Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Variable Compleja II

Tarea 3

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera y Francisco Javier Alvarado Cabrera

---

Problema 1. –

vale(3.0) Determine si las siguientes afimaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$ entonces z_0 es una singularidad removible en $z = z_0$.

b) Sea $R > 0$ entonces

$$\int_0^\pi e^{-R\sin t}\, dt < \frac{\pi}{R}$$

c) Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-a)(z^n-1)} = \frac{1}{1-a^n}$$

para todo $a \in \mathbb{C}$ tal que $|a| > 2$. (usar teorema 2 marzo 14)

Demostración:

a) *Falso.*

El contraejemplo es la función $f(z) = \frac{1}{\sin^2(z)}$ vista en el problema 4*b)* de la tarea anterior, donde demostramos que $\operatorname{Res}(f, \pi) = 0$, sin embargo $z = \pi$ es polo de orden 2.

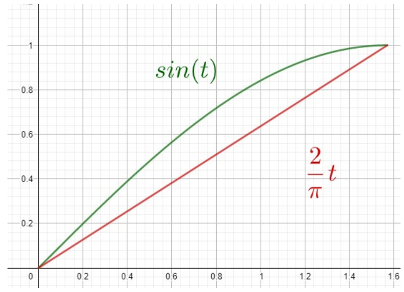
∎

b) *Verdadero.*

Tenemos que $e^{-R\sin(t)}$ es simétrica respecto a la recta $x = \frac{\pi}{2}$, ya que $\sin(x)$ lo es, así:

$$\int_0^\pi e^{-R\sin(t)} dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin(t)} dt$$

ahora, notemos que $\sin(t) \in [0,1]$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ con lo cual la recta $\frac{2}{\pi}t$ esta por debajo de $\sin(t)$, i.e, $\frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \Rightarrow \frac{2R}{\pi}t \leq R\sin(t) \Rightarrow -\frac{2R}{\pi}t \geq -R\sin(t) \Rightarrow e^{-R\sin(t)} \leq e^{-\frac{2R}{\pi}t} \quad \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, por lo que



$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin(t)}dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin(t)}dt \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}t}dt = 2[-\frac{1}{2\frac{R}{\pi}}e^{-\frac{2R}{\pi}t}]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{\pi}{R}[e^{-R} - 1] = \frac{\pi}{R}[e^{-R} - 1]$$

y como $R > 0 \Rightarrow e^{-R} < 0 \Rightarrow 1 - e^{-R} < 1$ por lo que $\int_0^{\pi} e^{-R\sin(t)}dt \leq \frac{\pi}{R}[1 - e^{-R}] < \frac{\pi}{R}$

■

c) *Falso.*

Sea $g(z) = \frac{1}{(z-a)(z^n-1)}$ y notemos que sus singularidades son $z = \zeta_n$ las raíces n-ésimas de la unidad y $z = a$. Ahora, sea γ la circunferencia centrada en 0 y de radio $|a| + 1 > |a| > 2$, entonces tendremos todas las singularidades de g se quedan contendidas en $\operatorname{int}\gamma$ y además dado que no hay ninguna singularidad en el área entre ambas curvas, y sobre las curvas, por el teorema de la deformación se tiene que

$$\int_{|z|=2} g(z)dz = \int_{\gamma} g(z)dz$$

con ello dado que todas las singularidades de g están en $\operatorname{int}\gamma$ por el teorema 2 del día 14 de marzo tenemos

$$\int_{\gamma} g(z)dz = \operatorname{Res}(\frac{1}{z^2}g(\frac{1}{z}), 0)$$

veamos cual será este residuo.

Desarrollando, $\frac{1}{z^2}g(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{(1/z-a)(1/z^n-1)} = \frac{1}{z^2}\frac{z^{n+1}}{(1-az)(1-z^n)} = \frac{z^{n-1}}{(1-az)(1-z^n)}$, y notemos que $z = 0$ es una singularidad removible para g, en efecto:

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z^2}g(\frac{1}{z}) = \lim_{z\to 0}\frac{z^{n-1}}{(1-az)(1-z^n)} = \frac{0}{1} = 0$$

por lo que $\operatorname{Res}(\frac{1}{z^2}g(\frac{1}{z}), 0) = 0$ y así $\int_{|z|=2} g(z)dz = 0$.

