Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Variable Compleja II

Tarea 4

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera y Francisco Javier Alvarado Cabrera

---

Problema 1. –

vale(3.0) Determine si las siguientes afimaciones son verdaderas o falsas:

a) Sea $F(s)$ la transformada de laplace de f, entonces $\overline{F(s)} = F(\overline{s})$.

b) La integral impropia $\int\limits_0^\infty f(x,t)\,dt$ converge uniformemente en Ω ($x \in \Omega$) si y solo si la sucesión $G_n(x) := \int\limits_0^n f(x,t)\,dt$ converge uniformemente en Ω.

c) Sea F analítica en $\Omega_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \alpha\}$. Si $\lim\limits_{|z|\to\infty} F(z) = 0$ en Ω_α entonces

$$\int\limits_{\gamma-\infty i}^{\gamma+\infty i} F(z)e^{tz}\,dz$$

es independiente de $\gamma > \alpha$.

Demostración:

a) *Verdadero.*

En efecto, tenemos que

$$\overline{F(s)} = \overline{\int_0^\infty f(t)e^{-\overline{s}t}dt} \underset{s=x+iy}{=} \overline{\int_0^\infty f(t)e^{-(x+iy)t}dt} = \overline{\int_0^\infty f(t)e^{-x-iyt}dt}$$

$$= \overline{\int_0^\infty f(t)e^{-x}[\cos(-iyt)+i\sin(-iyt)]dt} = \overline{\int_0^\infty f(t)e^{-x}\cos(-iyt)dt + i\int_0^\infty f(t)e^{-x}\sin(-iyt)dt}$$

$$= \int_0^\infty f(t)e^{-x}\cos(-iyt)dt - i\int_0^\infty f(t)e^{-x}\sin(-iyt)dt = \int_0^\infty f(t)e^{-x}[\cos(-iyt) - i\sin(-iyt)]dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)e^{-x}[\cos(iyt) + i\sin(iyt)]dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(x+iy)t}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(x-iy)t}dt$$

$$\int_0^\infty f(t)e^{-\overline{s}t}dt = F(\overline{s})$$

■

b) *Verdadero.*

Tenemos que $G(x)=\int_0^\infty f(x,t)dt$ converge uniformemente en Ω

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \text{ existe } N>0 \text{ tal que } \forall x\in\Omega \text{ si } n\geq N \Rightarrow \left|\int_n^\infty f(x,t)dt\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \text{ existe } N>0 \text{ tal que } \forall x\in\Omega \text{ si } n\geq N \Rightarrow \left|\int_0^n f(x,t)dt-\int_0^\infty f(x,t)dt\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \text{ existe } N>0 \text{ tal que } \forall x\in\Omega \text{ si } n\geq N \Rightarrow \left|G_n(x)-G(x)\right|<\varepsilon$$

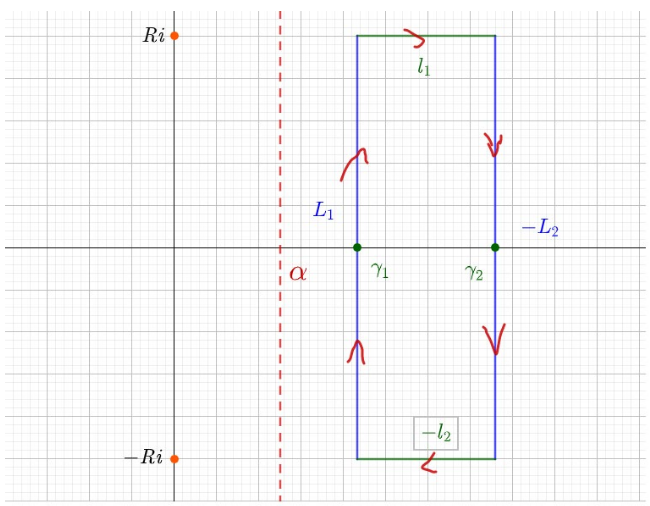
es decir, $G_n(x)$ converge uniformemente a $G(x)$ en Ω.

■

c) *Verdadero.*

Sean $Bw(\gamma,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-\infty i}^{\gamma+\infty i}F(z)e^{tz}dz$ y $\gamma_1,\gamma_2>\alpha$, entonces veremos que $Bw(\gamma_1,t)=Bw(\gamma_2,t)$.

