MATEMÁTICAS

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Variable Compleja II

Tarea 1

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera y Francisco Javier Alvarado Cabrera

---

Problema 1. –

Vale (2.0) Determine si las siguientes afimaciones son verdaderas o falsas:

a) si β es real positivo, entonces $\mathrm{Ln}(\beta z) = \mathrm{Ln}\beta + \mathrm{Ln}z$, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

b) Todos los puntos sobre una rama son puntos de ramificación (Branch-points).

c) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es diferenciable en sentido real, entonces f es derivable en sentido complejo.

d) Sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones complejas tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge a un función g. Si f_n es continua para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces g es continua.

Demostración:

a) *Verdadero.*

Sea $\beta \in \mathbb{R}^+$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sabemos que el argumento principal cumple que $\mathrm{Arg}(\beta z) = \mathrm{Arg}(z)$, entonces

$$\mathrm{Ln}(\beta z) = \ln|\beta z| + \mathrm{Arg}(\beta z) = \ln|\beta||z| + \mathrm{Arg}(z) = \ln|\beta| + \ln|z| + \mathrm{Arg}(z) = \ln\beta + \mathrm{Ln}(z)$$

y como $\mathrm{Arg}(\beta) = 0$ se tendrá que $\mathrm{Ln}\beta = \ln\beta$ con lo que se obtiene lo pedido.

∎

b) *Falso.*

Esto es falso por la propia definición de Branch-points, ya que un punto es de ramificación si y solo si pertenece a todos los cortes de rama. Por lo que es falso que cualquier punto en una rama sea de ramificación.

∎

c) *Falso.*

Tomemos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x, -x)$ dicha función es diferenciable en el sentido real, sin embargo, se tiene que $u_x = 1 \neq 0 = v_y$ por lo que no cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann por lo que no es diferenciable en sentido complejo

∎

d) *Falso.*

■

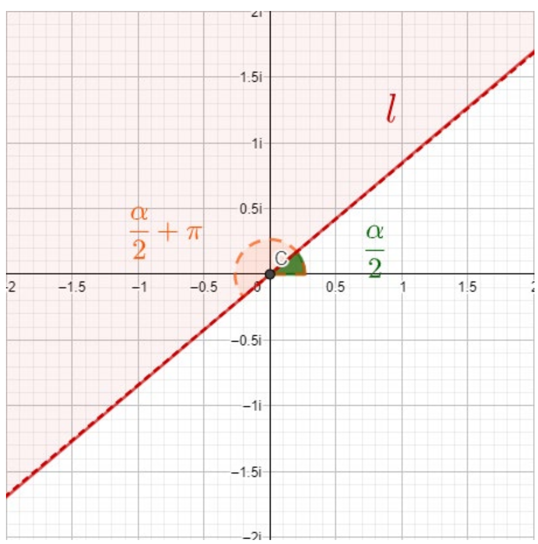
Problema 2. –

a) Seleccione la rama de $f(z) = \sqrt{z}$ tal que $\mathrm{Re}\,(f(z)) < 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y determine la región en la cual la función es analítica (holomorfa).

b) Determine el corte de rama de la función $f(z) = \sqrt{z^2 - a^2}$, a real positivo. La raiz cuadrada corresponde a la rama principal. Determine la región en la cual la función es analítica (holomorfa)

Demostración:

a) Recordemos que en general, tomando la rama-α del argumento la función raíz viene dada por $f(z) = \sqrt{|z|}\exp(i\frac{\arg_\alpha(z)}{2})$, con lo que la imagen de la raíz es precisamente aquellos números complejos tales que $\frac{\alpha}{2} \leq \arg(z) < \frac{\alpha}{2} + \pi$, siendo uno de los semiplanos definidos por la recta $l = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) = \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} + \pi\}$ como se muestra en la figura.

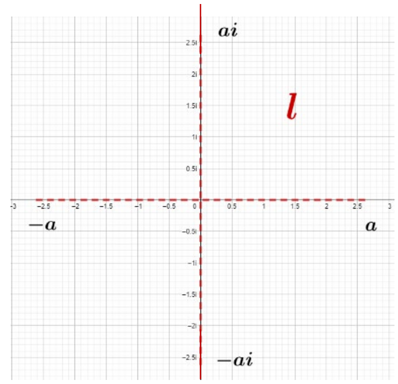


Ahora, yo quiero que $\mathrm{Re}(f(z)) \leq 0$ es decir, necesito que $\arg(f(z)) \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, entonces nos basta tomar $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Con ello la función será holomorfa en $\mathbb{C} - l_\alpha$ (los complejos excepto el corte de rama).

