Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

CIENCIAS

Variable Compleja II

Tarea 10

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera y Francisco Javier Alvarado Cabrera

---

Problema 1. –

vale(2.0) Determine si las siguientes afimaciones son verdaderas o falsas:

a) Existe una función analítica e invertible $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, con $f(\mathbb{C}) = \mathbb{D}$. Es decir, es posible deformar a $\mathbb{C}$ en el disco $\mathbb{D}$ con una homeomorfismo que preserva ángulos.

b) La longitud hiperbolica de una rayo que une al origen con un punto del disco $\mathbb{D}$ cuya distancia euclidiana es r viene dada por:

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r}$$

c) Si $\alpha \in [0, 2\pi)$ and $z_0 \in \mathbb{D}$ entonces

$$f(z) = e^{\alpha i}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}$$

es un automorfismo de $\mathbb{D}$ en si mismo. Esto es f es anaítica e invertible con $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$

d) Sea $\Omega \in \mathbb{C}$ conjunto simplemente conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica e invertible entonces $f(\Omega)$ es simplemente conexo en $\mathbb{C}$.

Demostración: Sea $x > 1$ fijo.

(a) Falso.

Si $f : \mathbb{C} \to D$ es analítica e invertible tal que $f(\mathbb{C}) = D$ entonces tendremos que f es entera y acotada, pues $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \le 1$ por lo que, por el Teorema de Liouville, f es contante, es decir, $f(z) = c$ para algún $c \in \mathbb{C}$ pero entonces $f(\mathbb{C}) = \{c\} \ne D$ por lo que no puede existir dicha función.

■

(b) Verdadero.

Dem: Sea γ la curva descrita en la hipotesis y $z \in \mathbb{D}$ con $|z| = r$

Asi tenemos que $\gamma(t) = t e^{i\theta}$, $0 < t < r$, $\theta = \arg(z)$ fijo $\Rightarrow dz = e^{i\theta} dt$, $|dz| = |dt|$

$$\Rightarrow \ell_H(\gamma) = \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} = \int_0^r \frac{1}{1-|te^{i\theta}|^2} dt = \int_0^r \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\Big|_0^r = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$ ■

(c) Verdadero.

• $f : D \to D$.

⊙ Si $r_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 0$ y entonces $f(z) = e^{i\alpha} z$ que efectivamente $\forall z \in D$, $|f(z)| = |e^{i\alpha} z| = |e^{i\alpha}||z| < 1$ por lo que $f(z) \in D$.

⊙ Si $r_0 \neq 0$

Sea $z \in D$, tenemos que

$$|f(z)| = \left|e^{i\alpha} \tfrac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}\right| = \left|\tfrac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}\right| \leq 1 \iff |z - z_0| \leq |1 - \overline{z}_0 z| \iff |z - z_0|^2 \leq |1 - \overline{z}_0 z|^2$$
$$\iff |z|^2 - z\overline{z}_0 - \overline{z} z_0 + |z_0|^2 \leq 1 - \overline{z}_0 z - z_0 \overline{z} + |z_0|^2 |z|^2 \iff |z|^2 + |z_0|^2 \leq 1 + |z_0|^2 |z|^2$$
$$\iff |z|^2 - |z_0|^2 |z|^2 \leq 1 - |z_0|^2 \iff |z|^2 [1 - |z_0|^2] \leq 1 - |z_0|^2 \iff |z|^2 \leq 1 \iff |z| \leq 1$$

por lo que $f(z) \in D$.

• f es analítica en D.

Consideremos $z_0 = r_0 e^{\theta_0}$ con $0 \leq r_0 < 1$ y $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, tenemos que:

⊙ Si $r_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 0$ y entonces $f(z) = e^{i\alpha} z$ es analítica.