Para esto consideremos la curva $P_R=L_1-L_2+\ell_1-\ell_2$ como se muestra en el siguiente diagrama



Por hipótesis tenemos que $F(z)e^{tz}$ es analítica en Ω_α por lo que es analítica en $\overline{\text{int}\,P_R}$, así por el Teorema de Cauchy se tiene que

$$\int_{P_R}F(z)e^{zt}dz=0 \;\Rightarrow\; \int_{L_1}F(z)e^{zt}dz+\int_{-L_2}F(z)e^{zt}dz+\int_{\ell_1}F(z)e^{zt}dz+\int_{-\ell_2}F(z)e^{zt}dz=0$$

Ahora, veamos que $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\ell_1} F(z)e^{zt}dz = 0 = \lim\limits_{R\to\infty}\int_{\ell_2} F(z)e^{zt}dz$, en efecto, tenemos que

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\ell_1} F(z)e^{zt}dz\right| \leq \lim_{R\to\infty}\int_{\ell_1}\left|F(z)e^{zt}\right|\left|dz\right| = \lim_{R\to\infty}\int_{\ell_1}\left|F(z)\right|\left|e^{zt}\right|\left|dz\right| \leq \lim_{R\to\infty}\int_{\ell_1}\left|F(z)\right|e^{(\gamma_2+Ri)t}\left|dz\right|$$

pues como $z\in\ell_1$ el módulo de z alcanzara su máximo en el extremo derecho, por lo que también lo hará la exponencial, además cuando $R\to\infty$ tendremos que $|z|\to\infty$ también, por lo tanto

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\ell_1} F(z)e^{zt}dz\right| \leq e^{(\gamma_2+Ri)t}\lim_{R\to\infty}\int_{\ell_1}\left|F(z)\right|\left|dz\right| \leq e^{(\gamma_2+Ri)t}\lim_{R\to\infty}\int_{\ell_1} 0\left|dz\right| = 0$$

entonces $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\ell_1} F(z)e^{zt}dz = 0$, análogamente con ℓ_2 obteniendo que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{P_R} F(z)e^{zt}dz = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{R\to\infty}\int_{L_1} F(z)e^{zt}dz - \int_{L_2} F(z)e^{zt}dz = 0 \;\Rightarrow$$
$$\lim_{R\to\infty}\int_{L_1} F(z)e^{zt}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{L_2} F(z)e^{zt}dz \;\Rightarrow\; \int_{\gamma-\infty i}^{\gamma+\infty i} F(z)e^{tz}dz = \int_{\gamma-\infty i}^{\gamma+\infty i} F(z)e^{tz}dz$$
$$\Rightarrow\; Bw(\gamma_1,t) = Bw(\gamma_2,t)$$

■

Problema 2. –

vale(2.0) Sea F analítica en $\Omega_\alpha := \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \alpha\}$ y tomemos $\gamma > \alpha$. Si existen constantes M, r_0 y $k > 1$ tal que

$$|F(z)| \leq \frac{M}{|z|^k}, \text{ si } |z| > r_0.$$

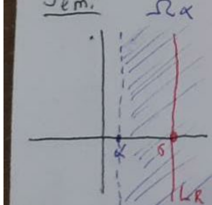
Demuestre que

$$\int_{\gamma-\infty i}^{\gamma+\infty i} F(z)e^{tz}\,dz$$

converge uniformemente en $t\in\mathbb{R}$

Demostración:

Dem:



Tenemos que si $z = \gamma + iy$ con $y\in(-\infty,\infty) \Rightarrow dz = i\,dy$. Así

$$\int_{\gamma-\infty i}^{\gamma+\infty i} F(z)e^{tz}dz = \int_{L_R} F(z)e^{tz}dz = \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma+iy)e^{t(\gamma+iy)}i\,dy$$
$$= ie^{\gamma t}\int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma+iy)e^{tyi}dy$$
$$= ie^{\gamma t}\left[\int_{-\infty}^{0} F(\gamma+iy)e^{tyi}dy + \int_{0}^{\infty} F(\gamma+iy)e^{tyi}dy\right] (*)$$

Ahora sea $y = -w \Rightarrow dy = -dw \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} F(\gamma+iy)e^{tyi} = -\int_{\infty}^{0} F(\gamma-iw)e^{-twi}dw = \int_{0}^{\infty} F(\overline{\gamma+iw})e^{\overline{twi}}dw$

$$= \int_{0}^{\infty} \overline{F(\gamma+iw)}\;\overline{e^{twi}}dw$$

Así, como la integral no depende de la variable.

$$\int_{-\infty}^{0} F(\gamma+iy)e^{tyi}\,dy = \int_{0}^{\infty} \overline{F(\gamma+iy)e^{tyi}}\,dy$$

$$(*) = ie^{\gamma t}\left[\int_0^\infty \overline{F(\gamma+iy)e^{tyi}}\,dy + \int_0^\infty F(\gamma+iy)e^{tyi}\,dy\right]$$

$$= ie^{\gamma t}\left[2\int_0^\infty \mathrm{Re}(F(\gamma+iy)e^{tyi})\,dy\right] = 2ie^{\gamma t}\int_0^\infty \mathrm{Re}(F(\gamma+iy)e^{tyi})\,dy$$

