Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Variable Compleja I

Examen 2

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

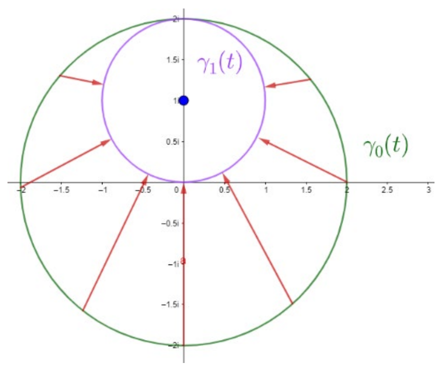
Problema 1. – *Demuestra formalmente que* $\mathbb{C}-\{z_1,\ldots,z_n\}$ *no es simplemente conexo.*

Demostración: Sean $z_k \in \{z_1,\ldots,z_n\}$ y $R=\frac{1}{2}\min\left\{\left|z_k-z_j\right| : 1\le j\le n,\ j\ne k\right\}$.
Veamos que $\mathbb{C}-\{z_1,\ldots,z_n\}$ no es simplemente conexo. En efecto, sea $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}-\{z_1,\ldots,z_n\}$ dada por $\gamma(t)=z_k+Re^{it}$ (la circunferencia de radio R con centro en z_k). Notemos que $\forall j\ne k$, $z_j\notin\gamma$, pues por definición $\left|z_k-z_j\right|>R$. Además por resultados vistos en clase sabemos que $\int_\gamma \frac{1}{z-z_k}dz=2\pi i$, por lo que $\mathbb{C}-\{z_1,\ldots,z_n\}$ no es simplemente conexo, pues de serlo, tendríamos por el teorema de cauchy que $\int_\gamma \frac{1}{z-z_k}dz=0$ ya qué $\frac{1}{z-z_k}$ es analítica en $\mathbb{C}-\{z_1,\ldots,z_n\}$. ■

Problema 2. – *Calcule* $\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+1}$.

Demostración: Notemos que $\frac{1}{2i}[\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}]=\frac{1}{2i}[\frac{z+i-z+i}{(z-i)(z+i)}]=\frac{1}{2i}[\frac{2i}{z^2+1}]=\frac{1}{z^2+1}$, por lo que

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+1}=\int_{|z|=2}\frac{1}{2i}[\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}]dz=\frac{1}{2i}\underbrace{\int_{|z|=2}\frac{1}{z-i}dz}_{I_1}-\frac{1}{2i}\underbrace{\int_{|z|=2}\frac{1}{z+i}dz}_{I_2}$$



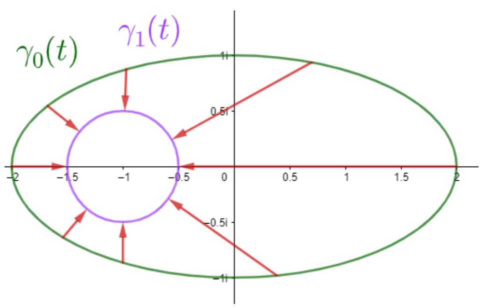
Ahora, para I_1 consideremos $\gamma_0(t)=2e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ la circunferencia de radio 2 y centro el 0. Y sea $\gamma_1(t)=i+e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ la circunferencia unitaria con centro en i. Notemos que γ_0 y γ_1 son homotopicas con la homotopía $H:[0,2\pi]\times[0,1]\to\mathbb{C}$ dada por

$H(t,x) = x\gamma_1(t) + (x-1)\gamma_0(t)$ [ζ], además $f(z) = \dfrac{1}{z-i}$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \{i\}$ $\therefore$ por el teorema de la deformación $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{z-i}dz = \int_{\gamma_0} \frac{1}{z-i}dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-i}dz$ y por lo visto en clase, $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-i}dz = 2\pi i$ $\Rightarrow I_1 = 2\pi i$.

Haciendo un procedimiento análogo, pero considerando $\gamma_1(t) = -i + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ obtenemos que $I_2 = 2\pi i$ $\therefore$ $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} \frac{1}{2i} 2\pi i - \frac{1}{2i} 2\pi i = 0$. ■

Problema 3. – *Sea* γ_0 *la elipse* $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$. *Demuestre formalmente que* $\displaystyle\int_{\gamma_0} \frac{dz}{z+1} = 2\pi i$.