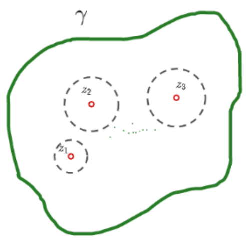
■

Problema 2. –
vale(1.0) Demuestre el teorema del residuo. (Use el teorema de Laurent)

Demostración:
Teorema: Sea γ una curva cerrada simple tal que f sea analítica en $\overline{\operatorname{int}\gamma}$ excepto en un numero finito de puntos $z_1, \ldots, z_n \in \operatorname{int}\gamma$, entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

Vamos a probarlo.



Como f es analítica en $\overline{\operatorname{int}\gamma}$ excepto en $z_1, \ldots, z_n$ podemos tomar coronas $C_0^{R_k}(z_k)$ para cada z_k donde f será analítica, entonces por el Teorema de Laurent existirá una expansión en serie de Laurent alrededor de cada z_k que converge normal y uniformemente y que coincide con f en cada corona. Donde los coeficientes vendrán dados por

$$a_m^{(k)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_k|=r_k} \frac{f(w)}{(w-z_k)^{m+1}}dw \;\Rightarrow\; a_{-1}^{(k)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_k|=r_k} f(w)dw$$

con $0 < r_k < R_k$. Por otro lado como f es analítica en las circunferencias $0 < |z - z_k| < r_k$ y entre estos y γ, entonces por el teorema de la deformación

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{|z-z_k|<r_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i a_{-1}^{(k)} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

■

Problema 3. –
vale(2.0) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $|a| > |b| > 0$. Demuestre

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a + b\cos\theta}\, d\theta = \frac{2\pi}{b^2}(a - \sqrt{a^2 - b^2})$$

(Sugerencia: considere $\alpha = a/b$).

Demostración: **El problema tal como esta es incorrecto, pues se puede comprobar**

por métodos numéricos que si $a<0$ y $b<0$ ambas expresiones no son iguales, aquí daré el resultado correcto.

Sea $z=e^{i\theta} \Rightarrow dz=ie^{i\theta}d\theta$, con $\theta\in[0,2\pi]$ y notemos que entonces

$$\cos(\theta)=\frac{1}{2}[z+\frac{1}{z}] \quad \text{y} \quad \sin(\theta)=\frac{1}{2i}[z-\frac{1}{z}]$$

así

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2(\theta)}{a+b\cos(\theta)}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2(\theta)}{a+b\cos(\theta)}\frac{ie^{i\theta}}{ie^{i\theta}}d\theta=\int_{|z|=1}\frac{(\frac{1}{2i}[z-\frac{1}{z}])^2}{a+b\frac{1}{2}[z+\frac{1}{z}]}\frac{1}{iz}dz$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{-\frac{1}{4}[z-\frac{1}{z}]^2}{aiz+\frac{b}{2}[iz^2+i]}dz=\int_{|z|=1}\frac{-\frac{1}{4}[z-\frac{1}{z}]^2}{a+\frac{b}{2}iz^2+\frac{b}{2}i}dz=\int_{|z|=1}\frac{4z^2}{4z^2}\frac{-\frac{1}{4}[z-\frac{1}{z}]^2}{\frac{b}{2}iz^2+aiz+\frac{b}{2}i}dz$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{-[z^2-1]^2}{4z^2[\frac{b}{2}iz^2+aiz+\frac{b}{2}i]}dz=\int_{|z|=1}\frac{-[z^2-1]^2}{2ibz^2[z^2+2\frac{a}{b}z+1]}dz=-\frac{1}{2ib}\int_{|z|=1}\frac{[z^2-1]^2}{z^2[z^2+2\alpha z+1]}dz$$

llamando $f(z)=\dfrac{[z^2-1]^2}{z^2[z^2+2\alpha z+1]}$ tenemos que es analítica excepto en $z=0$ y donde

$$z^2+2\alpha z+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad z=\frac{-2(\alpha)\pm\sqrt{4(\alpha^2)-4}}{2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-1}=z_1,z_2,$$

veamos cuando es que estas raíces pertenecen a disco unitario. Como $|a|>|b| \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right|>1$

$\Rightarrow \frac{a}{b}>1$ o $\frac{a}{b}<-1 \Rightarrow \alpha>1$ o $\alpha<-1$