Sea $g(t,y) = \mathrm{Re}(F(\gamma+iy)e^{tyi})$ pd] $\int_0^\infty g(t,y)\,dy$ converge uniformemente en $t\in\mathbb{R}$

- Tenemos que $\forall t\in\mathbb{R}$ $g(t,y)$ es integrable respecto a $y\in\mathbb{R}$.
- $|g(t,y)| = |\mathrm{Re}(F(\gamma+iy)e^{tyi})| \leq |F(\gamma+iy)e^{tyi}| = |F(\gamma+iy)|\,\overset{1}{\cancel{|e^{tyi}|}} \leq \dfrac{M}{|\gamma+iy|^{\kappa}} =: M(y)$

y además $\displaystyle\int_0^\infty M(y)\,dy = \int_0^\infty \frac{M}{|\gamma+iy|^{\kappa}}\,dy = M\int_0^\infty \frac{1}{(\gamma^2+y^2)^{\kappa/2}}\,dy \leq M\int_0^\infty \frac{1}{\gamma^2+y^2}\,dy < \infty$

$\therefore$ Por el test. de weierstrass $\int_0^\infty g(t,y)\,dy$ converge uniformemente para $t\in\mathbb{R}$

$\therefore$ $f(t) = 2ie^{\gamma t}\int_0^\infty g(t,y)\,dy$ converge uniformemente para $t\in\mathbb{R}$ ∎

Problema 3. –

vale(2.0) Sea $f : [0, +\infty)$ continua de orden α exponencial. Demuestre que la función

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

es analítica en la región $\Omega_\alpha = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \alpha\}$

Demostración:

Por lo visto en clase sabemos que $F(s)$ existe y será continua en Ω_α, por lo cual tiene sentido preguntarnos sobre la analiticidad en dicha región.

En efecto, desarrollando

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(x+iy)t}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-x}e^{-iyt}f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-xt}[\cos(-yt) + i\sin(-yt)]f(t)dt = \underbrace{\int_0^\infty e^{-xt}\cos(yt)f(t)dt}_{u(x,y)} + i\underbrace{\int_0^\infty -e^{-xt}\sin(yt)f(t)dt}_{v(x,y)}$$

con lo que solo vasta probar que $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son de clase C^1 y cumplen C-R.

• Para $u(x,y)$.

Sea $g_1(x,t)=e^{-xt}\cos(yt)f(t)$ y consideremos $\frac{\partial}{\partial x}g_1(x,t)$ entonces tenemos que para cada $s\in\Omega_\alpha \Rightarrow x>\alpha$ la función será integrable respecto a t (pues todo es continuo).

Además, tendremos que $\left|\frac{\partial}{\partial x}g_1(x,t)\right| = \left|-te^{-xt}\cos(yt)f(t)\right| \le e^{-xt}|t||f(t)| \le te^{-xr}Me^{\alpha t} = \underbrace{tMe^{(\alpha-x)t}}_{M(t)}$,

más aun, $\int_0^\infty M(t)dt<\infty$ pues como $x>\alpha \Rightarrow \alpha-x<0$, de esta manera por el Criterio de Weierstrass $u(x,y)$ converge uniformemente respecto a x, con lo que por teorema visto en clase tendemos que $\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}g_1(x,t)dt$ (que igualmente será continua pues $\frac{\partial}{\partial x}g_1(x,t)$ lo es), análogamente obtenemos que $u(x,y)$ converge uniformemente respecto a y y además $\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}g_1(y,t)dt$ (que igualmente será continua pues $\frac{\partial}{\partial y}g_1(y,t)$ lo es)

• Para $v(x,y)$.

Sea $g_2(x,t)=-e^{-xt}\sin(yt)f(t)$ y consideremos $\frac{\partial}{\partial x}g_2(x,t)$ entonces tenemos que para cada $s\in\Omega_\alpha \Rightarrow x>\alpha$ la función será integrable respecto a t (pues todo es continuo).

Además, tendremos que $\left|\frac{\partial}{\partial x}g_2(x,t)\right| = \left|te^{-xt}\sin(yt)f(t)\right| \le |t|e^{-xt}|f(t)| \le te^{-xr}Me^{\alpha t} = \underbrace{tMe^{(\alpha-x)t}}_{M(t)}$, más aun, $\int_0^\infty M(t)dt<\infty$ pues como $x>\alpha \Rightarrow \alpha-x<0$, de esta manera por el Criterio de Weierstrass $u(x,y)$ converge uniformemente respecto a x, con lo que por teorema visto en clase tendemos que $\frac{\partial}{\partial x}v(x,y)=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}g_2(x,t)dt$ (que igualmente será continua pues $\frac{\partial}{\partial x}g_2(x,t)$ lo es), análogamente obtenemos que $v(x,y)$ converge uniformemente respecto a y y además $\frac{\partial}{\partial y}v(x,y)=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}g_2(y,t)dt$ (que igualmente será continua pues $\frac{\partial}{\partial y}g_2(y,t)$ lo es).

