Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Variable Compleja I

Examen 3

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 1. – *Pruebe que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+z^2}$ *es holomorfa en la región* $\mathbb{C} - i\mathbb{Z}$.

Demostración: En efecto, consideremos $\overline{D(z_0,r)} \subseteq \mathbb{C} - i\mathbb{Z}$. PD $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+z^2}$ converge uniformemente en el disco.

Sea $f_n(z) = \frac{1}{n^2+z^2}$, $n \in \mathbb{N}$, que están bien definidas, pues como $z \in \mathbb{C} - i\mathbb{Z} \Rightarrow z^2 \neq n^2$ con $n \in \mathbb{Z}$ y sea $\varepsilon = d(D(z_0,r),0)$. Con lo anterior, como el disco es un conjunto compacto existe $n \in \mathbb{N}$ de tal suerte que $n \geq |z|$ $\forall z \in \overline{D(z_0,r)}$, de esta manera para toda $k \geq n$ se tendrá que

$$\left|k^2 + z^2\right| \underset{\text{anti triangulo}}{\geq} \left\|k^2\right| - \left|z^2\right\| = \left|k^2 - \left|z^2\right|\right| \underset{k \geq n \geq |z|}{=} k^2 - \left|z^2\right| \geq k^2 - (\varepsilon + r)$$

la última igualdad se da, ya que $z \in \overline{D(z_0,r)}$ y entonces $|z| \leq \varepsilon + r$.

- $\left|f_k(z)\right| = \left|\frac{1}{k^2+z^2}\right| = \frac{1}{\left|k^2+z^2\right|} \leq \frac{1}{k^2-(\varepsilon+r)}$ para $k \geq n$ y para los anteriores tomamos sus valores.
- Definiendo $M_k = \begin{cases} \left|f_k(z)\right| & \text{si } k < n \\ \frac{1}{k^2-(\varepsilon+r)} & \text{si } k \geq n \end{cases}$ para $k \geq n$ tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k = \sum_{k=0}^{n-1} M_k + \sum_{k=n}^{\infty} M_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left|f_k(z)\right| + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2-(\varepsilon+r)}$$

y tomando $b_k = \frac{1}{k^2}$ tendremos que $\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2-(\varepsilon+r)}}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2-(\varepsilon+r)}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^2-(\varepsilon+r)} = 1$ con lo que, por el teorema de comparación en el límite como $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, entonces $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2-(\varepsilon+r)}$ converge $\therefore$ $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ converge.

Así por el criterio M de Weierstrass la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+z^2}$ converge absoluta y uniformemente en $\overline{D(z_0,r)}$ por tanto converge normalmente en $\mathbb{C}-i\mathbb{Z}$ siendo así holomorfa en dicha región.

Problema 2. – *Sea* $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2-3i)\frac{1}{n!z^n}$, *pruebe que la función es holomorfa en* $\mathbb{C}-\{0\}$. *Calcule la integral* $\int_{|z|=2} g$

Demostración: Sea $w \in \mathbb{C}-\{0\}$, y consideremos $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2-3i)}{n!w^n}$ dicha serie es convergente.

Sea $a_n = \frac{2-3i}{n!w^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2-3i}{(n+1)!w^{n+1}}}{\frac{2-3i}{n!w^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!w^n}{(n+1)!w^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)w}\right| = 0$

con lo que por el criterio del cociente la serie converge absolutamente, por tanto, converge.

Mas aun, notemos que $\sum_{n=0}^{\infty}(2-3i)\frac{1}{n!z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2-3i)\frac{1}{n!}}{(z-0)^n}$ es una serie de potencias convergente para toda $z \in \mathbb{C}-\{0\} \Rightarrow$ la serie converge de manera normal y absoluta en $\mathbb{C}-D(0,|z|)$ para toda $z \neq 0$ (Lema dual de Abel), y como z es arbitrario tendremos que converge de manera normal y absoluta en $\mathbb{C}-\{0\}$. Con lo que concluimos que dicha serie vista como función es holomorfa en $\mathbb{C}-\{0\}$.

Finalmente, como la serie converge de manera normal en $\mathbb{C}-\{0\}$, converge uniformemente en cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{C}-\{0\}$, en particular la curva γ $\therefore$ por lo visto en clase:

$$\int_{|z|=2} g(z)dz = \int_{|z|=2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2-3i)}{n!z^n}dz = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{|z|=2}\frac{(2-3i)}{n!z^n}dz$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2-3i)}{n!}\int_{|z|=2}\frac{1}{z^n}dz \overset{\Omega}{=} \frac{(2-3i)}{1!}(2\pi i) = (2-3i)(2\pi i) \quad \blacksquare$$

Ω Esto es pues como sabemos $\int_{|z|=2}\frac{1}{z^n}dz = 0$ si $n \neq 1$ quedándonos solo $\int_{|z|=2}\frac{1}{z}dz = 2\pi i$.