⊙ Si $r_0 \neq 0$

Sea $z = re^{i\theta} \in D$ con $0 \leq r < 1$ y $\theta \in [0, 2\pi)$,, tenemos que

$$1 - \overline{z}_0 z = 0 \iff 1 = \overline{z}_0 z \iff 1 = r_0 e^{-\theta_0} r e^{\theta} \iff 1 = r_0 r e^{\theta - \theta_0} \iff r_0 r = 1 \text{ y } \theta - \theta_0 = 0$$
$$\iff r = \tfrac{1}{r_0} \text{ y } \theta = \theta_0$$

pero entonces como $0 < r_0 < 1 \Rightarrow \frac{1}{r_0} > 1$ por lo que $r > 1$!!! pero esto no pasa, pues $0 \leq r < 1$ por lo que el denominador de $\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$ no se anula en D, por lo que f es analítica en D.

• Es inyectiva. Sean $z, w \in D$ tal que $f(z) = f(w) \iff e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z} = e^{i\alpha} \frac{w - z_0}{1 - \overline{z}_0 w} \iff \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z} = \frac{w - z_0}{1 - \overline{z}_0 w}$ $\iff (z - z_0)(1 - \overline{z}_0 w) = (w - z_0)(1 - \overline{z}_0 z) \iff z - z\overline{z}_0 w - z_0 + z_0 \overline{z}_0 w = w - w\overline{z}_0 z - z_0 + z_0 \overline{z}_0 z \iff$ $z + z_0 \overline{z}_0 w = w + z_0 \overline{z}_0 z \iff z_0 \overline{z}_0 z - z_0 \overline{z}_0 w - (z - w) = 0 \iff (z - w)[z_0 \overline{z}_0 - 1] = 0 \iff (z - w)(r_0{}^2 - 1) = 0$, pero $r_0 < 1 \Rightarrow r_0{}^2 < 1 \therefore r_0{}^2 - 1 \neq 0$ entonces $z - w = 0 \iff z = w$. Por tanto, es inyectiva.

• Es suprayectiva. Sea $z \in D$ y veamos que $w = \frac{e^{-i\alpha} z + z_0}{1 + \overline{z}_0 e^{-i\alpha} z}$ es tal que $w \in D$ y $f(w) = z$.

Tenemos que

$$|w| = \left|\tfrac{e^{-i\alpha} z + z_0}{1 + \overline{z}_0 e^{-i\alpha} z}\right| \leq 1 \iff |e^{-i\alpha} z + z_0| \leq |1 + \overline{z}_0 e^{-i\alpha} z| \iff |e^{-i\alpha} z + z_0|^2 \leq |1 + \overline{z}_0 e^{-i\alpha} z|^2$$
$$\iff |e^{-i\alpha} z|^2 + e^{-i\alpha} z\overline{z}_0 + e^{i\alpha} \overline{z} z_0 + |z_0|^2 \leq 1 + z_0 e^{i\alpha} \overline{z} + \overline{z}_0 e^{-i\alpha} z + |\overline{z}_0 e^{-i\alpha} z|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad |z|^2 + |z_0|^2 \leq 1 + |\overline{z}_0 z|^2 \quad \Leftrightarrow \quad |z| \leq 1 \text{ (ya lo hicimos arriba)}$$

por tanto $w \in D$. Ahora veamos que efectivamente $f(w) = z$:

$$f(w) = f\left(\frac{e^{-i\alpha}z+z_0}{1+\overline{z}_0 e^{-i\alpha}z}\right) = e^{i\alpha}\frac{\frac{e^{-i\alpha}z+z_0}{1+\overline{z}_0 e^{-i\alpha}z} - z_0}{1-\overline{z}_0\frac{e^{-i\alpha}z+z_0}{1+\overline{z}_0 e^{-i\alpha}z}} = e^{i\alpha}\frac{\frac{e^{-i\alpha}z+z_0-z_0(1+\overline{z}_0 e^{-i\alpha}z)}{1+\overline{z}_0 e^{-i\alpha}z}}{\frac{1+\overline{z}_0 e^{-i\alpha}z-\overline{z}_0(e^{-i\alpha}z+z_0)}{1+\overline{z}_0 e^{-i\alpha}z}}$$
$$= e^{i\alpha}\frac{e^{-i\alpha}z+z_0-z_0(1+\overline{z}_0 e^{-i\alpha}z)}{1+\overline{z}_0 e^{-i\alpha}z-\overline{z}_0(e^{-i\alpha}z+z_0)} = e^{i\alpha}\frac{e^{-i\alpha}z+z_0-z_0-z_0\overline{z}_0 e^{-i\alpha}z}{1+\overline{z}_0 e^{-i\alpha}z-\overline{z}_0 e^{-i\alpha}z-\overline{z}_0 z_0}$$
$$= e^{i\alpha}\frac{e^{-i\alpha}z-z_0\overline{z}_0 e^{-i\alpha}z}{1-\overline{z}_0 z_0} = e^{i\alpha}e^{-i\alpha}z\frac{1-z_0\overline{z}_0}{1-\overline{z}_0 z_0} = z$$

Por lo tanto, por todos los puntos anteriores f es un automorfismo de D en si mismo.

■

(*d*) Falso.

Demi Sea $H = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$ cjl. simplemente conexo y $f(z) = z^3$ analítica e invertible pero $f(H) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ el cual no es simplemente conexo. ■

Problema 2. –

vale(2.0) Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ función armónica (*satisface la ecuación de Laplace*) en una región acotada $\Omega \in \mathbb{R}^2$ y continua en $\overline{\Omega}$. Demuestre que el máximo de $u(x, y)$ en $\overline{\Omega}$ se alcanza en la fronteras de Ω. (Hint: aplique el principio del modulo máximo a e^f con f función analítica conveniente.)

Demostración: Consideremos $g(x+iy) = u_x(x,y) - iu_y(x,y)$ y veamos que es analítica. En efecto, llamando $\tilde{u} = u_x$ y $\tilde{v} = -u_y$ tenemos que

$$\tilde{u}_x = u_{xx} = -u_{yy} = \tilde{v}_y$$
$$\tilde{u}_y = u_{xy} = u_{yx} = -\tilde{v}_x$$

por tanto cumple $C-R$ y además al existir u_{xx} y u_{yy} tendremos que las funciones u_x y u_y son continuas y derivables, por tanto g es $\mathbb{R}^2$ diferenciable, por lo que, g es analítica. Por tanto, puedo definir la función por el teorema de cauchy existe una antiderivada f de g dada por $f(z) = \int_{z_0}^{z} g(w)dw + u(x_0, y_0) = U + iV$ con $z_0 \in \Omega$. Y finalmente veamos que $u = U$. En efecto, tenemos que $f'(z) = U_x - iU_y = g(z) = u_x - iu_y$ por lo que $U_x = u_x$ y $U_y = u_y$ por lo que $U = u + C$, pero, $f(z_0) = u(x_0, y_0) = U(x_0, y_0) + iV(x_0, y_0)$ por lo que $u(x_0, y_0) = U(x_0, y_0)$ entonces $U = u$.

Así sea $h : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por $h(z) = e^{f(z)}$ función analítica (pues f lo es), entonces como Ω es región acotada, tendremos por el principio del módulo máximo $|h|$ alcanza su máximo en $\partial\Omega$, por lo que $|h(z)| = |e^{f(z)}| = e^{\mathrm{Re}(f(z))} = e^{u(x,y)}$ alcanza su máximo en $\partial\Omega$, pero como la exponencial es creciente, entonces $u(x,y)$ alcanza su máximo en $\partial\Omega$.

$\blacksquare$

Problema 3. –

vale(2.0) Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analítica tal que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $f(0) = 0$. Demuestre

a) $|f'(0)| \leq 1$

b) La igualdad ocurre ($|f'(0)| = 1$) si y solo si f es una rotación.

Demostración:

Dem:

(a) Tomemos la función $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$ definida en $\mathbb{D}$.