Finalmente se cumple C-R, pues

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}g_1(x,t)dt=\int_0^\infty -te^{-xt}\cos(yt)f(t)dt=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}g_2(y,t)dt=\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}g_1(x,t)dt=\int_0^\infty -te^{-xt}\sin(yt)f(t)dt=-\int_0^\infty te^{-xt}\sin(yt)f(t)dt=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

Por lo tanto, $F(s)=u(x,y)+iv(x,y)$ es analítica en Ω_α y además

$$F'(s) = u_x + iv_x = \int_0^\infty -te^{-xt}\cos(yt)f(t)dt + i\int_0^\infty te^{-xt}\sin(yt)f(t)dt$$

$$= -\int_0^\infty te^{-xt}\cos(yt)f(t) - ite^{-xt}\sin(yt)f(t)dt = -\int_0^\infty te^{-xt}[\cos(yt) - i\sin(yt)]f(t)dt$$

$$= -\int_0^\infty te^{-xt}[\cos(-yt) + i\sin(-yt)]f(t)dt = -\int_0^\infty te^{-xt}e^{-iyt}f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty -te^{-st}f(t)dt$$

■

Problema 4. –

vale(1.0) Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Calcule

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[n]{x}\,dx}{(x^2+1)}$$

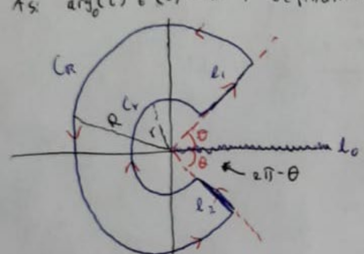
sugerencia: use la rama $\alpha = 0$ para la raiz.

Demostración:

④ Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Calcule $I = \int_0^\infty \frac{\sqrt[n]{x}}{(x^2+1)}dx$

Dem: Para poder calcular esta integral fijemos la rama del argumento en $\alpha = 0$

Así $\arg_0(z) \in [0, 2\pi]$. Definamos la curva cerrada S definida como en el dibujo



Donde $\ell_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) = 0\}$ y C_R, C_r, ℓ_1, ℓ_2:

ℓ_1: $\varphi_1(t) = te^{i\theta}$, $r < t < R$ para θ - Fijo

$-\ell_2$: $\varphi_2(t) = te^{i(2\pi-\theta)}$, $r < t < R$ para θ - Fijo

C_r: $\varphi_3(t) = re^{it}$, $\theta < t < 2\pi - \theta$

C_R: $\varphi_4(t) = Re^{it}$, $\theta < t < 2\pi - \theta$

Así $S := C_R + C_r + \ell_1 + \ell_2$

Por otro lado notemos lo sig: Sea $f(z) = \frac{\sqrt[n]{z}}{z^2+1}$

$$\lim_{\theta\to0^+}\int_{\ell_1} f(z) = \lim_{\theta\to0^+}\int_r^R f(\varphi_1(t))\varphi_1'(t)dt = \lim_{\theta\to0^+}\int_r^R \frac{\sqrt[n]{t}\,e^{\frac{i\theta}{n}}}{t^2e^{2i\theta}+1}e^{i\theta} = \lim_{\theta\to0^+} e^{\frac{i\theta}{n}}e^{i\theta}\int_r^R \frac{\sqrt[n]{t}}{t^2e^{2i\theta}+1}$$

$$= \int_r^R \frac{\sqrt[n]{t}}{t^2+1}dt \quad \therefore \lim_{\substack{\theta\to0^+\\R\to\infty\\r\to0}}\int_{\ell_1} f(z) = I$$

$$\text{Con esto } I = \lim_{\substack{\theta\to0^+\\R\to\infty\\r\to0}}\int_{\ell_1} f(z)dz = \lim_{\substack{\theta\to0^+\\R\to\infty\\r\to0}}\Big[\int_S f(z)dz - \overset{(1)}{\int_{C_R} f(z)dz} - \overset{(2)}{\int_{C_r} f(z)dz} - \int_{\ell_2} f(z)dz\Big]$$

(1) Tenemos que $\left|-\int_{C_R} f(z)dz\right| = \left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leq \int_{C_R}|f(z)|\,|dz| = \int_{C_R}\frac{\sqrt[n]{|z|}}{|z^2+1|} \leq \int_{C_R}\frac{\sqrt[n]{|z|}}{|z|^2-1}$ |d

pero $|z| = R$ ent. $= \int_{C_R}\frac{R^{1/n}}{R^2-1}|dz| = \frac{R^{1/n}}{R^2-1}\int_{C_R}|dz| = \frac{R^{1/n}}{R^2-1}(2\pi-\theta)R$

