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|$ *sí y solo si* $\arg(z_j) = \arg(z_i)$ *para cualesquiera* $j \neq i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demostración:
$\Leftarrow$] Supongamos que $\arg(z_j) = \arg(z_i)$ para cualesquiera $j \neq i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces como tienen el mismo ángulo, serán colineales sobre el mismo rayo, es decir, existen $r_i \geq 0$ tales que $z_i = r_i z_1$ $\forall i \geq 2$, con lo que

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 \cdots + z_n| &= |z_1 + z_2 \cdots + r_n z_1| = |z_1(1 + r_2 + \cdots + r_n)| = |z_1||1 + r_2 + \cdots + r_n| \\ &\underset{r_i \geq 0}{=} |z_1|(1 + r_2 + \cdots + r_n) = |z_1| + r_2|z_1| + \cdots + r_n|z_1| = |z_1| + |r_2 z_1| + \cdots + |r_n z_1| \\ &= |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \end{aligned}$$

Ψ Esto pues $|z| = \left|8(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i)\right| = 8\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right| = 8 \cdot 1 = 8$ y $\arg(z) = \arctan\left(\frac{8\cdot 1/2}{8\cdot\sqrt{3}/2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, esto pues el numero complejo está en el primer cuadrante.

$\Rightarrow$] Por inducción sobre n.

• Lo probaremos para $n=2$. Por la desigualdad del triángulo sabemos qué $|z+w| \le |z|+|w| \quad \forall z,w \in \mathbb{C}$ y que la igualdad se cumple si y solo si $|z\overline{w}| = \mathrm{Re}(z\overline{w})$ (esto se obtiene de la propia demostración), entonces tenemos que la parte real de un numero complejo es exactamente su modulo, esto es posible si y solo si es un número real[ζ], por lo que $z\overline{w} \in \mathbb{R} \iff \arg(z\overline{w}) = 0 \iff \arg(z) + \arg(\overline{w}) = 0 \iff \arg(z) - \arg(w) = 0 \iff \arg(z) = \arg(w)$.
Entonces si se tiene que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ esto es si y solo sí $\arg(z_1) = \arg(z_2)$.

• Ahora supongamos que se cumple para alguna $k > 2$, es decir, supongamos que si $|z_1 + \cdots + z_k| = |z_1| + \cdots + |z_k|$ entonces $\arg(z_j) = \arg(z_i)$ para cualesquiera $j \ne i$, y probaremos que se cumple para $k+1$.
En efecto, supongamos que $|z_1 + \cdots + z_k + z_{k+1}| = |z_1| + \cdots + |z_k| + |z_{k+1}|$. Llamemos $w = z_1 + \cdots + z_k$ y $z = z_{k+1}$, entonces tendremos que $|w| \le |z_1| + \cdots + |z_k|$, así por hipótesis

$$
\begin{aligned}
|w + z_{k+1}| = |z_1| + \cdots + |z_k| + |z_{k+1}| &\ge |w| + |z_{k+1}| \\
\Rightarrow \quad |w + z_{k+1}| &\ge |w| + |z_{k+1}|
\end{aligned}
$$

Pero en esta última no puede pasar que $|w + z_{k+1}| > |w| + |z_{k+1}|$ pues contradice a la desigualdad del triángulo $\Rightarrow$ $|w + z_{k+1}| = |w| + |z_{k+1}|$, así:

$$
\begin{aligned}
|z_1 + \cdots + z_k| + |z_{k+1}| = |z_1 + \cdots + z_k + z_{k+1}| &\underset{hip}{=} |z_1| + \cdots + |z_k| + |z_{k+1}| \\
\Rightarrow \quad |z_1 + \cdots + z_k| &= |z_1| + \cdots + |z_k|
\end{aligned}
$$

Y por hipótesis de inducción se tendrá que $\arg(z_j) = \arg(z_i)\ \forall i \ne j \ne k+1$. Con esto tenemos que los argumentos de los z_j son todos iguales con $j \ne k+1$.

PD $\arg(z_{k+1}) = \arg(z_1)$

Por lo anterior sabemos qué $|w + z_{k+1}| = |w| + |z_{k+1}|$ y por la base de inducción esto es cierto si y solo si $\arg(w) = \arg(z_{k+1})$, pero como todos los z_j son colineales con $j \ne k+1$ se tendrá que $\arg(w) = \arg(z_1) \quad \therefore \quad \arg(z_{k+1}) = \arg(z_1)$

$\therefore \quad \arg(z_j) = \arg(z_i) \quad \forall i \ne j \in \{1,..,k+1\}$. Quedando demostrado. ∎

[ζ] Si sucede que $\mathrm{Re}(z) = |z| \Rightarrow \mathrm{Re}^2(z) = \mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z) \Rightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$, la otra implicación es trivial.

Problema 4. – *Pruebe que la función* $z \to 1/z$ *actúa en la esfera de Riemann* $\mathbb{S}^2$ *como una rotación de* π *radianes alrededor del eje x. Concluya que* $z \to 1/z$ *preserva la familia de círculos y rectas de* $\mathbb{C}$.

Demostración:

1) Sea $z \in \mathbb{C}$.

• Si $z = 0$, tendremos que $\pi(z) = (0,0,-1)$, además tendremos que $\frac{1}{z} = \infty$ y entonces $\pi(\infty) = (0,0,1)$ con lo que efectivamente, tenemos una rotación de π radianes sobre el eje x.

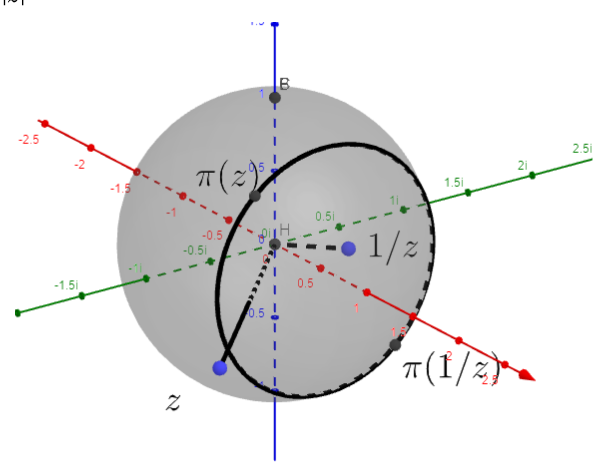
• Si $z \neq 0$. Entonces sabemos que su proyección sobre la esfera de Riemann es

$$\pi(z) = \frac{1}{|z|^2+1}(2\operatorname{Re}(z),\ 2\operatorname{Im}(z), |z|^2-1)$$

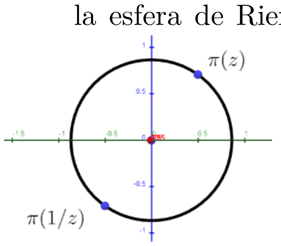
así tendremos que la proyección sobre la esfera de Riemann de $1/z$ es

$$\pi(\tfrac{1}{z}) = \frac{1}{|1/z|^2+1}(2\operatorname{Re}(\tfrac{1}{z}),\ 2\operatorname{Im}(\tfrac{1}{z}), \left|\tfrac{1}{z}\right|^2-1) = \frac{1}{1/|z|^2+1}(\tfrac{2}{|z|^2}\operatorname{Re}(z),\ \ -\tfrac{2}{|z|^2}\operatorname{Im}(z), \tfrac{1}{|z|^2}-1)\ ^{\Omega}$$

$$= \frac{|z|^2}{|z|^2+1}(\tfrac{2}{|z|^2}\operatorname{Re}(z), -\tfrac{2}{|z|^2}\operatorname{Im}(z), \tfrac{1-|z|^2}{|z|^2}) = \frac{1}{|z|^2+1}(2\operatorname{Re}(z), -2\operatorname{Im}(z), -[|z|^2-1])$$



Entonces si denotamos $\pi(z) = (a,b,c)$ tendremos que $\pi(\frac{1}{z}) = (a,-b,-c)$, con lo cual tenemos una reflexión sobre el eje x y el eje z, que se traduce en una rotación en un ángulo de π radianes sobre la esfera de Riemann, pues si tomamos el plano $P = \{(a,x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$ se tendrá que el ángulo de rotación del punto (a,b,c) al punto $(a,-b,-c)$ es π radianes



2) Ahora veamos que preserva círculos y rectas de $\mathbb{C}$.