Problema 3. – *Encuentre el radio de convergencia de las siguientes series:*

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(16)^n}$$

Solución:

a) Usaremos el criterio de la raíz. Sea $a_n = z^{n!}$, entonces la serie converge si y solo si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \iff \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z^{n!}|} < 1 \iff \lim_{n\to\infty} |z|^{\frac{n!}{n}} < 1 \iff \lim_{n\to\infty} |z|^{(n-1)!} < 1$, con esto tendremos tres situaciones.

Si $|z| < 1 \Rightarrow |z|^{(n-1)!} < |z|^{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |z|^{(n-1)!} < \lim_{n\to\infty} |z|^{n-1} = 0$, por tanto, si $|z| < 1$ por el criterio de la raíz la serie converge.

Si $|z| > 1 \Rightarrow |z|^{(n-1)!} > |z|^{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |z|^{(n-1)!} > \lim_{n\to\infty} |z|^{n-1} = \infty$, por tanto, si $|z| > 1$ por el criterio de la raíz la serie diverge. Y para $z = 1$ igualmente diverge $\therefore$ es radio de convergencia es 1. ■

b) Notemos que tenemos una serie de potencias, por lo que el radio de convergencia viene dado por $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ donde $a_n = \frac{2^n}{n^2}$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^{n+1} n^2}{2^n (n+1)^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2n^2}{n^2+2n+1}\right| = \frac{2}{1} = 2$$

$\therefore$ el radio de convergencia es 2. ■

c) Tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(16)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z^4}{16})^n$ siendo una serie geométrica, la cual converge si y solo si $\left|\frac{z^4}{16}\right| < 1 \iff |z|^4 < 16 \iff |z| < 2$, por lo que el radio de convergencia es 2. ■

Problema 4. – *Encuentre las series de Taylor de las funciones* $\sin(z)$ *y* $\cos(z)$ *alrededor del origen. Encuentre los primeros tres términos de la serie de Taylor de* $z \to \tan(z)$ *alrededor de 0. Calcule* $\int_{|z|=6} \tan(\frac{1}{z}) dz$.

Solución: ⊙ Recordemos la expansión en serie de Taylor de la función exponencial compleja

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $\forall z \in \mathbb{C}$. También, recordemos las representaciones de seno y coseno en su forma exponencial dadas por $\cos(z) = \frac{1}{2}[e^{iz} + e^{-iz}]$ y $\sin(z) = \frac{1}{2i}[e^{iz} - e^{-iz}]$, con esto podemos obtener las series de Taylor buscadas (dado que la serie de Taylor es única).

• Para el coseno

$$\cos(z) = \frac{1}{2}[e^{iz} + e^{-iz}] = \frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}] = \frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n z^n}{n!}]$$

donde los sumandos se anulan si n es impar, quedándonos únicamente los valores pares

$$\cos(z) = \frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} z^{2n}}{(2n)!}] = \frac{1}{2} 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\therefore \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \text{ es la serie de Taylor alrededor del origen}$$

• De forma similar para el seno tenemos:

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}[e^{iz} - e^{-iz}] = \frac{1}{2i}[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}] = \frac{1}{2i}[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n z^n}{n!}]$$

donde en este caso los sumandos se anulan si n es par, quedándonos únicamente los valores impares

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!}] = \frac{1}{2} 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\therefore \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ es la serie de Taylor alrededor del origen}$$

⊙ Para calcular los primeros tres términos de la serie de tangente, llamemos a_n, b_n y d_n a los coeficientes de las respectivas series de Taylor de la tangente, coseno y seno siendo tales que $b_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{n/2}}{n!} & \text{si } n \text{ par} \\ 0 & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$ y $d_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{(-1)^{n-1/2}}{n!} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$.