$\therefore \left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \longrightarrow 0$ si $R \to \infty$ $\therefore \lim_{\substack{\theta\to0^+\\R\to\infty\\r\to0}}\int_{C_R} f(z)dz = 0$

(2) Analogamente $\left|\int_{C_r} f(z)dz\right| \leq \frac{r^{1/n}}{r^2-1}(2\pi-\theta)r$ $\therefore \left|\int_{C_r} f(z)dz\right| \longrightarrow 0$ si $r \to 0$

$\therefore \lim_{\substack{\theta\to0^+\\R\to\infty\\r\to0}}\int_{C_r} f(z)dz = 0$

En resumen $$I = \lim_{\substack{\theta \to 0^+ \\ R \to \infty \\ r \to 0}} \Big[\overset{(3)}{\int_S f(z)\,dz} + \overset{(4)}{\int_{\ell_2} f(z)\,dz} \Big] \; *$$

(4) Tenemos que $$\lim_{\theta \to 0^+} \int_{\ell_2} f(z)\,dz = \lim_{\theta \to 0^+} - \int_{-\ell_2} f(z)\,dz = \lim_{\theta \to 0^+} - \int_r^R f(\varphi_2(t))\,\varphi_2'(t)\,dt$$

$$= \lim_{\theta \to 0^+} - \int_r^R \frac{\sqrt[n]{t}\, e^{\frac{i(2\pi - \theta)}{n}}}{t^2 e^{2i(2\pi-\theta)} + 1} e^{i(2\pi-\theta)}\,dt$$

$$= - e^{\frac{2\pi}{n} i} \int_r^R \frac{\sqrt[n]{t}}{t^2+1}\,dt$$

$$\therefore \lim_{\substack{\theta \to 0^+ \\ R \to \infty \\ r \to 0}} \int_{\ell_2} f(z)\,dz = - e^{\frac{2\pi i}{n}} \int_0^\infty \frac{\sqrt[n]{t}}{t^2+1}\,dt = - e^{\frac{2\pi i}{n}} I.$$

(5) Dado que S es una curva cerrada con singularidades de $f(z)$ en $\overline{\operatorname{int}(S)}$ ($z = \pm i$) para θ, r suficientemente chicos y R suficientemente grande, por el Teo. del Residuo

$$\int_S f(z)\,dz = 2\pi i \,[\operatorname{Res}(f,i) + \operatorname{Res}(f,-i)] \quad \text{y con } \pm i \text{ polos simples.}$$

- $\operatorname{Res}(f,i) = \lim_{z \to i} (z-i) f(z) = \dfrac{\sqrt[n]{i}}{2i}$
- $\operatorname{Res}(f,-i) = \lim_{z \to -i} (z+i) f(z) = \dfrac{\sqrt[n]{-i}}{-2i}$

$$\therefore \int_S f(z)\,dz = \frac{2\pi i}{2i}\left(\sqrt[n]{i} - \sqrt[n]{-i}\right) \quad \text{pero } i = e^{\frac{\pi}{2} i} \text{ y } -i = e^{\frac{3\pi}{2} i} \text{ en }).$$

$$= \pi\left(e^{\frac{\pi}{2n} i} - e^{\frac{3\pi}{2n} i}\right) = \pi e^{\frac{\pi}{2n} i}\left(1 - e^{\frac{\pi}{n} i}\right) := q$$

$\therefore$ Tenemos entonces lo siguiente

$$* \; I = q + e^{\frac{2\pi i}{n}} I \Rightarrow I - e^{\frac{2\pi i}{n}} I = q \Rightarrow I\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) = q \;\therefore\; I = \frac{q}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi e^{\frac{\pi}{2n} i}\cancel{\left(1 - e^{\frac{\pi}{n} i}\right)}}{\left(1 + e^{\frac{\pi}{n} i}\right)\cancel{\left(1 - e^{\frac{\pi}{n} i}\right)}} = \frac{\pi e^{\frac{\pi}{2n} i}}{1 + e^{\frac{\pi}{n} i}} \quad \text{pero} \quad \frac{1 + e^{\frac{\pi}{n} i}}{e^{\frac{\pi}{2n} i}} = \frac{e^{0i} + e^{\frac{\pi}{n} i}}{e^{\frac{\pi}{2n} i}} = e^{-\frac{\pi}{2n} i} + e^{\frac{\pi}{2n} i} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$\therefore I = \pi \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \quad \therefore\; I = \frac{1}{2}\pi \sec\left(\frac{\pi}{2n}\right) \; ■$$

Todo esto es para $n > 1$, pues si $n = 1$ por criterios de calculo 2 la integral diverge.