Tenemos que la ecuación general de una recta/circunferencia viene dada por

---

$^{\Omega}$ Tenemos que $\operatorname{Re}(\frac{1}{z}) = \operatorname{Re}(\frac{\overline{z}}{|z|^2}) = \frac{1}{|z|^2}\operatorname{Re}(\overline{z}) = \frac{1}{|z|^2}\operatorname{Re}(z)$ y $\operatorname{Im}(\frac{1}{z}) = \operatorname{Im}(\frac{\overline{z}}{|z|^2}) = \frac{1}{|z|^2}\operatorname{Im}(\overline{z}) = -\frac{1}{|z|^2}\operatorname{Im}(z)$

$$C:\ Az\overline{z}+\overline{E}z+E\overline{z}+D=0^{\alpha},\ \ A,D\in\mathbb{R}\ \wedge\ E\in\mathbb{C}$$

Siendo una circunferencia si $A\neq 0$ y a una recta sí $A=0$. Además, notemos que

$$A0\overline{0}+\overline{E}0+E\overline{0}+D=0\ \ \Leftrightarrow\ \ D=0$$

lo que nos dice que $0\in C\ \Leftrightarrow\ D=0$.
Con esto mencionado tendremos dos casos:

• Si $0\notin C$. (Entonces $D\neq 0$)
Demostraremos que si $z\in C$ entonces $\frac{1}{z}$ está en:

$$\tilde{C}:\ \ Dw\overline{w}+Ew+\overline{E}\overline{w}+A=0^{\pi}$$

En efecto, tenemos que

$$D\frac{1}{z}\overline{(\frac{1}{z})}+E\frac{1}{z}+\overline{E}\overline{(\frac{1}{z})}+A=D\frac{1}{z}\frac{1}{\overline{z}}+E\frac{1}{z}+\overline{E}\frac{1}{\overline{z}}+A=D\frac{1}{z}\frac{1}{\overline{z}}+E\frac{\overline{z}}{|z|^2}+\overline{E}\frac{z}{|z|^2}+A$$
$$=\frac{1}{z}\frac{1}{\overline{z}}[D+E\frac{\overline{z}\cdot(z\overline{z})}{|z|^2}+\overline{E}\frac{z\cdot(z\overline{z})}{|z|^2}+Az\overline{z}]=\frac{1}{z}\frac{1}{\overline{z}}[D+E\overline{z}+\overline{E}z+Az\overline{z}]\underset{z\in C}{=}\frac{1}{z}\frac{1}{\overline{z}}[0]=0$$

$\therefore\ \frac{1}{z}\in\tilde{C}$ por lo que la recta/circunferencia C va a dar a la <u>circunferencia</u> $\tilde{C}$ bajo la función $z\to 1/z$. (Esto pues si A=0 se seguirá teniendo que $\tilde{C}$ es circunferencia)

• Si $0\in C$. (Entonces $D=0$)
Demostraremos que si $z\in C:\ Az\overline{z}+\overline{E}z+E\overline{z}=0$ entonces $\frac{1}{z}, z\neq 0$ está en:

$$\tilde{C}:\ \ Ew+\overline{E}\overline{w}+A=0^{\Theta}$$

En efecto, tenemos que

$$E\frac{1}{z}+\overline{E}\overline{(\frac{1}{z})}+A=E\frac{1}{z}+\overline{E}\frac{1}{\overline{z}}+A=E\frac{\overline{z}}{|z|^2}+\overline{E}\frac{z}{|z|^2}+A$$
$$=\frac{1}{z}\frac{1}{\overline{z}}[E\frac{\overline{z}\cdot(z\overline{z})}{|z|^2}+\overline{E}\frac{z\cdot(z\overline{z})}{|z|^2}+Az\overline{z}]=\frac{1}{z}\frac{1}{\overline{z}}[E\overline{z}+\overline{E}z+Az\overline{z}]\underset{z\in C}{=}\frac{1}{z}\frac{1}{\overline{z}}[0]=0$$

[α] Esto se justifica al final del documento (anexo 1).
[π] (anexo 2)
[Θ] (anexo 3)

$\therefore$ $\frac{1}{z} \in \tilde{C}$ para $z \neq 0$, y como $\lim_{z \to 0} \frac{1}{z} = \infty$ se tiene que cuando z crece el punto en la recta se va al infinito, $\therefore$ por lo que la recta/circunferencia C va a dar a la recta $\tilde{C}$ bajo la función $z \to 1/z$. (Esto pues si A=0 seguiremos teniendo que $\tilde{C}$ es recta)

$\therefore$ la función $z \to \frac{1}{z}$ preserva las rectas y circunferencias de $\mathbb{C}$. ■

Problema 5. – *Pruebe que las trasformaciones de Möbius son composición de algunas de las siguientes funciones: rotaciones, homotecias, traslaciones y $z \to \frac{1}{z}$. Concluya mostrando que las transformaciones de Möbius preservan a la familia de círculos y rectas.*

Demostración: Sean $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tales que $ad - bc \neq 0$ y sea la transformación de Möbius $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ dada por:

$$T(z) = \begin{cases} a/c & \text{si } z = \infty \\ \infty & \text{si } z = -d/c \\ \frac{az+b}{cz+d} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Primero recordemos que para el plano complejo extendido tenemos que $w + \infty = \infty$, $w \cdot \infty = \infty$, $\frac{z}{\infty} = 0$ y $\frac{z}{0} = \infty$.

1) Tendremos dos casos:

• Si $c = 0$ entonces $d \neq 0$ pues si pasara que $d = 0 \Rightarrow ad = 0 = bc!!$ cosa que por hipótesis no pasa. Con esto la transformación de Möbius será $T(z) = \begin{cases} \infty & \text{si } z = \infty \\ \frac{a}{d} z + \frac{b}{d} & e.o.c \end{cases}$

Entonces sean $T_1(z) = \dfrac{a}{d} z$ y $T_2(z) = z + \dfrac{b}{d}$ PD $T = T_2 \circ T_1$.

Tenemos que estas trasformaciones son funciones de $\hat{\mathbb{C}}$ a $\hat{\mathbb{C}}$, por lo que su composición va de $\hat{\mathbb{C}}$ a $\hat{\mathbb{C}}$, entonces solo vasta probar que $T_2 \circ T_1$ y T tienen la misma regla de correspondencia, es decir, $T(z) = (T_2 \circ T_1)(z)$ $\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$.

En efecto, sea $z \in \hat{\mathbb{C}}$.