Con lo anterior tenemos lo siguiente

$$\tan(z)\cos(z) = \sin(z) \quad \Rightarrow \quad (\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n) = \sum d_n z^n$$
$$\Rightarrow^{\psi} \sum c_n z^n = \sum d_n z^n$$

con lo que los coeficientes para $n = 0,1,2$ son iguales

$$\Rightarrow \begin{matrix} c_0 = d_0 \\ c_1 = d_1 \\ c_2 = d_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_0 b_0 = d_0 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = d_1 \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = d_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_0(1) = 0 \\ a_0(0) + a_1(1) = 1 \\ a_0(-\frac{1}{2}) + a_1(0) + a_2(1) = (0) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ -\frac{1}{2} a_0 + a_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \end{matrix}$$

por lo que los primeros tres términos de la serie de Taylor de la tangente son $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 0$.

⊙ Finalmente calculemos la integral. Primero veamos el residuo de $\tan(\frac{1}{z})$ en 0. Por lo anterior y como la serie de Taylor es única tendremos que

$$\tan(\tfrac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\tfrac{1}{z})^n = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \sum_{n=3}^{\infty} a_n (\tfrac{1}{z})^n$$

por lo que $\operatorname{Res}(f,0) = a_1 = 1$. Entonces sea $A_{5.5}^{6.5}(0)$ el anillo centrado en el origen tal que γ $(|z| = 6)$ queda contenido en el y además $\tan(\frac{1}{z})$ es analítica ahí, con lo que por un corolario visto en clase tendremos que

$$\int_{|z|=6} \tan(\tfrac{1}{z}) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0) = 2\pi i \text{ . } \blacksquare$$

Problema 5. – *Encuentra las expansiones de Laurent de la función* $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ *en los anillos* $0 < |z| < 1$ y $1 < |z| < 2$.

Demostración:

⊙ Para el anillo $A_0^1(0)$.

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}(-\frac{1}{1-z})(-\frac{1}{2-z}) = \frac{1}{z}(-\frac{1}{1-z})(-\frac{1}{2}\frac{1}{1-(z/2)})$$

$^{\psi}$ Donde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}$ (visto en clase)

$$\stackrel{\Theta}{=} \frac{1}{z}(-\sum_{n=0}^{\infty} z^n)(-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{\infty} z^n)(\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n z^n) \stackrel{\Omega}{=} \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{2})^k\cdot 1)z^n]$$

$$= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(\frac{1}{2})^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1})z^n] = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}(-2(\frac{1}{2})^{n+1}+2)z^n] = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}(-(\frac{1}{2})^n+2)z^n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(1-(\tfrac{1}{2})^{n+1})z^{n-1} = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{z}}_{\text{singular}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(1-(\tfrac{1}{2})^n)z^n}_{\text{holomorfa}} \text{ es la serie de Laurent. } \blacksquare$$

⊙ Para el anillo $A_1^2(0)$. Aquí haremos uso de fracciones parciales, la cual es un desarrollo muy sencillo y para no alargar de mas no colocare el procedimiento. Obtenemos lo siguiente:

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-2} = \frac{-z-1}{2z(z-1)} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{2}\frac{z+1}{z(z-1)} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{2}(1+\frac{1}{z})\frac{1}{z-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-z/2}$$

$$= \frac{1}{2}(1+\frac{1}{z})\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-z/2} \stackrel{\Theta 2}{=} \frac{1}{2}(1+\frac{1}{z})\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{z})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^n$$

$$= \frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}) - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^n = \frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}}) - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^n$$

$$= \frac{1}{2}([\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots]+[\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots]) - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^n = \frac{1}{2}[\frac{0}{z^0}+\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2}{z^3}+\cdots] - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^n$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}}_{\text{singular}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2^{n+2}})z^n}_{\text{holomorfa}} \text{ donde } a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{2}, a_n = 1\ \forall n \geq 2 \text{ es la serie de Laurent. } \blacksquare$$

Problema 6. – *Calcule la integral* $\int_{|z|=2}\frac{z^2+e^z}{z(z-3)}dz$.

Demostración: Notemos que $\frac{1}{3}(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z}) = \frac{1}{3}\frac{3}{z(z-3)} = \frac{1}{z(z-3)}$ entonces

$$\int_{|z|=2}\frac{z^2+e^z}{z(z-3)}dz = \int_{|z|=2}\frac{1}{3}(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z})(z^2+e^z)dz = \frac{1}{3}\int_{|z|=2}\frac{z^2+e^z}{z-3} - \frac{z^2+e^z}{z}dz$$

$$= \frac{1}{3}\int_{|z|=2}\frac{z^2+e^z}{z-3}dz - \frac{1}{3}\int_{|z|=2}\frac{z^2+e^z}{z}dz = \frac{1}{3}\int_{|z|=2}\frac{z^2}{z-3}+\frac{e^z}{z-3}dz - \frac{1}{3}\int_{|z|=2}z+\frac{e^z}{z}dz$$

Θ Esto es pues $|z|<1 \Rightarrow \left|\frac{z}{2}\right|<1$ y tendremos dos series geométricas.