Demostración: Consideremos $\gamma_0(t) = 2\cos(t) + i\sin(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ la parametrización de la elipse dada. Y sea $\gamma_1(t) = -1 + \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ la circunferencia de radio $\frac{1}{2}$ con centro en -1. Notemos que γ_0 y γ_1 son homotopicas con la homotopía $H : [0, 2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ dada por



$H(t,x) = x\gamma_1(t) + (x-1)\gamma_0(t)$ (por lo ya explicado en el problema anterior), además $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \{1\}$ $\therefore$ por el teorema de la deformación $\displaystyle\int_{\gamma_0} \frac{1}{z+1}dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z+1}dz$ y por lo visto en clase, $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{1}{z+1}dz = 2\pi i$ $\therefore$ $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{dz}{z+1} = 2\pi i$. ■

Problema 4. – *Sea* γ *una curva cerrada simple y* C^1 *por tramos contenida en* $\mathbb{C}$. *Use el Teorema de Schönflies para demostrar que* γ *es homotópica a un punto en su interior. Concluya que si* γ *es una curva tal que* $\overline{\text{int}(\gamma)}$ *esta contenida en una región de analiticidad de una función f, entonces* $\displaystyle\int_{\gamma} f = 0$.

Demostración: Consideremos $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ la parametrización de la curva y sea $z_0 \in \text{int}(\gamma)$. Como γ es una curva cerrada simple y C^1 por tramos contenida en $\mathbb{C}$, por el teorema de Schönflies existe $f : \overline{\text{int}(\gamma)} \to \overline{D(z_0, 1)}$ homeomorfismo.

PD: γ es homotópica a $f^{-1}(z_0)$.

[ζ] En efecto, $H(t,0) = \gamma_0(t)$ y $H(t,1) = \gamma_1(t)$ y además al ser productos y sumas de funciones continuas, será continua.

• Primero argumentaremos porque $f^{-1}(z_0) \in \text{int}(\gamma)$.

Como f es homeomorfismo tendremos que $f[\overline{\text{int}(\gamma)}] = f[\text{int}(\gamma) \cup \partial\, \text{int}(\gamma)] =^{\psi} f[\text{int}(\gamma)] \cup f[\partial\, \text{int}(\gamma)]]$ $= f[\text{int}(\gamma)] \cup f[\gamma]^{\xi}$, además por ser f biyectiva $f[\overline{\text{int}(\gamma)}] = \overline{D(z_0,1)} = D(z_0,1) \cup \partial D(z_0,1) \Rightarrow$ $f[\text{int}(\gamma)] \cup f[\gamma] = D(z_0,1) \cup \partial D(z_0,1)$ donde las uniones son disjuntas pues $\text{int}(\gamma) \cup \gamma$ y $D(z_0,1) \cup \partial D(z_0,1)$ lo son.

Con esto tendré necesariamente que los conjuntos son iguales por pares, sin embargo como f es homeomorfismo este manda abiertos es abiertos y cerrados en cerrado, y como $\text{int}(\gamma)$ es abierto $\Rightarrow f[\text{int}(\gamma)]$ es abierto, por lo que necesariamente $f[\text{int}(\gamma)] = D(z_0,1)$ y $f[\gamma] = \partial D(z_0,1)$.

$\therefore$ como $z_0 \in \text{int}(D(z_0,1)) = D(z_0,1)$ entonces $f^{-1}(z_0) \in \text{int}(\gamma)$.

• Por otro lado tenemos que $\partial D(z_0,1)$ es homotópica a z_0 (pues es la circunferencia con centro en z_0 y radio 1) con lo que existe $G : [a,b] \times [0,1] \to \overline{D(z_0,1)}$ homotopía tal que $G(t,0) = \gamma_{\partial D(z_0,1)}(t)$ y $G(t,1) = z_0 \quad \forall t \in [a,b]$ con $\gamma_{\partial D(z_0,1)}(t)$ la parametrización de la circunferencia.

PD: $H : [a,b] \times [0,1] \to \overline{\text{int}(\gamma)}$ dada por $H(t,x) = f^{-1}(G(t,x))$ es homotopía.

Está bien definida pues $\forall (t,x) \in [a,b] \times [0,1] \quad G(t,x) \in \overline{D(z_0,1)} \Rightarrow f^{-1}(G(t,x)) \in \overline{\text{int}(\gamma)}$.