⊙ Si $z = \infty \Rightarrow T_1(\infty) = \frac{a}{d}\infty = \infty \Rightarrow (T_2 \circ T_1)(\infty) = \infty + \frac{b}{d} = \infty = T(\infty) \Rightarrow \therefore (T_2 \circ T_1)(\infty) = T(\infty)$.

⊙ Si $z \neq \infty \Rightarrow T_1(z) = \frac{a}{d} z \Rightarrow (T_2 \circ T_1)(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d} = T(z) \Rightarrow \therefore (T_2 \circ T_1)(\infty) = T(\infty)$.

$\therefore\ \forall z \in \hat{\mathbb{C}}\ \ (T_2 \circ T_1)(z) = T(z)\ \ \therefore$ son iguales. Así la transformación de Möbius es composición de una traslación ($T_2(z)$) con una homotecia ($T_1(z)$).

- Si $c \neq 0$, sean $T_1(z) = z + \dfrac{d}{c},\ \ T_2(z) = \dfrac{1}{z},\ \ T_3(z) = \dfrac{bc-ad}{c^2}z,\ \ T_4(z) = z + \dfrac{a}{c}$

  PD $T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$.

  Tenemos que cada una de estas trasformaciones son funciones de $\hat{\mathbb{C}}$ a $\hat{\mathbb{C}}$, por lo que su composición va de $\hat{\mathbb{C}}$ a $\hat{\mathbb{C}}$, entonces solo vasta probar que $T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$ y T tienen la misma regla de correspondencia, es decir, $T(z) = (T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)(z)\ \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$.

  En efecto, sea $z \in \hat{\mathbb{C}}$.

  ⊙ Si $z = \infty \Rightarrow T_1(\infty) = \infty + \frac{d}{c} = \infty\ \Rightarrow\ (T_2 \circ T_1)(\infty) = \frac{1}{\infty} = 0\ \Rightarrow\ (T_3 \circ T_2 \circ T_1)(\infty) = \dfrac{bc-ad}{c^2} \cdot 0 = 0$

  $\Rightarrow\ (T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)(\infty) = 0 + \frac{a}{c} = \frac{a}{c} = T(\infty)\ \ \therefore\ (T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)(\infty) = T(\infty)$.

  ⊙ Si $z = -\frac{d}{c} \Rightarrow T_1(-\frac{d}{c}) = -\frac{d}{c} + \frac{d}{c} = 0\ \Rightarrow\ (T_2 \circ T_1)(\frac{a}{c}) = \frac{1}{0} = \infty\ \Rightarrow\ (T_3 \circ T_2 \circ T_1)(\frac{a}{c}) = \dfrac{bc-ad}{c^2} \cdot \infty$

  $= \infty\ \Rightarrow\ (T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)(\frac{a}{c}) = \infty + \frac{a}{c} = \infty = T(-\frac{d}{c})\ \ \therefore\ (T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)(-\frac{d}{c}) = T(-\frac{d}{c})$.

  ⊙ Si $z \neq -\frac{d}{c},\ \infty$. Entonces $T_1(z) = z + \frac{d}{c}\ \Rightarrow\ (T_2 \circ T_1)(z) = \frac{1}{z+\frac{d}{c}} = \frac{c}{cz+d}\ \Rightarrow\ (T_3 \circ T_2 \circ T_1)(\frac{a}{c}) =$

  $$\frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{c}{cz+d} = \frac{bc-ad}{c^2z+cd}\ \Rightarrow\ (T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)(z) = \frac{bc-ad}{c^2z+cd} + \frac{a}{c} = \frac{c[bc-ad] + a[c^2z+cd]}{c[c^2z+cd]}$$

  $$= \frac{c[bc-ad] + ca[cz+d]}{c[c^2z+cd]} = \frac{[bc-ad] + a[cz+d]}{[c^2z+cd]} = \frac{bc-ad+acz+ad}{c^2z+cd} = \frac{bc+acz}{c^2z+cd} = \frac{b+az}{cz+d} = T(z)$$

  $\therefore\ (T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)(z) = T(z)$

$\therefore\ \forall z \in \hat{\mathbb{C}}\ \ (T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)(z) = T(z)\ \ \therefore$ son iguales. Así la transformación de Möbius es composición de traslaciones u rotaciones ($T_1(z),\ T_4(z)$), homotecias ($T_3(z)$) y la inversión ($T_2(z) = \dfrac{1}{z}$). ■

2) Ahora veamos que preserva rectas y circunferencias.

Vasta demostrar que las traslaciones, homotecias e inversiones preservan las rectas y circunferencias.

- $L(z) = z + w$ con $w \in \mathbb{C}$.

  Esto es claro, ya que al trasladar todos los puntos de una circunferencia o una recta esta sigue siendo una circunferencia u una recta. Veámoslo en $\mathbb{R}^2$, con $z = a + ib\ \wedge\ w = c + id$.

Supongamos que $z := (a,b)$ están sobre la circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, entonces tendremos que el punto $z+w := (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ esta sobre la circunferencia $(x-h-c)^2+(y-k-d)^2=r^2$, en efecto, pues $(a+c-h-c)^2+(b+d-k-d)^2=(a-h)^2+(b-k)^2$ $=r^2$. Por lo que la traslación preserva a la circunferencia.

Igualmente, Supongamos que $z := (a,b)$ están sobre la recta $y=mx+e$, entonces tendremos que el punto $z+w := (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ esta sobre la recta $y=mx+d+e-mc$, en efecto, pues $m[a+c]+d+e-mc=ma+mc+d+e-mc=ma+e+d=b+d$. Por lo que la traslación preserva a la recta.

- $L(z)=w\cdot z$ con $w\in\mathbb{C}$.

Si $w=0$, no se cumple, pues todo converge el 0, entonces supongamos $w\neq 0$ y sea $C:\ Az\overline{z}+\overline{E}z+E\overline{z}+D=0$ una recta/circunferencia, entonces si $z\in C$ tendremos que $w\cdot z$ pertenece a la recta/circunferencia $\tilde{C}:\ \dfrac{A}{|w|^2}z\overline{z}+\dfrac{\overline{E}}{w}z+\dfrac{E}{\overline{w}}\overline{z}+D=0$ [π].

En efecto, $\dfrac{A}{|w|^2}(w\cdot z)\overline{(w\cdot z)}+\dfrac{\overline{E}}{w}w\cdot z+\dfrac{E}{\overline{w}}\overline{w\cdot z}+D=\dfrac{A}{|w|^2}|w|^2\ z\overline{z}+\overline{E}z+E\overline{z}+D=Az\overline{z}+\overline{E}z+E\overline{z}+D$ $=0$, por lo que la transformación preserva a las rectas y círculos.

- $L(z)=\frac{1}{z}$

En el problema 4 demostramos que las preserva.

Con esto finalmente podemos concluir:

⊙ Si $c=0$ tenemos que $T(z)=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$ es una composición de una traslación y una homotecia[μ].
Entonces si C es una recta/circunferencia se tendrá que $T_1(C)$ es recta/circunferencia por lo que $T_2(T_1(C))=T(C)$ recta/circunferencia. $\therefore$ T preserva las rectas y circunferencias.

⊙ Si $c\neq 0$. Sea C una recta/circunferencia. Tendremos dos subcasos:

⊗ Si $-\frac{d}{c}\in C$, entonces tendremos que $T_1(C)$ es una recta/circunferencia y es tal que $T_1(-\frac{c}{d})=0\in T_1(C)$, entonces por el problema 4 se tendrá que $T_2(T_1(C))$ es una recta. Entonces como $T_3(z)=\dfrac{bc-ad}{c^2}z$ es homotecia[χ] $\Rightarrow T_3(T_2(T_1(C)))$ es recta. Finalmente, como

[π] (anexo 3)

[μ] Es no trivial pues se tiene que $a/d\neq 0$, pues si $a=0 \Rightarrow ad=0=bc$ cosa que no puede pasar.