- Si $\alpha<-1$. Entonces tendremos que $-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}>1+\sqrt{\alpha^2-1}>1$ y esta raíz no estará en el disco. Por otro lado, tenemos que

$$0<\alpha^2-1<\alpha^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{\alpha^2-1}<|\alpha|=-\alpha$$

y

$$0<\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1} \;\Rightarrow\; 0<2\sqrt{\alpha^2-1} \;\Rightarrow\; 0<1+2\sqrt{\alpha^2-1}-1 \;\Rightarrow\; \alpha^2<1+2\sqrt{\alpha^2-1}+\alpha^2-1$$

$$\Rightarrow\; \alpha^2<(1+\sqrt{\alpha^2-1})^2 \;\Rightarrow\; -\alpha=|\alpha|<1+\sqrt{\alpha^2-1}$$

por lo tanto, concluimos que $\sqrt{\alpha^2-1}<-\alpha<1+\sqrt{\alpha^2-1} \Rightarrow 0<-\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}<1$ por lo que si pertenece al disco unitario.

- Si $\alpha > 1$. Entonces tendremos que $\alpha > 1 \;\Rightarrow\; -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} < -1 - \sqrt{\alpha^2 - 1} < -1$ y esta raíz no estará en el disco. Por otro lado, tenemos que

$$\alpha^2 - 1 < \alpha^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{\alpha^2 - 1} < |\alpha| = \alpha \;\Rightarrow\; -\alpha < -\sqrt{\alpha^2 - 1}$$

y

$$0 < \sqrt{\tfrac{a^2}{b^2} - 1} \;\Rightarrow\; 0 < 2\sqrt{\alpha^2 - 1} \;\Rightarrow\; 0 < 1 + 2\sqrt{\alpha^2 - 1} - 1 \;\Rightarrow\; \alpha^2 < 1 + 2\sqrt{\alpha^2 - 1} + \alpha^2 - 1$$
$$\Rightarrow\; \alpha^2 < (-1 - \sqrt{\alpha^2 - 1})^2 \;\Rightarrow\; \alpha = |\alpha| < 1 + \sqrt{\alpha^2 - 1} \;\Rightarrow\; -1 - \sqrt{\alpha^2 - 1} < -\alpha$$

por lo tanto, concluimos que $-1 - \sqrt{\alpha^2 - 1} < -\alpha < -\sqrt{\alpha^2 - 1} \;\Rightarrow\; -1 < -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} < 0$ por lo que si pertenece al disco unitario.

Por lo tanto, por el teorema del residuo tendremos que

$$\int_{|z|=1} f(z)dz = \begin{cases} 2\pi i[\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,z_1)] & \text{si } \alpha > 1 \\ 2\pi i[\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,z_2)] & \text{si } \alpha < -1 \end{cases}$$

Tenemos que $z = 0$ es un polo de orden 2 para f, pues

$$\lim_{z\to 0} f(z)(z-0)^2 = \lim_{z\to 0} \frac{[z^2-1]^2}{z^2[z^2 + 2\alpha z + 1]} z^2 = \lim_{z\to 0} \frac{[z^2-1]^2}{z^2 + 2\alpha z + 1} = 1 \neq 0$$

por lo que

$$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}[z^2 f(z)] = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[\frac{[z^2-1]^2}{z^2 + 2\alpha z + 1}\right] = \lim_{z\to 0} \frac{2[z^2-1]2z(z^2 + 2\alpha z + 1) - (2z + 2\alpha)[z^2-1]^2}{(z^2 + 2\alpha z + 1)^2}$$
$$= \frac{2[0^2-1]2\cdot 0(0^2 + 2\alpha 0 + 1) - (2\cdot 0 + 2\alpha)[0^2-1]^2}{(0^2 + 2\alpha\cdot 0 + 1)^2} = \frac{-2\alpha}{1} = -2\alpha$$

y $z = z_1, z_2$ son polos simples (en su respectivo caso):

(usamos el hecho de que $P(z) = z^2 + 2\alpha z + 1 = (z - z_1)(z - z_2) \;\Rightarrow\; 1 = P(0) = z_1 z_2$)

$$\lim_{z\to z_1} f(z)(z - z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{[z^2-1]^2}{z^2(z-z_1)(z-z_2)}(z - z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{[z^2-1]^2}{z^2(z-z_2)} = \frac{[z_1{}^2-1]^2}{z_1{}^2(z_1 - z_2)}$$
$$= \frac{[z_1{}^2-1]^2}{z_1{}^3 - z_1{}^2 z_2} \underset{z_1\cdot z_2 = 1}{=} \frac{[z_1{}^2-1]^2}{z_1{}^3 - z_1} = \frac{[z_1{}^2-1]^2}{z_1[z_1{}^2-1]} = \frac{z_1{}^2-1}{z_1} = z_1 - \frac{1}{z_1}$$