Además, como G y f^{-1} son continuas por ser homotopía y homeomorfismo respectivamente se tendrá que su composición $H = f^{-1} \circ G$ es continua y $H(t,0) = f^{-1}(G(t,0)) = f^{-1}(\gamma_{\partial D(z_0,1)}(t))$ $= \gamma(t)$ y $H(t,1) = f^{-1}(G(t,1)) = f^{-1}(z_0)$

$\therefore$ H es homotopía $\therefore$ γ es homotópica a $f^{-1}(z_0)$. ■

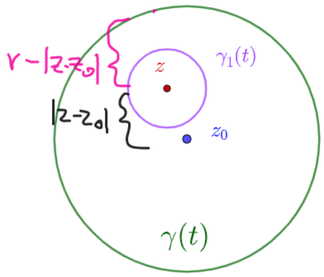
Ahora, supongamos que $f : A \to \mathbb{C}$ es analítica, y que γ es una curva cerrada simple C^1 por tramos tal que $\overline{\text{int}(\gamma)} \subseteq A$. Entonces por lo anterior tenemos que γ es homotópica a un punto en su interior y como en particular f es analítica en $\overline{\text{int}(\gamma)}$ se tendrá por el teorema de cauchy que $\int_\gamma f = 0$.

Problema 5. – *Sea* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Sea* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *la curva dada por* $\gamma(s) = z_0 + re^{is}$, *donde* $r \in \mathbb{R}^+$. *Demuestre que para cualquier* $z \in \text{int}(\gamma)$ *se tiene que* $I(\gamma, z) = 1$.

$^{\psi}$ Esta igualdad se da, pues f es biyectiva.

$^{\xi}$ Pues $\partial\, \text{int}(\gamma) = \gamma$

Demostración: Sea $R = \dfrac{r - |z - z_0|}{2}$, y consideremos $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = z + Re^{it}$ la circunferencia con centro en z y radio R. Por construcción, $\gamma_1 \subseteq \mathrm{int}(\gamma)$. Ahora por lo hecho en problemas anteriores sabemos qué γ y γ_1 serán homotopicas, así por el teorema de la deformación $\int_\gamma \frac{1}{w - z} dw = \int_{\gamma_1} \frac{1}{w - z} dw = 2\pi i$ por lo que $I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i = 1$. ■



Problema 6. – *Demuestre que la función* $g(z) = \int_\gamma \frac{|w| e^w}{(w - z)^2} dw$ *donde* γ *es el circulo de radio 2 alrededor del origen, es holomorfa en el complemento de* γ. *Calcule su derivada.*

Demostración: Sea $\varphi(w) = |w| e^w$, notemos que es continua en todo $\mathbb{C}$ pues $|w|$ y e^w lo son. En particular será continua en γ y además como γ es una curva C^1 por tramos tendremos que $f(z) = \int_\gamma \frac{|w| e^w}{w - z} dw$ es una integral de tipo cauchy, por lo que es holomorfa en el complemento de γ y existe $f^{(2)}(z)$, siendo

$$f'(z) = \int_\gamma \frac{|w| e^w}{(w - z)^2} dw = g(z) \;\Rightarrow\; g'(z) = f^{(2)}(z) = 2! \int_\gamma \frac{|w| e^w}{(w - z)^3} dw$$

$$\therefore\; g'(z) = 2 \int_\gamma \frac{|w| e^w}{(w - z)^3} dw$$

Por lo que g es holomorfa en el complemento de γ y su derivada es la dada. ■

Problema 7. – *Sea* f *una función entera, tal que* $|f(z)| \le M |z|^n$, *si* $|z| > R$. *Prueba que dicha función es un polinomio de grado menor o igual a n.*

Demostración: Sea $z \in \mathbb{C}$ arbitrario pero fijo y $\overline{D(z, \tilde{R})}$ con $\tilde{R}$ de tal forma que $D(0, R) \subset \overline{D(z, \tilde{R})}$. Como f es entera, será analítica en $\overline{D(z, \tilde{R})}$ y $\forall w \in \partial D(z, \tilde{R})$ se tiene que $|w| = \tilde{R} > R$ por lo que $\forall w \in \partial D(z, \tilde{R})$ $|f(w)| \le M |w|^n = M\tilde{R}^n$ $\therefore$ por las desigualdades de cauchy se tiene que