[χ] Pues $c\neq 0$.

$T_4(z) = z + \frac{a}{c}$ es traslación $\Rightarrow T_4(T_3(T_2(T_1(C))))$ es recta.

⊗ Si $-\frac{d}{c} \notin C$. Como $T_1(z) = z + \frac{d}{c}$ es traslación $\Rightarrow T_1(C)$ es recta/circulo. Como $T_2(z) = \frac{1}{z}$ es inversión $\Rightarrow T_2(T_1(C))$ es recta/circulo.[β] Como $T_3(z) = \frac{bc-ad}{c^2}z$ es homotecia[χ] $\Rightarrow T_3(T_2(T_1(C)))$ es recta/circulo. Finalmente, como $T_4(z) = z + \frac{a}{c}$ es traslación $\Rightarrow T_4(T_3(T_2(T_1(C))))$ es recta/circulo.

$\therefore$ la transformación de Möbius preserva rectas y circunferencias ■

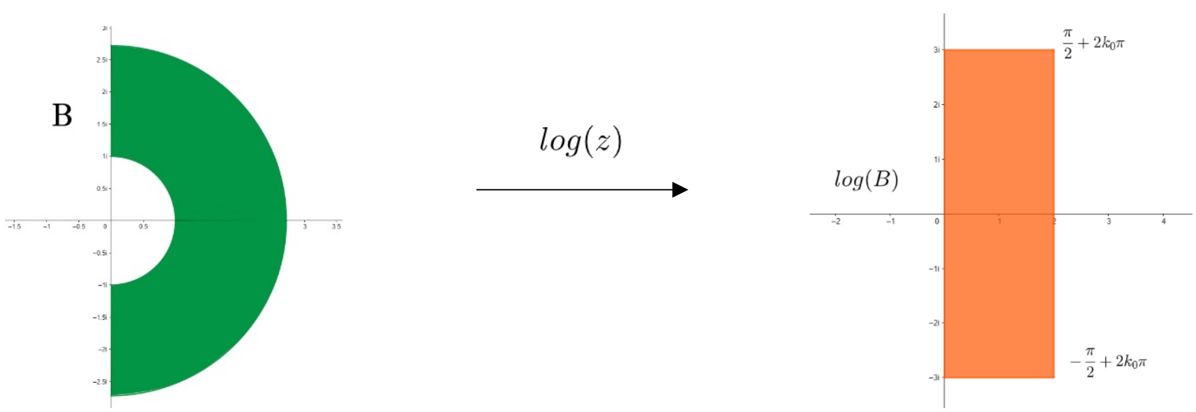
Problema 6. – *Sea* $B = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < e^2 \ \wedge \ -\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{\pi}{2} \right\}$. *Describa a las imágenes de B bajo todas las ramas del logaritmo. Después interprete geométricamente la conformalidad de las ramas del logaritmo en su dominio de analiticidad, usando círculos concéntricos al origen y semirrectas por el origen.*

Solución: Sea log la rama del logaritmo con argumentos en $[y_0, y_0 + 2\pi)$.

1) Con lo que sí $z \in B$, tendremos que $\log(z) = \ln|z| + i(\theta + 2k_0\pi)$ con k_0 tal que $\theta + 2k_0\pi \in [y_0, y_0 + 2\pi)$.

Dado que $z \in B \Rightarrow 1 < |z| < e^2 \ \wedge \ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \ln(1) < \ln|z| < \ln e^2 \ \wedge \ -\frac{\pi}{2} + 2k_0\pi < \theta + 2k_0\pi < \frac{\pi}{2} + 2k_0\pi \Rightarrow 0 < \ln|z| < 2 \ \wedge \ -\frac{\pi}{2} + 2k_0\pi < \theta + 2k_0\pi < \frac{\pi}{2} + 2k_0\pi$

$\therefore \ \log(B) = \left\{ w \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(w) < 2, \ -\frac{\pi}{2} + 2k_0\pi < \arg(w) < \frac{\pi}{2} + 2k_0\pi \right\}$



[β] Como $-\frac{d}{c} \notin C$ tendremos que $T_1(z) \neq 0$ y entonces $T_2(T_1(z)) \neq \infty$

[χ] Notemos que por hipótesis del problema $bc - ad \neq 0$ y como $c \neq 0$ y $c \neq \infty$ tendremos que $\frac{bc-ad}{c^2} \neq 0$

2) Ahora, sabemos que log es analítica en $\mathbb{C} \setminus B_{y_0}$ y que además $\log(z) = 0 \iff z = 1$. Por lo que por un teorema visto en clase tendremos que log es conforme en $\mathbb{C} \setminus (B_{y_0} \cup \{1\})$.

Para comprobarlo geométricamente veamos que se cumple con circunferencias centradas en el origen y semi-rectas por el origen.

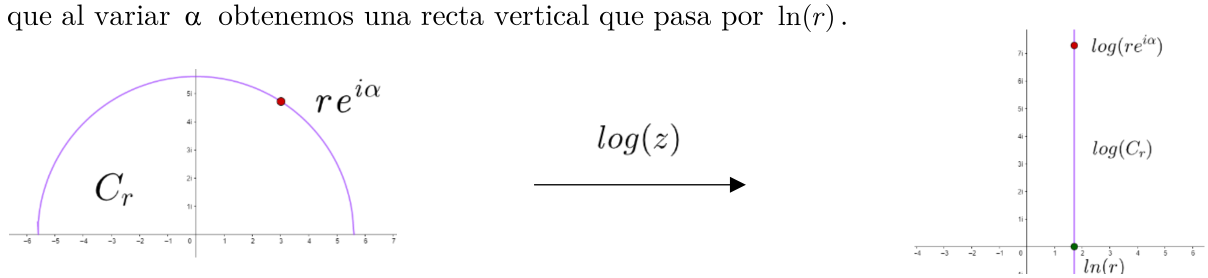
Consideremos la circunferencia centrada en el origen $D_r = \{re^{i\alpha} : \alpha \in [0, 2\pi)\}$, $r > 0$ y la semi-recta $L_\theta = \{te^{i\theta} :, \theta \in [0,2\pi), t \geq 0\}$ donde $\theta \neq y_0$ (pues log no es analítica ahí). Además, descartamos el caso en que $r = 1$ y $\theta = 0$, pues en este caso se tendrá la circunferencia unitaria y la recta de los reales positivos, que se intersecaran en 1 donde la función no es conforme.

Por último, notemos que la intersección con la circunferencia depende únicamente del ángulo de la semi-recta, por lo que podemos suponer spdg que $\theta \in (0, \pi)$, pues los demás ángulos serán análogos. Igualmente, como $\theta \in (0, \pi)$ solo tendremos la intersección con la parte superior de la circunferencia, así que spdg podemos considerarla.