Problema 5. –

vale(2.0) Calcule la transformada inversa de laplace en cada caso usando la integral de Bromwich

a) $F(s) = \dfrac{e^{-\sqrt{s}}}{s}$ b) $f(z) = \dfrac{s^2 - a^2}{(s^2+a^2)^2}$

Demostración:

a) Consideremos la rama principal y $s \in \Omega_1 = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$, siendo donde el semiplano donde F es analítica, pues $s = 0 \notin \Omega_0$. Notemos que $\overline{F(s)} = \overline{\dfrac{e^{-\sqrt{s}}}{s}} = \dfrac{\overline{e^{-\sqrt{s}}}}{\overline{s}} = \dfrac{e^{-\overline{\sqrt{s}}}}{\overline{s}} = \dfrac{e^{-\sqrt{\overline{s}}}}{\overline{s}} = F(\overline{s})$. Por otro lado, se tiene

$$|F(s)| = \left|\frac{e^{-\sqrt{s}}}{s}\right| = \frac{\left|e^{-\sqrt{s}}\right|}{|s|} = \frac{e^{\mathrm{Re}(-\sqrt{s})}}{|s|} = \frac{e^{-\mathrm{Re}(\sqrt{s})}}{|s|}$$

y como $\lim\limits_{s\to\infty} -\mathrm{Re}(\sqrt{s}) = -\infty$ tendremos que $\lim\limits_{s\to\infty} e^{-\mathrm{Re}(\sqrt{s})} = 0$, con lo que dada $M > 0$ existe r_0 tal que si $|s| > r_0$ entonces $e^{-\mathrm{Re}(\sqrt{s})} < M$, con ello

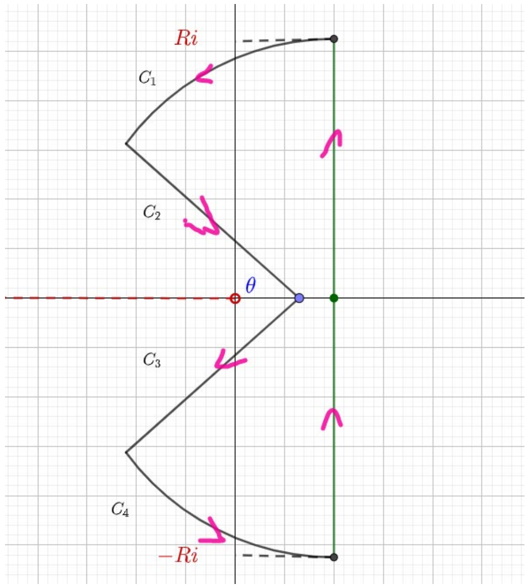
$$|F(s)| = \frac{e^{-\mathrm{Re}(\sqrt{s})}}{|s|} < \frac{M}{|s|}$$

por lo que, por el teorema visto en clase $\int_{\gamma-\infty i}^{\gamma+\infty i} F(s)e^{ts}dt$ converge uniformemente ($\gamma > 1$) y además $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\gamma + yi)|\,dy < \infty$. Con esto podemos sabremos que entonces la transformada inversa de Laplace de $F(s)$ vendrá dada por:

$$\mathfrak{I}^{-1}(F(s)) = f(t) = \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} F(z)e^{tz}dz == \lim_{R\to\infty}\int_{1-Ri}^{1+Ri} F(z)e^{tz}dz$$

$$= \lim_{\substack{R\to\infty\\ \theta\to 0^+}} \int_{S_{R,\theta}} F(z)e^{tz}dz - \int_{C_1} F(z)e^{tz}dz - \int_{C_2} F(z)e^{tz}dz - \int_{C_3} F(z)e^{tz}dz - \int_{C_4} F(z)e^{tz}dz$$

Siendo las curvas como el diagrama:



donde consideremos a R suficientemente grande tal que cuando $\theta \to 0^+$, $0 \in \operatorname{int}(S_{R,\theta})$.

⊗ Para S_R.

Se tiene que $F(z)e^{tz}$ es analítica en $\overline{\operatorname{int} S_{R,\theta}}$, por lo que por el teorema de Cauchy $\int_{S_{R,\theta}} F(z)e^{tz}dz = 0$ y entonces $\lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ \theta\to 0^+}} \int_{S_{R,\theta}} F(z)e^{tz}dz = 0$.

⊗ Para C_1 y C_4.

Considerando R suficientemente grande talque cuando $\theta \to 0^+$ se tenga que el corte de rama interseque a $S_{R,0}$ se tiene que $z = -t,\ t \in \mathbb{N}$ es una singularidad removible para $F(z)e^{tz}$, pues dicho limite existe, por lo que nos da igual estos puntos de discontinuidad, de esta manera por el lema de Jordan:

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \theta\to 0^+}} \left| \int_{C_1} F(z)e^{tz}dz + \int_{C_2} F(z)e^{tz}dz \right| = \lim_{R\to\infty} \left| \int_C F(z)e^{tz}dz \right|$$ siendo C la media circunferencia del lado

izquierdo centrada en 1 de radio R $\Rightarrow \lim\limits_{R\to\infty} \left| \int_C F(z)e^{tz}dz \right| \le \dfrac{\pi}{t} e^t \max\limits_{z\in C} |F(z)|$

pero la desigualdad del inicio $|F(s)| < \dfrac{M}{|s|}$ se vale en general para todo $s \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $|s| > r_0$, entonces considerando R suficientemente grande para que $\forall z \in C_R,\ |z| > r_0$, tendremos

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_C F(z)e^{tz}dz \right| \le \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{t} e^t \max_{z\in C} \frac{M}{|z|} = 0$$

Por lo que $\lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ \theta\to 0^+}} \left| \int_{C_1} F(z)e^{tz}dz + \int_{C_2} F(z)e^{tz}dz \right| = 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ \theta\to 0^+}} \int_{C_1} F(z)e^{tz}dz + \int_{C_2} F(z)e^{tz}dz = 0$.

⊗ Para C_2 y C_3.

Notemos que cuando $\theta \to 0^+$, obtendremos un segmento de recta que une a $z=-R+1$ con $z=\frac{1}{2}$, pero el segmento de 0 a $\frac{1}{2}$ se anula, pues ambas líneas rectas tienen sentidos contrarios, quedándonos únicamente el segmento desde $-R+1$ a 0 que no se anula pues esta en el corte de rama de la raíz, es decir,

$$= \lim_{\substack{R\to\infty \\ \theta\to 0^+}} -\int_{C_2} F(z)e^{tz}dz - \int_{C_4} F(z)e^{tz}dz = \lim_{R\to\infty} -\int_{L_1} F(z)e^{tz}dz - \int_{L_2} F(z)e^{tz}dz = *$$

donde L_1 y L_2 vienen parametrizadas por $L_1(w)=w,\; w\in[-R+1,0]$ y $L_2(w)=-w,\; w\in[0,R-1]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\; * &= \lim_{R\to\infty} -\int_{-R+1}^{0} F(w)e^{tw}(1)dw - \int_0^{R-1} F(-w)e^{t(-w)}(-1)dw \\ &= \lim_{R\to\infty} -\int_{-R+1}^{0} \frac{e^{-\sqrt{w}}}{w}e^{tw}dw + \int_0^{R-1} \frac{e^{-\sqrt{-w}}}{-w}e^{t(-w)}dw \end{aligned}$$

sea $x=-w$ por lo que $dx=-dw$, así

$$\begin{aligned} \int_0^{R-1} \frac{e^{-\sqrt{-w}}}{-w}e^{t(-w)}dw &= \int_0^{-R+1} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{x}e^{tx}(-1)dx = \int_{-R+1}^{0} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{x}e^{tx}dx \\ &= \int_{-R+1}^{0} \frac{e^{-\sqrt{w}}}{w}e^{tw}dw \end{aligned}$$

por lo que

$$\lim_{R\to\infty} -\int_{-R+1}^{0} \frac{e^{-\sqrt{w}}}{w}e^{tw}dw + \int_0^{R-1} \frac{e^{-\sqrt{-w}}}{-w}e^{t(-w)}dw = \lim_{R\to\infty} -\int_{-R+1}^{0} \frac{e^{-\sqrt{w}}}{w}e^{tw}dw + \int_{-R+1}^{0} \frac{e^{-\sqrt{w}}}{w}e^{tw}dw$$

………. (Aquí algo salió mal, pero no logramos ver el que) *b)* Sea $s \in \Omega_1 = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > 1\}$, siendo donde el semiplano donde F es analítica, pues $s = 0 \notin \Omega_0$. Notemos que $\overline{F(s)} = \overline{\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}} = \frac{\overline{s^2 - a^2}}{\overline{(s^2 + a^2)^2}} \underset{a\in\mathbb{R}}{=} \frac{\overline{s}^2 - a^2}{(\overline{s}^2 + a^2)^2} = F(\overline{s})$. Por otro lado, se tiene

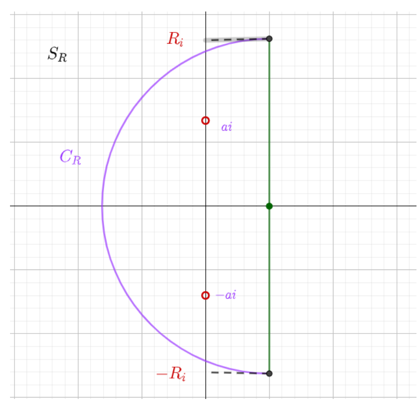
$$\lim_{s\to\infty} |sF(s)| = \lim_{s\to\infty} \left|\frac{s^3 - sa^2}{(s^2 + a^2)^2}\right| = \lim_{s\to\infty} \frac{|s^3 - sa^2|}{|s^4 + 2s^2a^2 + a^4|} = 0$$