Y

$$\lim_{z\to z_2} f(z)(z-z_2) = \lim_{z\to z_2} \frac{[z^2-1]^2}{z^2(z-z_1)(z-z_2)}(z-z_2) = \lim_{z\to z_2} \frac{[z^2-1]^2}{z^2(z-z_1)} = \frac{[{z_2}^2-1]^2}{{z_2}^2(z_2-z_1)}$$

$$= \frac{[{z_2}^2-1]^2}{{z_2}^3-{z_2}^2 z_1} \underset{z_1\cdot z_2=1}{=} \frac{[{z_2}^2-1]^2}{{z_2}^3-z_2} = \frac{[{z_2}^2-1]^2}{z_2[{z_2}^2-1]} = \frac{{z_2}^2-1}{z_2} = z_2 - \frac{1}{z_2}$$

siendo estos limites distintos de cero, entonces el residuo será el mismo que el límite, así:

$$I = -\frac{1}{2bi}\int_{|z|=1} f(z)dz = \begin{cases} -\frac{1}{2bi}[2\pi i(\text{Res}(f,0)+\text{Res}(f,z_1))] \text{ si } \alpha > 1 \\ -\frac{1}{2bi}[2\pi i(\text{Res}(f,0)+\text{Res}(f,z_2))] \text{ si } \alpha < -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2bi}[2\pi i(-2\alpha + z_1 - \frac{1}{z_1})] \text{ si } \alpha > 1 \\ -\frac{1}{2bi}[2\pi i(-2\alpha + z_2 - \frac{1}{z_2})] \text{ si } \alpha < -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi}{b}[2\alpha - z_1 + \frac{1}{z_1}] \text{ si } \alpha > 1 \\ \frac{\pi}{b}[2\alpha - z_2 + \frac{1}{z_2}] \text{ si } \alpha < -1 \end{cases}$$

pero $\frac{1}{z_1} = \frac{z_2}{z_1\cdot z_2} = z_2$ y $\frac{1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2\cdot z_1} = z_1$, entonces

$$I = \begin{cases} \frac{\pi}{b}[2\alpha - z_1 + z_2] \text{ si } \alpha > 1 \\ \frac{\pi}{b}[2\alpha - z_2 + z_1] \text{ si } \alpha < -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi}{b}[2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2-1}] \text{ si } \alpha > 1 \\ \frac{\pi}{b}[2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2-1}] \text{ si } \alpha < -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2\pi}{b}[\frac{a}{b} - \sqrt{(\frac{a}{b})^2-1}] \text{ si } \alpha > 1 \\ \frac{2\pi}{b}[\frac{a}{b} + \sqrt{(\frac{a}{b})^2-1}] \text{ si } \alpha < -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2\pi}{b}[\frac{a}{b} - \frac{1}{|b|}\sqrt{a^2-b^2}] \text{ si } \alpha > 1 \\ \frac{2\pi}{b}[\frac{a}{b} + \frac{1}{|b|}\sqrt{a^2-b^2}] \text{ si } \alpha < -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2\pi}{b^2}[a - \frac{b}{|b|}\sqrt{a^2-b^2}] \text{ si } \alpha > 1 \\ \frac{2\pi}{b^2}[a + \frac{b}{|b|}\sqrt{a^2-b^2}] \text{ si } \alpha < -1 \end{cases}$$

por lo tanto $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(\theta)}{a+b\cos(\theta)}d\theta == \begin{cases} \frac{2\pi}{b^2}[a - \frac{b}{|b|}\sqrt{a^2-b^2}] \text{ si } \frac{a}{b} > 1 \\ \frac{2\pi}{b^2}[a + \frac{b}{|b|}\sqrt{a^2-b^2}] \text{ si } \frac{a}{b} < -1 \end{cases}$

■

Problema 4. –
vale(2.0) Sean $a > b > 0$. Calcule usando residuos:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx$$

Demostración: Primero notemos que la función dentro de la integral es par, por tanto

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx$$

Ahora, si $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{S_R} f(z)dz - \int_{C_R} f(z)dz\right)$$

con S_R y C_R definidas como siempre en clase.