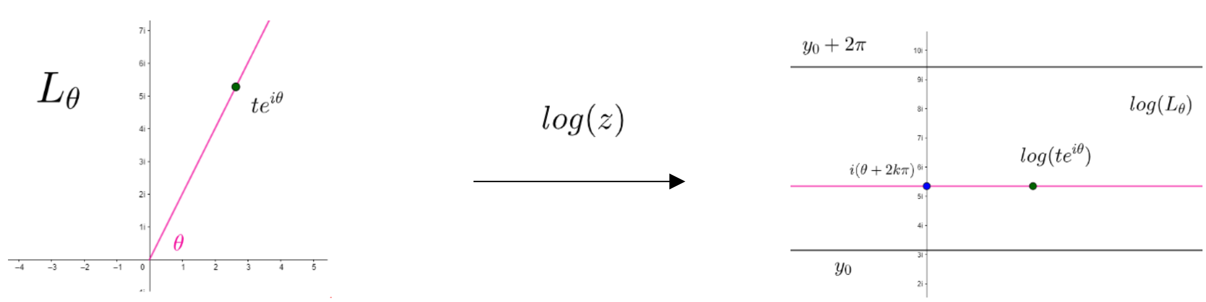
Con todo esto sean la circunferencia y la semi-recta: $D_r = \{re^{i\alpha} : \alpha \in (0, \pi)\}, r > 0$ y $L_\theta = \{te^{i\theta} : \theta \neq y_0, t \geq 0\}, \theta \in (0, \pi)$. Y entonces las dos curvas se intersecan en un ángulo ortogonal.

Analicemos sus imágenes bajo el logaritmo.

- Sea $z \in D_r$, entonces $\log(z) = \ln r + i(\alpha + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha + 2k\pi \in (y_0, y_0 + 2\pi)$, con lo que al variar α obtenemos una recta vertical que pasa por $\ln(r)$.



- Sea $z \in L_\theta$, entonces $\log(z) = \ln t + i(\theta + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta + 2k\pi \in (y_0, y_0 + 2\pi)$, con lo que al variar r obtenemos una recta horizontal que pasa por $i(\theta + 2k\pi)$.



Con lo que efectivamente, obtenemos que las dos nuevas curvas forman un ángulo ortogonal entre sí. ■

Problema 7. – *Describa a las imágenes de rectas verticales y segmentos horizontales de la función* $z \to \cos(z)$ *en la franja vertical* $V = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < \pi\}$. *Diga en qué dirección se recorren estas imágenes si las rectas verticales las muevo de izquierda a derecha y los segmentos horizontales se mueven de arriba a hacia abajo. Demuestre que* $z \to \cos(z)$ *es conforme en dicha franja e interprete geométricamente la conformalidad.*

Solución:

1) Veamos las imágenes de las rectas verticales y los segmentos horizontales.

Recordemos que para $z \in \mathbb{C}$

$$\cos(z) = \cos(x+iy) = \cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\sin(iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

• Consideremos la recta vertical $l_{x_0} = \{x_0 + iy : y \in \mathbb{R}\} \subseteq V$ con $x_0 \in (0,\pi)$ fijo. Entonces tendremos que $z \in l_{x_0} \Leftrightarrow z = x_0 + iy \Leftrightarrow$

$$\cos(z) = \cos(x_0 + iy) = \cos(x_0)\cosh(y) - i\sin(x_0)\sinh(y)$$

Con esto veamos, que sí $z \in l_{x_0}$, entonces $\cos(z)$ pertenece a la hipérbola

$$P_{x_0} = \left\{ x + iy : \frac{x^2}{\cos^2(x_0)} - \frac{y^2}{\sin^2(x_0)} = 1 \right\} \text{ si } x_0 \neq \tfrac{\pi}{2}$$

Y pertenece a la recta

$$P_{\pi/2} = \{iy : y \in \mathbb{R}\} \text{ si } x_0 = \tfrac{\pi}{2}$$

⊙ Si $x_0 = \frac{\pi}{2}$. En efecto, se tiene que

$$\cos(z) = \cos(\tfrac{\pi}{2})\cosh(y) - i\sin(\tfrac{\pi}{2})\sinh(y) = -i\sinh(y)$$

$\therefore \quad \cos(z) \in P_{\pi/2}$

⊙ Si $x_0 \neq \frac{\pi}{2}$. Se tendrá que $\cos(x_0) \neq 0$ y como $x_0 \in (0,\pi)$ $\Rightarrow \sin(x_0) \neq 0$ con lo que P_{x_0} está bien definido. Además, se tiene que:

$$\frac{[\cos(x_0)\cosh(y)]^2}{\cos^2(x_0)} - \frac{[-\sin(x_0)\sinh(y)]^2}{\sin^2(x_0)} = \cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$$

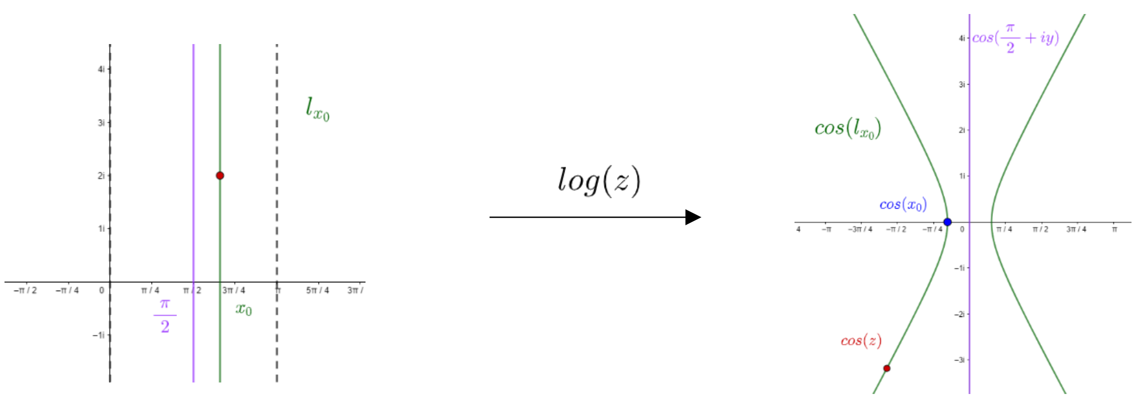
$\therefore \quad \cos(z) \in P_{x_0}$. Con esto tendremos que $\cos(l_{x_0} - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}) \subseteq P_{x_0}$.

Solo tenemos esta contención pues dependiendo de si x_0 sea menor o mayor a $\frac{\pi}{2}$ la imagen de la recta será la parte izquierda o derecha de la hipérbola, pues como para $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ coseno es positivo entonces $\cos(l_{x_0})$ será la parte derecha de la hipérbola y para $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ coseno es negativo entonces $\cos(l_{x_0})$ será la parte izquierda de la hipérbola. Si consideramos $L_{x_0} = \left\{x_0 + iy : y \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\pi - x_0 + iy : y \in \mathbb{R}\right\}$ con $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ se tendrá que $\cos(L_{x_0}) = P_{x_0}$.

Analizando P_{x_0} se tiene que es una hipérbola centrada en el origen donde la excentricidad vendrá dada por[β]

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\cos^2(x_0) + \sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(x_0)}} = \frac{1}{|\cos(x_0)|}$$

Con todo esto tendremos que mover las rectas verticales de izquierda a derecha se traduce en incrementar a x_0 con lo que tendremos una diminución de la excentricidad con $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ y un aumento en $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, que geométricamente se traduce en que hipérbola se hará mas abierta u cerrada.



[β] Dada la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ la excentricidad es $\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}}$.