■

b) Sea $a \in \mathbb{R}^+$, entonces $f(z) = \sqrt{z^2 - a^2} = \sqrt{|z^2 - a^2|}\exp(i\frac{\mathrm{Arg}(z^2-a^2)}{2})$ por lo que el corte de rama será donde $\mathrm{Arg}(z^2 - a^2)$ es discontinua, siendo $l = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z^2 - a^2) = -\pi\}$.

Sea $z \in l$, entonces $\arg(z^2 - a^2) = -\pi \Rightarrow \; z^2 - a^2 \in \mathbb{R}^-$ y es tal que $z^2 - a^2 < 0$ entonces $z^2 < a^2$ (esto pues necesariamente $z^2 \in \mathbb{R}$, pues de no serlo no se tendría que $z^2 - a^2 \in \mathbb{R}^-$ ya que $a \in \mathbb{R}^+$), entonces tenemos dos opciones, $z \in \mathbb{R}$ o $z \in \mathbb{C}$, en el primer caso tendremos que $|z| < a$ y para el segundo como $z^2 \in \mathbb{R}$ la única posibilidad es que $z = ib$ con $b \in \mathbb{R}$, esto pues $z^2 = -b^2$ y entonces $z^2 - a^2 < 0$. Con lo que el corte de rama será



$$l = \{z \in \mathbb{C} : z = t \;\vee\; z = ib, \text{ con } t \in (-a, a) \text{ y } b \in \mathbb{R}\}$$

y justo la región donde la función es analítica será $\mathbb{C} - l$.

■

Problema 3. –

Vale (1.5) Evalue en cada caso la integral compleja dada

$a)$ $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z+5}$, C circunferencia de centro en i y radio 3

$b)$ $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^2(z-i)^3}$ donde C es el rectangulo de vertices $z = -1-i$, $z = 2+2i$, $z = -1+2i$, $z = 2-i$ recorrido en sentido positivo.

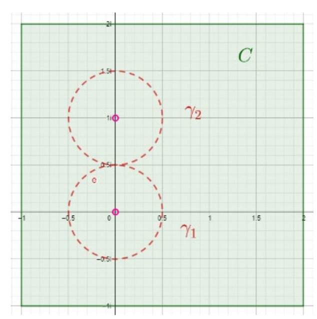
$c)$ $\displaystyle\int_C \operatorname{Ln} z \, dz$ donde C viene parametrizada por $\gamma(t) = e^{it}$, $-\frac{3\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$

Demostración:

$a)$ Notemos que $-5 \notin \overline{\operatorname{int} C}$, pues $|-5 - i| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} > 3$, entonces la función $f(z) = \frac{1}{z+5}$ es analítica en $\overline{\operatorname{int} C}$ con lo que, por el teorema de Cauchy $\int_C f(z)dz = 0$.

■

$b)$ Por el teorema de la deformación tendremos que $\int_C \frac{dz}{z^2(z-i)^3} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2(z-i)^3} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2(z-i)^3}$, donde $\gamma_1(t) = \frac{1}{2}e^{it}$ y $\gamma_1(t) = i + \frac{1}{2}e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi)$ pues la función $z \to \frac{1}{z^2(z-i)^3}$ es analítica en $\operatorname{int}(C) \cap [\operatorname{ext}(\gamma_1) \cup \operatorname{ext}(\gamma_1)]$ ya que $0, i \notin \operatorname{int}(C) \cap [\operatorname{ext}(\gamma_1) \cup \operatorname{ext}(\gamma_1)]$.