Veamos que pasa con la integral sobre C_R. Tenemos que la función $g(z) = 1\big/[(z^2+a^2)(z^2+b^2)]$ es continua en todo $\mathbb{C}$ excepto en $z = \pm ai, \pm bi$ que es donde no es analítica la función, pero como estamos considerando que $R \to \infty$ podemos tomar R suficiente mente grande tal que $\pm ai,\ \pm bi \notin C_R$, de esta manera tendremos que f es continua en C_R, así por el Lema de Jordan tenemos

$$\int_{C_R} f(z)dz = \int_{C_R} g(z)\cdot e^{iz}dz \le \pi \max_{z\in C_R}\left|g(z)\right| = \pi \max_{z\in C_R}\left|\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\right|$$

$$\text{por lo que } \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty} \pi \max_{z\in C_R}\left|\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\right| = 0$$

por lo tanto, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{S_R} f(z)dz$ y podemos usar el Teorema del Residuo.

Para esto, notemos que $z = ai,\ bi$ son polos simples pues son ceros de orden 1 para $1\big/f$, entonces

- $\operatorname{Res}(f,ai) = \lim\limits_{z\to ai}(z-ai)f(z) = \lim\limits_{z\to ai}\dfrac{e^{iz}}{(z+ai)(z^2+b^2)} = -\dfrac{e^{-a}}{2ai(a^2-b^2)}$ que existe ya que $a > b$
- $\operatorname{Res}(f,bi) = \lim\limits_{z\to ai}(z-bi)f(z) = \lim\limits_{z\to ai}\dfrac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z+bi)} = \dfrac{e^{-b}}{2bi(a^2-b^2)}$ que existe ya que $a > b$

$$\therefore \int_{S_R} f(z)dz = 2\pi i[\operatorname{Res}(f,ai)+\operatorname{Res}(f,bi)] = \frac{\pi}{a^2-b^2}\left(\frac{e^{-b}}{b}-\frac{e^{-a}}{a}\right)$$

$$\therefore I = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\lim_{R\to\infty}\int_{S_R} f(z)dz\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{a^2-b^2}\left(\frac{e^{-b}}{b}-\frac{e^{-a}}{a}\right)\right) = \frac{\pi}{2(a^2-b^2)}\left(\frac{e^{-b}}{b}-\frac{e^{-a}}{a}\right)$$

■

Problema 5. –

vale(3.0) Calcule

a) la transfomada inversa de fourier de la función

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{a+\omega i},$$

donde a es una constante positiva.

b) el valor principal de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\, d\theta$$

Demostración:

a) Por lo visto en clase sabemos que dada una función $\hat{f}(w)$, su inversa respecto a la Transformada de Fourier es

$$f(t) = \mathfrak{I}^{-1}(\hat{f}(w))(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)e^{iwt}dw \;\Rightarrow\; f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a+wi}e^{iwt}dw$$

Tenemos que

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{a+wi}e^{iwt}dw$$

y si consideramos a S_R y C_R como siempre, con R suficientemente grande para que $ai \notin C_R$, obtenemos que

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \left[\int_{S_R} \frac{1}{a+wi} e^{iwt} - \int_{C_R} \frac{1}{a+wi} e^{iwt} \right]$$

pero por el Lema de Jordan, (ya que $\hat{f}(w)$ es analitica en C_R, por la elección de R)

$$\left| \int_{C_R} \frac{1}{a+wi} e^{iwt} \right| \leq \frac{\pi}{t} \max_{w\in C_R} \left| \frac{1}{a+wi} \right| \leq= \frac{\pi}{t} \frac{1}{R-a} \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \left| \int_{C_R} \frac{1}{a+wi} e^{iwt} \right| = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{t} \frac{1}{R-a} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{a+wi} e^{iwt} = 0$$

entonces $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{1}{a+wi} e^{iwt}$. Ahora, dado que $ai \in \operatorname{int} S_R$, por el teorema del residuo tendremos que $\int_{S_R} \frac{1}{a+wi} e^{iwt} dw = 2\pi i \operatorname{Res}(\frac{1}{a+wi} e^{iwt}, ai)$, y se tiene que $z = ai$ es un polo simple, pues