• Consideremos el segmento horizontal $l_{y_0} = \{x + iy_0 : x \in (0, \pi)\} \subseteq V$ con $y_0 \in \mathbb{R}$. Entonces tendremos que $z \in l_{y_0} \Leftrightarrow z = x + iy_0 \Leftrightarrow$

$$\cos(z) = \cos(x + iy_0) = \cos(x)\cosh(y_0) - i\sin(x)\sinh(y_0)$$

Con esto veamos, que sí $z \in l_{y_0}$, entonces $\cos(z)$ pertenece a la elipse

$$E_{y_0} = \left\{ x + iy : \frac{x^2}{\cosh^2(y_0)} + \frac{y^2}{\sinh^2(y_0)} = 1 \right\} \text{ si } y_0 \neq 0$$

Y pertenece al segmento

$$E_0 = \{x : x \in (-1, 1)\} \text{ si } y_0 = 0$$

⊙ Si $y_0 = 0$. En efecto, se tiene que

$$\cos(z) = \cos(x)\cosh(0) - i\sin(x)\sinh(0) = \cos(x)$$

Y como $x \in (0, \pi) \Rightarrow \cos(x) \in (-1, 1) \therefore \cos(z) \in E_0$.

⊙ Si $y_0 \neq 0$. Se tendrá que $\sinh(y_0) \neq 0$ y $\cosh(y_0) \neq 0$ con lo que E_{y_0} está bien definido. Además, se tiene que:

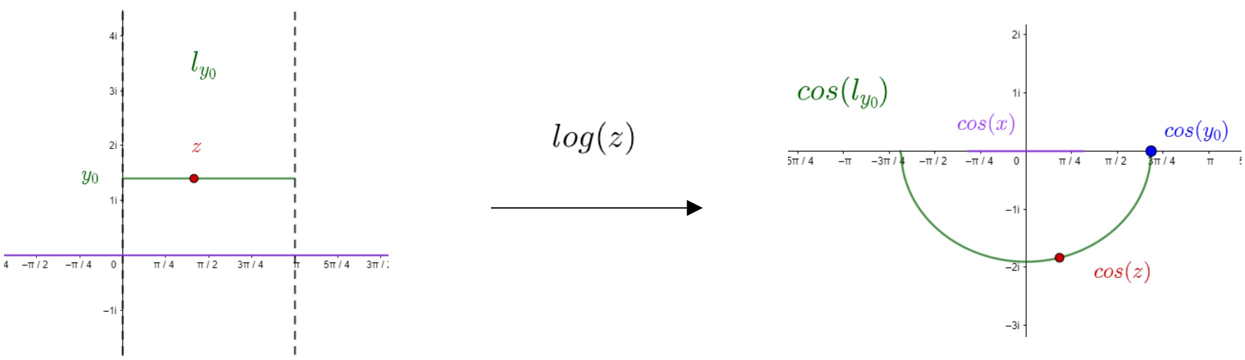
$$\frac{[\cos(x)\cosh(y_0)]^2}{\cosh^2(y_0)} + \frac{[-\sin(x)\sinh(y_0)]^2}{\sinh^2(y_0)} = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$\therefore \cos(z) \in E_{y_0}$. Con esto tendremos que $\cos(l_{y_0} - \{0\}) \subseteq E_{y_0}$. Solo tenemos esta contención pues dependiendo de si y_0 sea menor o mayor a 0 la imagen del segmento será la parte superior o inferior de la elipse, pues como para $y_0 > 0$ sinh es positivo entonces $-\sin(x)\sinh(y_0)$ es negativo $\Rightarrow \cos(l_{y_0})$ será la parte inferior de la elipse y para $y_0 < 0$ sinh es negativo entonces $-\sin(x)\sinh(y_0)$ es positivo $\Rightarrow \cos(l_{y_0})$ será la parte superior de la elipse Si consideramos $L_{y_0} = \{x + iy_0 : x \in (0, \pi)\} \cup \{x - iy_0 : x \in (0, \pi)\}$ con $y_0 > 0$ se tendrá que $\cos(L_{y_0}) = E_{y_0}$.

Analizando E_{y_0} se tiene que es una elipse centrada en el origen, con eje mayor sobre el eje real (pues $\cosh(x_0) > \sinh(x_0)$), donde la excentricidad vendrá dada por[β]

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\cosh^2(y_0) - \sinh^2(y_0)}{\cosh^2(y_0)}} = \sqrt{\frac{1}{\cosh^2(y_0)}} = \frac{1}{\cosh(y_0)}$$

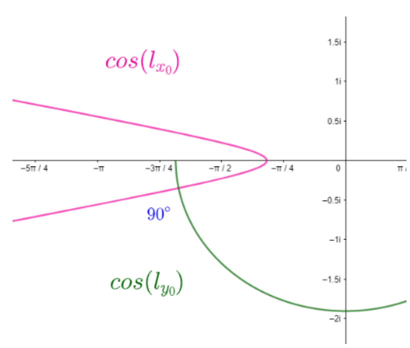
Con todo esto tendremos que mover los segmentos horizontales de arriba hacia abajo se traduce en disminuir a y_0 con lo que tendremos un aumento de la excentricidad con $y_0 > 0$ y una disminución con $y_0 < 0$, que geométricamente se traduce en que elipse se hará más abierta u cerrada.



Con todo esto podemos comprobar la conformalidad, solo veremos dos casos:

⊗ Si $x_0 = \frac{\pi}{2}$ y $y_0 = 0$ tendremos que l_{x_0} es la recta vertical que pasa por $\frac{\pi}{2}$ y l_{y_0} es el segmento horizontal entre 0 y π por lo que se cortan ortogonalmente, y efectivamente, tendremos que $\cos(l_{x_0}) = P_{\pi/2} = \{iy : y \in \mathbb{R}\}$ y $\cos(l_{y_0}) = E_0 = \{x : x \in (-1,1)\}$ que se intersecan ortogonalmente.

⊗ Si $x_0 > \frac{\pi}{2}$ y $y_0 > 0$ tendremos que l_{x_0} una recta vertical y l_{y_0} es un segmento horizontal entre 0 y π por lo que se cortan ortogonalmente, y efectivamente, tendremos que $\cos(l_{x_0})$ es la parte izquierda de la hipérbola y $\cos(l_{y_0})$ es la parte inferior de la elipse, las cuales se intersecan ortogonalmente.



Los demás casos serán similares. Comprobándose así, la conformalidad.

[β] Dada la hipérbola $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ con $a > b$ la excentricidad es $\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$.

Lema. - Sea $f:U\to\mathbb{C}$, $U\subseteq\mathbb{C}$ una región. f cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y solo si

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-i\frac{\partial f}{\partial y}$$

Demostración:

⇒] Supongamos que f cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial(u+iv)}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\underset{C-R}{=}\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=-i(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y})=-i\frac{\partial f}{\partial y}$$

⇐] Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial x}=-i\frac{\partial f}{\partial y}$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=-i\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$\Rightarrow\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ \text{ y }\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

Quedando demostrado. ■

Problema 8. – *Demuestre que si f es una función entera y no constante, entonces la función $z\to f(\overline{z})$ no es holomorfa en ningún punto del plano.*

Demostración: Veamos que $f(\overline{z})$ no cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Sea $z\in\mathbb{C}$, como f es entera y no constante se tendrá que existen $\frac{\partial f}{\partial x}(z)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(z)$ y serán distintas de cero[ψ]. En efecto, tenemos que

$$\frac{\partial f(\overline{z})}{\partial x}=\frac{\partial f(z)}{\partial x}\cdot\frac{\partial(\overline{z})}{\partial x}=\frac{\partial f(z)}{\partial x}\cdot\frac{\partial(x-iy)}{\partial x}=\frac{\partial f(z)}{\partial x}\cdot 1=\frac{\partial f(z)}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial f(\overline{z})}{\partial y}=\frac{\partial f(z)}{\partial y}\cdot\frac{\partial(\overline{z})}{\partial y}=\frac{\partial f(z)}{\partial y}\cdot\frac{\partial(x-iy)}{\partial y}=\frac{\partial f(z)}{\partial x}\cdot(-1)=-\frac{\partial f(z)}{\partial x}$$

$\therefore\ \frac{\partial f}{\partial x}\neq -i\frac{\partial f}{\partial y}$ $\therefore$ por el lema anterior no cumple C-R $\therefore$ no es holomorfa en ningún punto.