Ω Producto de series de potencias.

$\Theta 2$ Como $|z|>1 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1$, también $\left|\frac{z}{2}\right|<1$ y tendremos dos series geométricas.

$$= \frac{1}{3}\int_{|z|=2}\frac{z^2}{z-3}dz + \frac{1}{3}\int_{|z|=2}\frac{e^z}{z-3}dz - \frac{1}{3}\int_{|z|=2} zdz - \frac{1}{3}\int_{|z|=2}\frac{e^z}{z}dz$$

y como las funciones $\frac{z^2}{z-3}$, $\frac{e^z}{z-3}$ y z son analíticas en $\overline{D(0,2.5)}$ entonces por el teorema de la primitiva estas integrales son 0, obteniendo

$$\int_{|z|=2}\frac{z^2+e^z}{z(z-3)}dz = -\frac{1}{3}\int_{|z|=2}\frac{e^z}{z}dz$$

con ello calcularemos el residuo de $f(z)=\frac{e^z}{z}$, sabiendo que la serie de Taylor de la función exponencial alrededor del cero es $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \Rightarrow \frac{e^z}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ con lo que $\text{Res}(f,0)=1$, de esta manera:

$$\int_{|z|=2}\frac{z^2+e^z}{z(z-3)}dz = -\frac{1}{3}\int_{|z|=2}\frac{e^z}{z}dz = -\frac{1}{3}2\pi i\text{Res}(f,0) = -\frac{2\pi}{3}i \ \blacksquare$$

Problema 7. – *Encuentre todas las singularidades de la función* $z \to \pi\cot(\pi z)$, *diga que tipo de singularidad aislada se tiene en cada punto y encuentre el residuo. Calcule* $\int_{|z-7|=\frac{1}{2}}\pi\cot(\pi z)dz$.

Demostración:

⊙ Sabemos que $\pi\cot(\pi z)=\pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$, siendo coseno y seno funciones enteras su cociente será una función holomorfa en todos los puntos excepto, donde $\sin(\pi z)=0 \Leftrightarrow \pi z=\pi k, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow z=k$ $k\in\mathbb{Z}$, es decir, la función será holomorfa en $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$, por lo que todos los enteros son singularidades para la función.

Ahora analicemos que tipo de singularidades son. Sea $g(z)=\sin(\pi z)$, es tal que $g'(z)=\pi$ $\cos(\pi z)$ y para cada $t\in\mathbb{Z}$, $g(t)=0$ y $g'(t)=\pi\cos(\pi t)=\pm\pi\neq 0$. En resumen tenemos una función de la forma $f(z)=\frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}=\frac{h(z)}{g(z)}$ tal que $g(t)=0, g'(t)\neq 0$ y $h(t)\neq 0$ $\forall t\in\mathbb{Z}$ siendo h y g holomorfas en $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$ $\therefore$ (visto en clase) $t\in\mathbb{Z}$ es un polo simple de $f(z)$ con residuo $\frac{h(t)}{g'(t)}=\frac{\pi\cos(\pi t)}{\pi\cos(\pi t)}=1$.

⊙ Para la integral, sea γ la parametrización de la circunferencia con centrada en 7 y de radio $\frac{1}{2}$, con ello notemos que el único entero en el interior de la circunferencia es el 7, y por lo anterior $f(z)=\pi\cot(\pi z)$ tiene un polo simple en 7 con residuo 1 $\therefore$

$$\int_{|z-7|=\frac{1}{2}} \pi\cot(\pi z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f,7) = 2\pi i \ \blacksquare$$

Problema 8. – *Pruebe que si f tiene un cero en z_0, de multiplicidad k, entonces $\frac{f'}{f}$ tiene un polo simple en z_0 con residuo k.*