Claramente g es analítica. Ahora sea $r \in (0,1)$ y $z \in \partial D(0,r) \subseteq \mathbb{D}$

$\Rightarrow |g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{R}$

Ent. por el principio del modulo maximo g alcanza su maximo (mod. b) en $\partial D(0,1)$

Asi $|g(z)| \leq \frac{1}{R}$ $\forall z \in \overline{D(0,r)}$

$\Rightarrow$ si $R \to 1$ $|g(z)| \leq 1$ $\forall z \in \mathbb{D}$ y $\therefore$ $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$ $\blacksquare$

(b) $\Leftarrow]$ Sea $f(z) = e^{i\alpha} z$ con $\alpha \in [0, 2\pi]$ una rotación $\Rightarrow |f'(0)| = 1$

$\Rightarrow]$ S.p. que $|f'(0)| = 1$ $\Rightarrow |g(0)| = 1$ pero $0 \in \operatorname{int} \mathbb{D}$ ent. g alcansa su maximo en el interior de $\mathbb{D}$ asi por el Principio Modulo Maximo g es constante

$\Rightarrow \exists \alpha \in [0, 2\pi)$ t.q. $g(z) = e^{i\alpha}$ y como $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ $\forall z \neq 0$ $\Rightarrow f(z) = z e^{i\alpha}$

ie una rotación $\blacksquare$

Problema 4. –

vale(2.0) Las únicas funciones analíticas e invertibles del disco $\mathbb{D}$ en si mismo

$$f : \mathbb{D} \to f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$$

que preservan el origen ($f(0) = 0$) son rotaciones.

Demostración: Como f es analítica e invertible y tal que $f : D \to D$ con $f(0) = 0$ entonces su inversa $f^{-1} : D \to D$ también es analítica e invertible y tal que $f^{-1}(0) = 0$, por tanto como $|f(z)| \leq 1$ y $|f^{-1}(z)| \leq 1$ entonces por el Lema de Schwarz $|f(z)| \leq |z|$ y $|f^{-1}(z)| \leq |z|$ $\forall z \in D$, con lo que de la segunda $|f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)|$ $\Rightarrow$ $|z| \leq |f(z)| \leq |z|$ $\Rightarrow$ $|f(z)| = |z|$, entonces nuevamente por el lema de Schwarz f es una rotación.

$\blacksquare$

Problema 5. –

vale(2.0) Sea $r \in (0,1)$ fijo y $f(z) = z^2$. Demuestre

$$d_H\big(f(z_0), f(z_1)\big) \leq \frac{2r}{1+r^2} d_H(z_0, z_1)$$

para todo $z_0, z_1 \in \overline{D(0,r)} \subset \mathbb{C}$. Es decir, la función cuadratica es contractiva respecto a la métrica hiperbolica.

Demostración:

Dem: Tenemos que $d_H(f(z_0), f(z_1)) = \ell_H(\beta)$ con β la curva geodesica que une a $f(z_0)$ y $f(z_1)$ y que ademos es la curva de longitud hiperbolica minima.

Asi en particular $\ell_H(\beta) \leq \ell_H(f \circ \gamma)$. [Sup. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{D}$] curva que une z_0 y z_1

$$\Rightarrow \ell_H(\beta) \leq \int_{f \circ \gamma} \frac{|dw|}{1-|w|^2} = \int_a^b \frac{|(f\circ\gamma)'(t)|}{1-|(f\circ\gamma)(t)|^2}\, dt = \int_a^b \frac{2|\gamma(t)||\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^4}\, dt$$

pues $|z| \leq r$

$$= \int_a^b \frac{2|\gamma(t)||\gamma'(t)|}{(1+|\gamma(t)|^2)(1-|\gamma(t)|^2)}\, dt = \int_\gamma \frac{2|z||dz|}{(1+|z|^2)(1-|z|^2)} \leq 2\int_\gamma \frac{r}{1+r^2} \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

$$= \frac{2r}{1+r^2} \int_\gamma \frac{|dz|}{1+|z|^2} = \frac{2r}{1+r^2} d_H(z_0, z_1) \blacksquare$$