[ψ] Como f es holomorfa en $\mathbb{C}$, cumple C-R y si pasara, por ejemplo $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, entonces por el lema anterior se tendría que $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ y entonces f sería una función constante, lo cual supusimos que no pasaba.

Problema 9. – *Encuentre el dominio de analiticidad de las siguientes funciones, así como su derivada.*

a) $z \to \sqrt[3]{e^z - 1}$, *donde la raíz cubica se define mediante la rama principal del logaritmo.*

b) $z \to \log(\sqrt{z} + 2i)$, *donde log denota la rama del logaritmo con argumentos en* $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$.

Demostración:

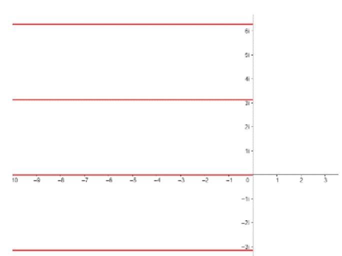
a) $z \to \sqrt[3]{e^z - 1}$.

Como la raíz cubica se define mediante la rama principal del logaritmo, tendremos que será holomorfa en $\mathbb{C} \setminus B_{-\pi} = \left\{z \in \mathbb{C} : z \neq te^{-\pi i},\ t \geq 0\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} : z \neq -t,\ t \geq 0\right\}$. Así solo necesitamos saber para cuales $z \in \mathbb{C}$ se tiene que $e^z - 1 \in \mathbb{C} \setminus B_{-\pi}$.

Sea $z \in \mathbb{C}$ t.q $e^z - 1 \in B_{-\pi} \Rightarrow e^z - 1 \leq 0 \Rightarrow e^z \leq 1 \Rightarrow e^{x+iy} \leq 1 \Rightarrow e^x e^{iy} \leq 1$ entonces $e^x \cos(y) + ie^x \sin(y)] \leq 1 \Leftrightarrow e^x \cos(y) \leq 1 \wedge e^x \sin(y) = 0$.

- $e^x \sin(y) = 0 \underset{e^x > 0}{\Leftrightarrow} \sin(y) = 0 \Leftrightarrow y = \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$
- $e^x \cos(y) \leq 1 \underset{e^x > 0}{\Leftrightarrow} \cos(y) \leq e^{-x}$, y esto se cumplirá siempre que $e^{-x} \geq 1$ lo que significa que $x \leq 0$.

Con lo anterior tenemos que $z \in \mathbb{C}$ es tal que $e^z - 1 \in B_{-\pi}$ si y solo si $z \in \left\{x + i\pi k : k \in \mathbb{Z} \text{ y } x \leq 0\right\}$ (imagen)



De esta manera tendremos que como $e^z - 1$ es entera, en particular será holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \left\{x + i\pi k : k \in \mathbb{Z} \text{ y } x \leq 0\right\}$ y será tal que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{x + i\pi k : k \in \mathbb{Z} \text{ y } x \leq 0\right\} \Rightarrow e^z - 1 \notin B_{-\pi}$ y como la raíz cubica es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus B_{-\pi}$ tendremos por la regla de la cadena que $\sqrt[3]{e^z - 1}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \left\{x + i\pi k : k \in \mathbb{Z} \text{ y } x \leq 0\right\}$.

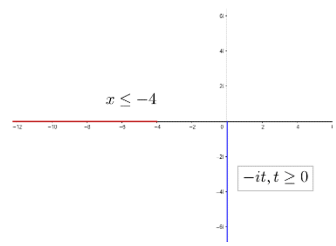
Así tomando $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{x + i\pi k : k \in \mathbb{Z} \text{ y } x \leq 0\right\}$ se tendrá por la regla de la cadena que $\frac{d}{dz}\sqrt[3]{e^z - 1} =$

$$= \frac{d}{dz}(e^z - 1)^{1/3} = \frac{1}{3}(e^z - 1)^{-2/3} \cdot e^z = \frac{e^z}{3\sqrt[3]{(e^z - 1)^2}}.$$

b) $z \to \log(\sqrt{z} + 2i)$.

Como la raíz cuadrada se define mediante la rama $(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$ del logaritmo, tendremos que será holomorfa en $\mathbb{C}\setminus B_{-\pi/2}=\left\{z\in\mathbb{C}: z\neq te^{-\frac{\pi}{2}i},\ t\geq 0\right\}=\left\{z\in\mathbb{C}: z\neq -it,\ t\geq 0\right\}$. Así solo necesitamos saber cuáles $z\in\mathbb{C}\setminus B_{-\pi/2}$ se tiene que $\sqrt{z}+2i\in\mathbb{C}\setminus B_{-\pi/2}$ y de esta manera el logaritmo sea diferenciable en estos puntos.

Sea $z\in\mathbb{C}\setminus B_{-\pi/2}$ tal que $\sqrt{z}+2i\in B_{-\pi/2}\ \Rightarrow\ \sqrt{z}+2i=-it$ para alguna $t\geq 0\ \Rightarrow\ \sqrt{z}=-it-2i$ $=(-t-2)i\ \Rightarrow\ z=-(t+2)^2$ y como $t\leq 0\ \Rightarrow\ -(t+2)^2\leq -4\quad\therefore\ \sqrt{z}+2i\in B_{-\pi/2}\ \Rightarrow\ z\leq -4$ $\Rightarrow\ x+iy\leq -4$, entonces: $y=0$ y $x\leq -4$.



Con lo anterior tenemos que $z\in\mathbb{C}\setminus B_{-\pi/2}$ es tal que $\sqrt{z}+2i\in B_{-\pi/2}$ sí y solo si $z\in\left\{x: x\leq 4\right\}$ (imagen)

De esta manera tendremos que como $\sqrt{z}+2i$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus B_{-\pi/2}$, en particular será holomorfa en $\mathbb{C}\setminus(B_{-\pi/2}\cup\left\{z: z=x,\ x\leq 4\right\})$ y será tal que para todo $z\in\mathbb{C}\setminus(B_{-\pi/2}\cup\left\{z: z=x,\ x\leq 4\right\})\ \Rightarrow\ \sqrt{z}+2i\notin B_{-\pi/2}$ y como el logaritmo es holomorfo en $\mathbb{C}\setminus B_{-\pi/2}$ tendremos por la regla de la cadena que $\log(\sqrt{z}+2i)$ es holomorfa en $z\in\mathbb{C}\setminus(B_{-\pi/2}\cup\left\{z: z=x,\ x\leq 4\right\})$.

Así tomando $z\in\mathbb{C}\setminus(B_{-\pi/2}\cup\left\{z: z=x,\ x\leq 4\right\})$ se tendrá por la regla de la cadena que $\frac{d}{dz}\log(\sqrt{z}+2i)=\frac{1}{\sqrt{z}+2i}\cdot\frac{d}{dz}(\sqrt{z}+2i)=\frac{1}{\sqrt{z}+2i}\cdot\frac{1}{2\sqrt{z}}=\frac{1}{2z+4\sqrt{z}i}$. ■

Problema 10. – *Demuestre que si una función g es holomorfa en un dominio D y su derivada n-ésima se anula en todo punto, entonces la función es un polinomio de grado menor o igual a $n-1$.*

Demostración: Por inducción sobre n.