Para la primera integral, tenemos que $\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2(z-i)^3} = \int_{\gamma_1} \frac{[1/(z-i)^3]}{z^2} dz$ y notemos que la función $f(z) = \frac{1}{(z-i)^3}$ es analítica en $\overline{\operatorname{int} \gamma_1}$ con lo que por la formula integral de cauchy tendremos que

$$\int_{\gamma_1} \frac{[1/(z-i)^3]}{z^2}dz = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{(z-0)^{1+1}}dz = \frac{2\pi i}{1!}f'(0) = 2\pi i \cdot [-\frac{3}{(0-i)^4}] = -6\pi i$$

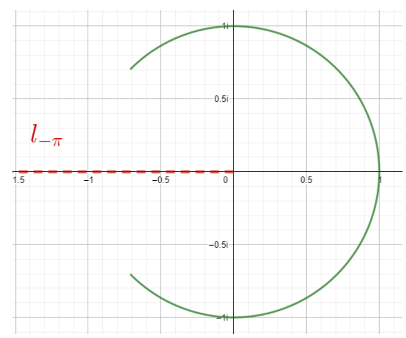
Para la segunda integral, tenemos que $\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2(z-i)^3} = \int_{\gamma_2} \frac{[1/z^2]}{(z-i)^3}dz$ y notemos que la función $f(z) = \frac{1}{z^2}$ es analítica en $\overline{\operatorname{int}\gamma_2}$ con lo que por la formula integral de cauchy tendremos que

$$\int_{\gamma_2} \frac{[1/z^2]}{(z-i)^3}dz = \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{(z-i)^{2+1}}dz = \frac{2\pi i}{2!}f^{(2)}(i) = \pi i \cdot [\frac{6}{i^4}] = \pi i \cdot [\frac{6}{1}] = 6\pi i$$

por lo tanto $\int_C \frac{dz}{z^2(z-i)^3} = 0$.

■

c) Recordemos que $f(z) = \operatorname{Ln} z$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus l_{-\pi}$, y además $f'(z) = \frac{1}{z}$ para $z \in \mathbb{C} \setminus l_{-\pi}$. Con ello dado que $C \subseteq \mathbb{C} \setminus l_{-\pi}$ entonces la integral existe y



$$\int_C \operatorname{Ln} z dz = \int_{-3\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{Ln}(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

$$= \int_{-3\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{Ln}(e^{it})ie^{it}dt = i\int_{-3\pi/4}^{3\pi/4} [\ln|e^{it}| + \operatorname{Arg}(e^{it})]e^{it}dt$$

y como $t \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \subseteq (-\pi, \pi)$ se tiene que $\operatorname{Arg}(e^{it}) = t$, entonces

$$\int_C \operatorname{Ln} z dz = i\int_{-3\pi/4}^{3\pi/4} [\ln|1| + t]e^{it}dt = i\int_{-3\pi/4}^{3\pi/4} te^{it}dt = [e^{it}(1-it)]_{-3\pi/4}^{3\pi/4}$$

$$= i[e^{i(3\pi/4)}(1-i(3\pi/4))] - i[e^{i(-3\pi/4)}(1-i(-3\pi/4))] = i[e^{i(3\pi/4)}(1-i(3\pi/4))] - i[e^{i(-3\pi/4)}(1-i(-3\pi/4))]$$

$$= i(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(1-i(3\pi/4)) - i(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(1+i(3\pi/4)) = i(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(1-i(3\pi/4)) - i\overline{(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(1-i(3\pi/4))}$$

$$= i \cdot 2i\operatorname{Im}[(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(1-i(3\pi/4))] = -2[(-\frac{1}{\sqrt{2}})(-3\pi/4) + (\frac{1}{\sqrt{2}})(1)]$$

$$-2[\frac{3\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}] = -\frac{3\pi+4}{2\sqrt{2}}$$

■

Problema 4. –
vale(1.5) Determine las relaciones entre las constantes a, b, c para que la funcion

$$f(z) = e^x \cos(ay) + i e^x \sin(y+b) + c$$

sea entera y use la derivada real para calcular la derivada compleja:

Demostración: Tenemos que $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ donde $u(x,y) = e^x \cos(ay) + c$ y $v(x,y) = e^x \sin(y+b)$. Para que la función sea entera tendría que ser diferenciable en todo $\mathbb{C}$ (pues entonces será analítica en cualquier punto). Sabemos que u y v son funciones $\mathbb{R}^2$ diferenciables entonces veamos si existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Necesitamos que $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ entonces

$$\begin{matrix} e^x \cos(ay) = e^x \cos(y+b) \\ -e^x \sin(ay)a = -[e^x \sin(y+b)] \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \cos(ay) = \cos(y+b) \\ a\sin(ay) = \sin(y+b) \end{matrix}$$

notemos que $\cos(y+b)$ me representa una traslación del coseno sobre la onda, con lo que su amplitud siempre será 1 y $\cos(ay)$ es un cambio de longitud de onda, con lo que la única manera en que $\cos(ay) = \cos(y+b)$ es qué $a = \pm 1$ pues así la longitud de ambas serán iguales. Con ello obtenemos que

$$\begin{matrix} \cos(\pm y) = \cos(y+b) \\ \pm\sin(\pm y) = \sin(y+b) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \cos(y) = \cos(y+b) \\ \sin(y) = \sin(y+b) \end{matrix}$$

esto último pues seno es impar y coseno es par. Y como las funciones trigonométricas son periódicas, se tiene que $b = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ son solución de este sistema. Por lo que las constantes a, b y c tales que f sea entera son $a = \pm 1, b = 2\pi k$ y $c \in \mathbb{R}$.

Y entonces dados a, b y c de la manera anterior mencionada, se tendrá que la derivada viene dada por

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos(ay) + ie^x \sin(y+b)$$

∎

Problema 5. –

Vale (3.0) Sea $P(x)$ polinomio con coeficientes reales cualquiera de grado m. Sea $Q(x)$ un polinomio con coeficientes reales de grado n con $n > m+1$ y tal que sus raices son no reales. Demuestre que:

a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz$$

donde P y Q son los polinomio extendidos a todo el plano complejo y S_R la curva cerrada en sentido positivo formada por la semicircunferencia de radio R y el segmento de recta sobre el eje real que va desde $-R$ a R. (Sugerencia: limite cuando $R \to \infty$ de $P_1(R)/P_2(R)$ es cero siempre que el grado de P_1 sea menor que el de P_2).

b) Use el resultado anterior y la formula integral de Cauchy para calcular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx$$

Demostración:

a) Sean $P(z) = a_m z^m + \cdots + a_0$ y $Q(z) = b_n z^n + \cdots + b_0$. Consideremos C_R la media circunferencia de radio R que va desde R a -R y sea l_R el segmento de recta en los números reales que va desde -R a R entonces tendremos que $S_R = C_R + l_R$ orientada en sentido positivo. De esta manera:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = \lim_{R\to\infty}\left[\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz + \int_{l_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz\right]$$

PD $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0$.

En efecto sea $z \in C_R$, recordando la desigualdad del triángulo generalizada y su anti desigualdad se tiene que $|c_1| - \cdots - |c_n| \le |c_1 + \cdots + c_n| \le |c_1| + \cdots + |c_n| \quad \forall c_i \in \mathbb{C}$ con lo que

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = \left|\frac{a_m z^m + \cdots + a_0}{b_n z^n + \cdots + b_0}\right| = \frac{|a_m z^m + + \cdots + a_0|}{|b_n z^n + \cdots + b_0|} \le \frac{|a_m z^m + + \cdots + a_0|}{|b_n z^n| - \cdots - |b_0|}$$
$$\le \frac{|a_m z^m| + \cdots + |a_0|}{|b_n z^n| - \cdots - |b_0|} = \frac{|a_m||z|^m + \cdots + |a_0|}{|b_n||z|^n - \cdots - |b_0|}$$

y como $z \in C_R$ se tendrá que $|z| = R$, entonces

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{|a_m|R^m + \cdots + |a_0|}{|b_n|R^n - \cdots - |b_0|}$$

con ello podemos demostrar lo que queremos. Por lo visto en clase se tiene que

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz\right| \leq \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right||dz| \leq \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{|a_m|R^m + \cdots + |a_0|}{|b_n|R^n - \cdots - |b_0|}|dz|$$

$$\leq \lim_{R\to\infty}\frac{|a_m|R^m + \cdots + |a_0|}{|b_n|R^n - \cdots - |b_0|}\int_{C_R}|dz| = \lim_{R\to\infty}\frac{|a_m|R^m + \cdots + |a_0|}{|b_n|R^n - \cdots - |b_0|}long(C_R)$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{|a_m|R^m + \cdots + |a_0|}{|b_n|R^n - \cdots - |b_0|}\pi R = \lim_{R\to\infty}\frac{|a_m|R^{m+1} + \cdots + |a_0|R}{|b_n|R^n - \cdots - |b_0|}$$

y por resultados de calculo

$$\lim_{R\to\infty}\frac{|a_m|R^{m+1} + \cdots + |a_0|R}{|b_n|R^n - \cdots - |b_0|} = 0 \text{ ya que } n > m+1$$

por lo tanto, $\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz\right| \leq 0 \;\Rightarrow\; \lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz\right| = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz = 0$.