con lo que dada $M > 0$ existe r_0 tal que si $|s| > r_0$ entonces $\lim\limits_{s\to\infty} |sF(s)| < M$, con ello

$$|F(s)| < \frac{M}{|s|}$$

por lo que, por el teorema visto en clase $\int_{\gamma-\infty i}^{\gamma+\infty i} F(s)e^{ts}dt$ converge uniformemente ($\gamma > 1$) y además $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\gamma + yi)|\,dy < \infty$. Con esto podemos sabremos que entonces la transformada inversa de Laplace de $F(s)$ vendrá dada por:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}^{-1}(F(s)) = f(t) &= \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} F(z)e^{tz}dz = \lim_{R\to\infty} \int_{1-Ri}^{1+Ri} F(z)e^{tz}dz \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} F(z)e^{tz}dz - \int_{C_R} F(z)e^{tz}dz\end{aligned}$$



donde consideremos a R suficientemente grande tal que $\pm ai \in \text{int}(S_R)$.

Ahora notemos que $z = \pm ai$ son polos de orden 2 para $g(z) = F(z)e^{tz}$, en efecto, pues

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\pm ai} g(z)(z \mp ai)^2 &= \lim_{z\to\pm ai} \frac{z^2 - a^2}{(z^2 + a^2)^2} e^{tz}(z \mp ai)^2 = \lim_{z\to\pm ai} \frac{z^2 - a^2}{(z - ai)^2(z + ai)^2} e^{tz}(z \mp ai)^2 \\ &= \lim_{z\to\pm ai} \frac{z^2 - a^2}{(z \pm ai)^2} e^{tz} = \frac{(\pm ai)^2 - a^2}{((\pm ai) \pm ai)^2} e^{t\pm ai} = \frac{-2a^2}{-4a^2} e^{\pm tai} = \frac{1}{2} e^{\pm tai} \neq 0\end{aligned}$$

con lo cual

$$\mathrm{Res}(g,\pm ai) = \lim_{z\to\pm ai} \frac{d}{dz}[g(z)(z\mp ai)^2] = \lim_{z\to\pm ai} \frac{d}{dz}[\frac{z^2-a^2}{(z\pm ai)^2}e^{tz}]$$

$$= \lim_{z\to\pm ai} \frac{z^2-a^2}{(z\pm ai)^2}te^{tz} + \frac{2z(z\pm ai)^2-2(z\pm ai)(z^2-a^2)}{(z\pm ai)^4}e^{tz} = \frac{-2a^2}{-4a^2}te^{\pm tai} + \frac{2(\pm ai)(-4a^2)-2(\pm 2ai)(-2a^2)}{(-4a^2)^2}e^{\pm tai}$$

$$= \frac{1}{2}te^{\pm tai} + \frac{\mp 8a^3 i \pm 8a^3 i}{16a^4}e^{\pm tai} = \frac{1}{2}te^{\pm tai} + 0e^{\pm tai} = \frac{1}{2}te^{\pm tai}$$

así por el teorema del residuo:

$$\int_{S_R} F(z)e^{tz}dz = 2\pi i[\mathrm{Res}(g,ai)+\mathrm{Res}(g,-ai)] = 2\pi i[\frac{1}{2}te^{tai} - \frac{1}{2}te^{-tai}]$$

$$= 2\pi it[\frac{1}{2}e^{tai} - \frac{1}{2}e^{-tai}] = 2\pi iti[\frac{1}{2i}e^{iat} - \frac{1}{2i}e^{-iat}] = -2\pi t\sin(at)$$

para la integral sobre C_R usando el Lema de Jordan modificado (pues F es continua en C_R) tendremos

$$\left|\int_{C_R} F(z)e^{tz}dz\right| \le \frac{\pi}{t}e^t \max_{z\in C_R}\left|F(z)\right|$$

pero la desigualdad del inicio $\left|F(s)\right| < \frac{M}{|s|}$ se vale en general para todo $s\in\mathbb{C}-\{\pm ai\}$ tal que $|s| > r_0$, entonces considerando R suficientemente grande para que $\forall z\in C_R,\ |z| > r_0$, tendremos

$$\left|\int_{C_R} F(z)e^{tz}dz\right| \le \frac{\pi}{t}e^t \max_{z\in C_R}\left|F(z)\right| \le \frac{\pi}{t}e^t \max_{z\in C_R}\frac{M}{|z|}$$

y entonces $\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R} F(z)e^{tz}dz\right| \le \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{t}e^t \max_{z\in C_R}\frac{M}{|z|} = 0$, por lo que $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(z)e^{tz}dz = 0$, por lo tanto

$$\mathfrak{I}^{-1}(F(s)) = f(t) = \lim_{R\to\infty}\int_{S_R} F(z)e^{tz}dz = \lim_{R\to\infty} -2\pi t\sin(at) = -2\pi t\sin(at)$$

■