Para $n=1$. Supongamos que g es holomorfa, tal que $g^{(1)}(z)=0\ \forall z$. Como g es holomorfa, tendremos que $g^{(1)}(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(z)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z)=0\ \Rightarrow\ \frac{\partial u}{\partial x}(z)=0=\frac{\partial v}{\partial x}(z)$ y por C-R tendremos que entonces $\frac{\partial u}{\partial x}(z)=0=\frac{\partial v}{\partial y}(z)$ y $\frac{\partial u}{\partial y}(z)=0=\frac{\partial v}{\partial x}(z)$ por lo que u,v son constantes, y entonces $g(z)=a+ib$ que es un polinomio de grado 0.

Ahora supongamos que para $k > 1$ se cumple, es decir, si g es holomorfa en D y tal que $g^{(k)} = 0 \Rightarrow g$ es un polinomio de grado menor o igual a $k-1$.

Entonces sea g holomorfa en D tal que $g^{(k+1)} = 0$.

PD g es un polinomio de grado menor o igual a k.

obs. – Como existe $g^{(k+1)} \Rightarrow g^{(r)}$ existe para toda $r \leq k$ en particular existe g' y será holomorfa en D.

Por hipótesis sabemos qué $g^{(k+1)} = 0 \Rightarrow (g')^{(k)} = 0$ y como g' es holomorfa en D (por la obs) tendremos una función que se anula en su n-ésima derivada, de esta manera por la hipótesis de inducción $g'(z) = a_r z^r + \cdots + a_1 z + a_0$ con $r \leq k-1$, de esta manera se tendrá que $g(z) = a_r z^{r+1} + \cdots + a_1 z^2 + a_0 z + C$, que es un polinomio de grado menor o igual a k, que es lo que queríamos probar.

$\therefore$ por inducción sobre n queda demostrado. ■

Anexos

1) Definicion circunferencia/recta en $\mathbb{C}$

Tenemos que la ecuación general de la recta/circunferencia en $\mathbb{R}^2$ es

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0\,,\ \ A,B,C,D\in\mathbb{R}$$

siendo una recta si y solo sí $A=0$. Recordando las conversiones $x=\frac{z+\overline{z}}{2}=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z}$ y $y=\frac{z-\overline{z}}{2i}=-i\frac{1}{2}z+i\frac{1}{2}\overline{z}$, podemos obtener la forma compleja de la ecuación:

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \iff Az\overline{z}+B(\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2}\overline{z})+C(-i\tfrac{1}{2}z+i\tfrac{1}{2}\overline{z})+D=0$$

$$\iff Az\overline{z}+\tfrac{1}{2}Bz+\tfrac{1}{2}B\overline{z}-i\tfrac{1}{2}Cz+i\tfrac{1}{2}C\overline{z}+D=0 \iff Az\overline{z}+[\tfrac{1}{2}Bz-i\tfrac{1}{2}Cz]+[\tfrac{1}{2}B\overline{z}+i\tfrac{1}{2}C\overline{z}]+D=0$$

$$\iff Az\overline{z}+[\tfrac{1}{2}B-i\tfrac{1}{2}C]z+[\tfrac{1}{2}B+i\tfrac{1}{2}C]\overline{z}+D=0 \iff Az\overline{z}+\overline{E}z+E\overline{z}+D=0 \text{ con } E=\tfrac{1}{2}B+i\tfrac{1}{2}C$$

$\therefore$ la formula general de la recta/circunferencia es $C: Az\overline{z}+\overline{E}z+E\overline{z}+D=0$ con $A,D\in\mathbb{R}$ y $E\in\mathbb{C}$, siendo recta si y solo sí $A=0$.

2) *Si* $0\notin C$. *(con lo que* $D\neq 0$ *) si* $z\in C$ *entonces* $\frac{1}{z}$ *está en:* $\tilde{C}:\ Dw\overline{w}+Ew+\overline{E}\overline{w}+A=0$

Yo quiero encontrar una recta/circunferencia tal que $\mathrm{A}\frac{1}{z}\frac{1}{\overline{z}}+\overline{\mathrm{E}}\frac{1}{z}+\mathrm{E}\frac{1}{\overline{z}}+\Delta=0$

$$\iff \frac{1}{z}\frac{1}{\overline{z}}[\mathrm{A}+\overline{\mathrm{E}}\overline{z}+\mathrm{E}z+\Delta z\overline{z}]=0$$

entonces si tomo $\mathrm{A}=D,\ \mathrm{E}=\overline{E}$ y $\Delta=A$ obtengo que $\frac{1}{z}\frac{1}{\overline{z}}[D+E\overline{z}+\overline{\mathrm{E}}z+Az\overline{z}]=0$. Y esta es la buscada.

3) *Si* $z\in C:\ Az\overline{z}+\overline{E}z+E\overline{z}=0$ *entonces* $\frac{1}{z}, z\neq 0$ *está en* $\tilde{C}:\ Ew+\overline{E}\overline{w}+A=0$

Yo quiero encontrar una recta/circunferencia tal que $\mathrm{A}\frac{1}{z}\frac{1}{\overline{z}}+\overline{\mathrm{E}}\frac{1}{z}+\mathrm{E}\frac{1}{\overline{z}}=0$

$$\iff \frac{1}{z}\frac{1}{\overline{z}}[\mathrm{A}+\overline{\mathrm{E}}\overline{z}+\mathrm{E}z+\Delta]=0$$

entonces si tomo $\mathrm{A}=0$, $\mathrm{E}=\overline{E}$ y $\Delta = A$ obtengo que $\frac{1}{z}\frac{1}{\overline{z}}[E\overline{z}+\overline{\mathrm{E}}z+Az\overline{z}]=0$. Y esta es la buscada.

4) *Supongamos* $w \neq 0$ *y sea* $C:\ Az\overline{z}+\overline{E}z+E\overline{z}+D=0$ *una recta/circunferencia, entonces si* $z \in C$ *tendremos que* $w \cdot z$ *pertenece a la recta/circunferencia* $\tilde{C}:\ \dfrac{A}{|w|^2}z\overline{z}+\dfrac{\overline{E}}{w}z+\dfrac{E}{\overline{w}}\overline{z}+D=0$.

Yo quiero encontrar una recta/circunferencia tal que $\mathrm{A}(w\cdot z)\overline{(w\cdot z)}+\overline{\mathrm{E}}(w\cdot z)+\mathrm{E}\overline{(w\cdot z)}+\Delta=0$

$$\Leftrightarrow\ \mathrm{A}|w|^2 z\overline{z}+\overline{\mathrm{E}}w\cdot z+\mathrm{E}\overline{w}\cdot\overline{z}+\Delta=0\ \Leftrightarrow\ \mathrm{A}|w|^2 z\overline{z}+\overline{\mathrm{E}}w\cdot z+\mathrm{E}\overline{w}\cdot\overline{z}+\Delta=0$$

entonces si tomo $\mathrm{A}=\frac{A}{|w|^2}$, $\mathrm{E}=\frac{E}{\overline{w}}$ y $\Delta = D$ obtengo que $Az\overline{z}+\overline{E}z+E\overline{z}+D=0$. Y esta es la buscada.