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \leq \frac{k!}{\tilde{R}^k} M\tilde{R}^n \ \ \forall k \geq 1 \underset{k=n+1}{\Rightarrow} \left|f^{(n+1)}(z)\right| \leq \frac{k!}{\tilde{R}} M$$

por lo que haciendo tender $\tilde{R} \to \infty$, tendremos que $\left|f^{(n+1)}(z)\right| \leq 0 \ \Rightarrow \ \left|f^{(n+1)}(z)\right| = 0$. Y como z fue arbitrario, tendremos que $\forall z \in \mathbb{C} \ \ f^{(n+1)}(z) = 0$ y entonces por el problema 10 del examen 1 como f es entera y es tal que su derivada $n+1$ se anula en todo punto, tendremos que f es un polinomio de grado menor o igual a n. ■

Problema 8. – *Sea f una función entera y no constante en $\mathbb{C}$. Demuestra que $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.*

Demostración:
Recordatorio: Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ es denso en $\mathbb{C}$ si y solo si para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $|z-a| < \varepsilon$.

Por contradicción, supongamos que $f(\mathbb{C})$ no es denso, entonces para $\varepsilon = 1$ existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $\forall a \in f(\mathbb{C})$ se tiene que $|w-a| \geq 1$ y como $a \in f(\mathbb{C}) \ \Leftrightarrow \ a = f(z)$ para alguna $z \in \mathbb{C}$ entonces lo anterior es equivalente a decir que existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $\forall f(z) \in f(\mathbb{C})$ se tiene que $|w - f(z)| \geq 1$. Con consideremos $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = \dfrac{1}{w - f(z)}$ la cual es una función entera ya que $\forall z \in \mathbb{C}$ tenemos que $|w - f(z)| \geq 1 \ \Rightarrow \ w \neq f(z)$ con lo que el denominador no se anula. Además g es acotada, pues $|g(z)| = \left|\dfrac{1}{w - f(z)}\right| = \dfrac{1}{|w - f(z)|} \leq 1 \ \therefore$ por el teorema de Liouville g es constante, es decir, $g(z) = c, \ c \neq 0$ pues $g(z) \neq 0 \ \Rightarrow \ \dfrac{1}{w - f(z)} = c \ \Rightarrow \ cw - cf(z) = 1 \ \Rightarrow \ f(z) = \dfrac{cw-1}{c} \ \therefore \ f$ es constante !!! lo cual es imposible, pues por hipótesis f era no constante $\therefore \ f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$. ■

Problema 9. – *Encuentre el valor máximo de la función $f(z) = |\sin(z)|$ en $R = [0,1] \times [-i, i]$ y diga en que puntos se alcanza dicho máximo.*

Demostración: Primero veamos que dicho máximo existe.
En efecto, como $\sin(z)$ es entera, en particular será analítica en R que es una región cerrada y acotada $\therefore$ por el principio del módulo máximo $f(z) = |\sin(z)|$ alcanza su máximo en ∂R (pues $\sin(z)$ no es constante).

Notemos que si $z \in [0,1] \Rightarrow f(z) = \left|\sin(z)\right|$ es el seno real, y sabemos que para este intervalo es creciente por lo que alcanza su máximo en $z = 1$. Igualmente, si tomamos $z \in [-i, i]$ tenemos que $z = it$ para algún $t \in [-1,1]$ con lo que $\left|\sin(it)\right| = \left|i \sinh(t)\right| = \left|\sinh(t)\right|$ y como $\sinh(t)$ es creciente en este intervalo y tal que $\sinh(t) < 0$ si $t < 0$ y $\sinh(t) \geq 0$ si $t \geq 0$ entonces alcanza su máximo en ambos extremos, $t = 1, -1$.
Con lo anterior tendremos que los puntos máximos serán $(1,1)$ y $(1,-1)$, es decir, $1+i$, $1-i$ y el valor máximo que alcanza es

$$\begin{aligned} \left|\sin(1+i)\right| &= \left|\sin(1)\cos(i) + \cos(1)\sin(i)\right| = \left|\sin(1)\cosh(1) + i\cos(1)\sinh(1)\right| \\ &= \sqrt{\sin^2(1)\cosh^2(1) + \cos^2(1)\sinh^2(1)} \approx 1.445396576658.... \end{aligned}$$

■

Problema 10. – *El teorema del mapeo de Riemann establece que si $A \subset \mathbb{C}$ es una región simplemente conexa, entonces A es conformemente equivalente a Δ. Mas aún, si $f : A \to \Delta$ es una biyección conforme, tal que manda un punto $z_0 \in A$ al origen y $f'(z_0) > 0$, entonces f es única.*

Demostración: No supe hacerla sin buscarla…