Demostración: Como f tiene un cero en z_0 de multiplicidad k, por una proposición vista en clase existe g analítica, tal que $f(z) = g(z)(z-z_0)^k$ con $g(z_0) \neq 0$. De aquí obtenemos por la regla de la cadena que $f'(z) = g'(z)(z-z_0)^k + g(z)k(z-z_0)^{k-1}$, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{g'(z)(z-z_0)^k + g(z)k(z-z_0)^{k-1}}{g(z)(z-z_0)^k} = \frac{g'(z)(z-z_0)^k}{g(z)(z-z_0)^k} + \frac{g(z)k(z-z_0)^{k-1}}{g(z)(z-z_0)^k} \\ &= \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{k}{z-z_0}\end{aligned}$$

y notemos que $\frac{g'}{g}$ es analítica en z_0, pues g lo es y $g(z_0) \neq 0$, de esta manera todo recae en $\frac{k}{z-z_0}$, que nuevamente, llamando $h(z) = k$ y $K(z) = z - z_0$ se tiene que $h(z_0) \neq 0$, $K(z_0) = 0$ y $K'(z_0) = 1 \neq 0$ por lo que z_0 es un polo simple de orden $\frac{h(z_0)}{K'(z_0)} = \frac{k}{1} = k$ de la función $\frac{f'}{f}$. $\blacksquare$

Observación. – La proposición usada usa el hecho de que al tener f un cero de orden k en z_0, su serie de Taylor se vera de la forma $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ dividiendo ambos lados por $(z-z_0)^k$ obtenemos que $\frac{f(z)}{(z-z_0)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!}(z-z_0)^n \Rightarrow f(z) = [\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!}(z-z_0)^n]$ $(z-z_0)^k$. Esto lo usaremos en el problema siguiente.

Problema 9. – *Prueba la siguiente versión compleja de la regla de L\`Hopital: Sean f y g funciones analíticas en una región $A \subset \mathbb{C}$ y sea z_0 un cero de orden k para ambas funciones. Pruebe que $\frac{f}{g}$ tiene una singularidad removible en z_0 y*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)}$$

Demostración: Basta demostrar el límite, pues de existir nos garantiza que z_0 es una singularidad removible.
Como z_0 es un cero de orden k para ambas funciones, entonces existen h_1, h_2 funciones analíticas tales que $f(z) = h_1(z)(z-z_0)^k$ y $g(z) = h_2(z)(z-z_0)^k$ con $h_1(z) \neq 0,\ h_2(z) \neq 0$ en una vecindad alrededor de z_0, entonces

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{h_1(z)(z-z_0)^k}{h_2(z)(z-z_0)^k} = \lim_{z\to z_0} \frac{h_1(z)}{h_2(z)}$$

y por la observación anterior sabemos más explícitamente quienes son h_1 y h_2, con lo que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{h_1(z)}{h_2(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!}(z-z_0)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!}(z-z_0)^n} = \lim_{z\to z_0} \frac{\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!}(z-z_0)^n}{\frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!}(z-z_0)^n}$$

y como h_1 y h_2 son analíticas en una vecindad de z_0 estas series convergen de manera uniforme en un disco contenido en esta vecindad, teniendo

$$= \frac{\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!}(z-z_0)^n}{\lim\limits_{z\to z_0} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!}(z-z_0)^n} = \frac{\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \sum_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{z\to z_0} \frac{f^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!}(z-z_0)^n}{\frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} + \sum_{n=0}^{\infty} \lim\limits_{z\to z_0} \frac{g^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!}(z-z_0)^n}$$

$$= \frac{\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \sum_{n=1}^{\infty} 0}{\frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} + \sum_{n=0}^{\infty} 0} = \frac{\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}}{\frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)}$$

$\therefore \lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)}$ y así z_0 es una discontinuidad removible. ■

Problema 10. – *Decimos que f tiene una singularidad aislada en* ∞ *si la función* $g(z) = f(\frac{1}{z})$ *tiene una singularidad aislada en 0. Decimos que* ∞ *es una singularidad removible, de tipo polo de orden k o esencial de f, si 0 es una singularidad removible, de tipo polo de orden k o esencial de g, respectivamente. Pruebe que si una función entera que tiene un polo de orden k en* ∞, *entonces es un polinomio.*

Demostración: Sea f una función entera con polo de orden k en ∞. Como es entera entonces existe su serie de Taylor para todo punto, en particular para el 0 siendo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Con lo que $f(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\frac{1}{z})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ en $D(0,R)\ \forall R > 0$.

Ahora por definición como f tiene un polo de orden k en ∞ entonces $f(\frac{1}{z})$ tiene un polo de orden k en 0, con lo que existe su representación en serie de Laurent alrededor del 0 con la parte singular truncada en k $\Rightarrow$ $f(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{k} \frac{c_n}{z^n}$ en $\mathbb{C} - D(0,r)\ \forall r > 0$, esto implica que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{k} \frac{c_n}{z^n}$ y esto solo es posible si la serie de la izquierda es finita $\therefore$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{z^n}$, entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n$ $\therefore$ es un polinomio de grado k. $\blacksquare$