Con ello tendremos que

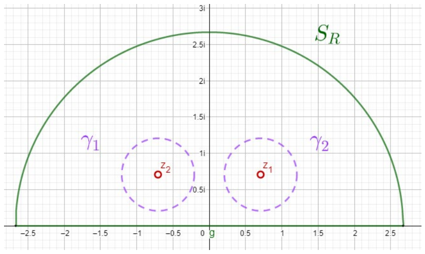
$$\lim_{R\to\infty}\int_{S_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz = \lim_{R\to\infty}\left[\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz + \int_{l_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz\right] = \lim_{R\to\infty}\int_{l_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

quedando demostrado.

■

b) Consideremos $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx$ por el inciso anterior dado que $grad(x^4+1) > 1$ tendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{S_R}\frac{1}{z^4+1}dz$$



y consideremos $R > 1$ con lo que $z_1 = \exp(\frac{\pi}{4}i)$ y $z_2 = \exp(\frac{3\pi}{4}i)$ pertenecen al interior de S_R (puntos donde la función es discontinua), y entonces por el teorema de la deformación tendremos que

$$\int_{S_R} \frac{1}{z^4+1}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z^4+1}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^4+1}\,dz$$

donde γ_1 es la circunferencia de radio $\frac{1}{2}$ y dentro en z_2 y γ_2 es la circunferencia de radio $\frac{1}{2}$ y dentro en z_1. Para ambas integrales tenemos que $z^4+1=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$ donde $z_k=\exp(\frac{\pi}{4}i+\frac{\pi}{2}ik)$ raíces de z^4+1. Entonces para la primera integral

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^4+1}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{z-z_2}\,dz \text{ donde } g(z)=\frac{1}{(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)}$$

y como g es analítica dentro y sobre γ_1, tenemos por la formula integral de cauchy que

$$\int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{z-z_2}\,dz = 2\pi i g(z_2)$$

y de manera análoga para la segunda integral

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z^4+1}\,dz = \int_{\gamma_2} \frac{h(z)}{z-z_1}\,dz \text{ donde } h(z)=\frac{1}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$$

y como h es analítica dentro y sobre γ_2, tenemos por la formula integral de cauchy que

$$\int_{\gamma_2} \frac{h(z)}{z-z_1}\,dz = 2\pi i h(z_1)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int_{S_R} \frac{1}{z^4+1}\,dz &= 2\pi i[g(z_2)+h(z_1)] = 2\pi i[\tfrac{1}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)} + \tfrac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}] \\
&= 2\pi i[\tfrac{1}{(z_2-z_1)(z_2+z_1)(z_2+z_2)} + \tfrac{1}{(z_1-z_2)(z_1+z_1)(z_1+z_2)}] = 2\pi i[\tfrac{1}{(z_2-z_1)(z_2+z_1)2z_2} + \tfrac{1}{-(z_2-z_1)2z_1(z_1+z_2)}] \\
&= 2\pi i[\tfrac{1}{(z_2-z_1)(z_2+z_1)2z_2} - \tfrac{1}{(z_2-z_1)2z_1(z_1+z_2)}] = 2\pi i[\tfrac{z_1-z_2}{(z_2-z_1)(z_2+z_1)2z_2z_1}] \\
&= 2\pi i[\tfrac{-1}{(z_2+z_1)2z_2z_1}] = 2\pi i[\tfrac{-1}{\sqrt{2}i2z_2z_1}] = \frac{2\pi i}{2\sqrt{2}i}[-\tfrac{1}{z_2z_1}] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}[-\tfrac{1}{(-1)}] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{1}{z^4+1}\,dz = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

■