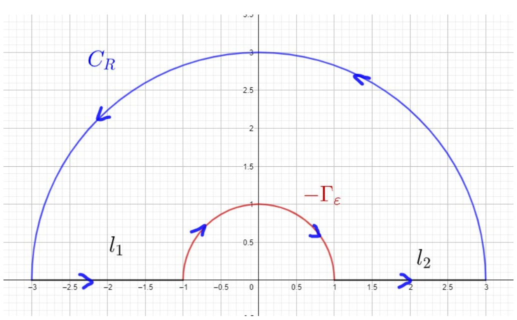
$$\lim_{z\to a_i} \frac{1}{a+wi} e^{iwt} \cdot (w - a_i) = \lim_{z\to a_i} -ie^{iwt} = -ie^{-at} \Rightarrow \operatorname{Res}(ai) = -ie^{-at}$$

por lo tanto $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} 2\pi i[-ie^{-at}] = \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}} e^{-at} = \sqrt{2\pi} e^{-at}$

■

b) Primero notemos que $\int_{-R}^{R} \frac{1-\cos(\theta)}{\theta^2} d\theta = \operatorname{Re} \int_{-R}^{R} \frac{1-e^{i\theta}}{\theta^2} d\theta$ así

$$I = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(\theta)}{\theta^2} d\theta = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1-e^{i\theta}}{\theta^2} d\theta = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} [\int_{-R}^{\varepsilon} \frac{1-e^{i\theta}}{\theta^2} d\theta + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{1-e^{i\theta}}{\theta^2} d\theta]$$



Tomamos la curva cerrada $S_R := C_R + (-\Gamma_\varepsilon) + l_1 + l_2$

y sea $f(z) = \frac{1-e^{iz}}{z^2}$, entonces

$$I = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} [\underbrace{\cancel{\int_{S_R} f(z)dz}}_{0 \text{ pues } f \text{ analitica en } S_R} - \int_{-\Gamma_\varepsilon} f(z)dz - \int_{C_R} f(z)dz]$$

Notemos que $\int_{C_R} f(z)dz = \int_{C_R} \frac{1-e^{iz}}{z^2}dz = \int_{C_R} \frac{1}{z^2}dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2}dz$ y por tanto $\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \underset{R\to\infty}{\to} 0$ por el Lema de Jordan y porque $\left|\int_{C_R} \frac{1}{z^2}dz\right| \leq \frac{\pi}{R}$ $\quad \therefore\ I = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)dz$

$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1-e^{iz}}{z^2}dz$

Ahora sea $z = \varepsilon e^{it},\ 0 \leq t \leq \pi$ entonces $dz = i\varepsilon e^{it}dt$ y así:

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^\pi \frac{1-e^{i\varepsilon e^{it}}}{(\varepsilon e^{it})^2} i\varepsilon e^{it}dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} i\int_0^\pi \frac{1-e^{i\varepsilon e^{it}}}{\varepsilon e^{it}}dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -i\int_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{it}}-1}{\varepsilon e^{it}}dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -i\int_0^\pi \frac{\sum_{k=0}^\infty \frac{(i\varepsilon e^{it})^k}{k!} - 1}{\varepsilon e^{it}}dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} -i\int_0^\pi \frac{\sum_{k=1}^\infty \frac{(i\varepsilon e^{it})^k}{k!}}{\varepsilon e^{it}}dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -i\int_0^\pi \sum_{k=1}^\infty \frac{i^k(\varepsilon e^{it})^{k-1}}{k!}dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -i\int_0^\pi \frac{i}{1!} + \sum_{k=2}^\infty \frac{i^k(\varepsilon e^{it})^{k-1}}{k!}dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} -i\int_0^\pi \frac{i}{1!}dt + \lim_{\varepsilon\to 0^+} -i\int_0^\pi \sum_{k=2}^\infty \frac{i^k(\varepsilon e^{it})^{k-1}}{k!}dt$$

y como la convergencia de $\sum_{k=2}^\infty \frac{i^k(\varepsilon e^{it})^{k-1}}{k!}$ es normal y uniforme, tendremos entonces que

$$I = -i\int_0^\pi idt - i\int_0^\pi \sum_{k=2}^\infty \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{i^k(\varepsilon e^{it})^{k-1}}{k!}dt = -i\pi i - i\int_0^\pi \sum_{k=2}^\infty 0dt = \pi$$

$$\therefore\ P.V\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(\theta)}{\theta^2}d\theta = \pi$$

■