MATEMÁTICAS

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

CIENCIAS

Variable Compleja II

Tarea 5

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera y Francisco Javier Alvarado Cabrera

---

Problema 1. –
vale(2.0) Determine si las siguientes afimaciones son verdaderas o falsas:

a) Sea C una curva cerrada . La función Sea $H(z) = I(C, z)$ con $z \notin C$ es constante en cada región determinada por la curva C.

b) Sea C una curva cerrada simple y f, g funciones analíticas en $\overline{\text{int}(C)}$ tal que $|g| < |f|$ sobre C entonces

$$I\left(\frac{g}{f}(C), -1\right) = 0$$

c) Sea f entera tal que

$$\int\limits_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$$

para todo $R > 100$ entonces f es constante.

d) Sea C una curva cerrada. Si $z \neq C$ entonces $I(C, z)$ es un número natural.

Demostración:

a) Verdadero

Consideremos una curva C cerrada, entonces esta la puedo escribir como la unión de todas las curvas cerradas y simples que genera con las auto intersecciones, es decir tenemos lo siguiente:

Lema. –Si C es una curva cerrada, entonces $C = \bigcup_{i \in I} \gamma_i$ donde γ_i es una curva cerrada simple para toda $i \in I$.

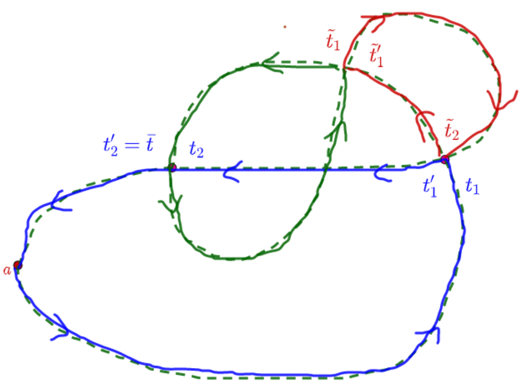
Dem. - Sea $C(t)$ con $t \in [a, b]$ parametrización de C y consideremos

$$\mathrm{A} = \{ t \in [a, b] : \exists t' > t \text{ tal que } C(t) = C(t') \}$$

con ello tendremos que $\mathrm{B} = \{ C(t) : t \in \mathrm{A} \}$ es el conjunto de puntos de intersección de la curva, y donde no repetimos puntos, pues por la definición de A se tiene que si $t \in \mathrm{A}$ entonces existe

$t' > t$ tal que $C(t) = C(t')$ y entonces $t' \in \mathrm{A} \iff \exists t''$ tal que $C(t') = C(t'')$ ¨, por lo que no pasa que contemos dos veces el mismo punto para una misma intersección.

Con esto consideremos A' el conjunto de los t' que existen para cada $t \in \mathrm{A}$, y por lo anterior mencionado, tendremos una biyección entre A y A'. Entonces procedemos de la siguiente manera (considerando los conjuntos anteriores ordenados). Partimos desde $t = a$ y sea $t_1 \in \mathrm{A}$ el mínimo tal que $a < t_1$, y ahora partimos desde $t_1{}'$ (lo que hacemos es llegar al primera intersección y en vez de continuar nos vamos por el otro camino), donde seguimos avanzando hasta encontrar un $t_2 \in \mathrm{A}$ tal que $t_1{}' < t_2$, con lo que nuevamente partimos desde $t_2{}'$ hasta el siguiente punto $t_3 \in \mathrm{A}$ que aparezca, haciendo esto de manera sucesiva tendremos que debe de existir un $\overline{t} \in \mathrm{A}'$ mayor que todos los anteriores tal que $\forall t \in [\overline{t}, b]$, $t \notin \mathrm{A}$, es decir, es la última intersección. Con ello llamaremos a $\gamma_1 = C_{[a,t_1]} \cup C_{[t_1{}',t_2]} \cup \cdots \cup C_{[\overline{t},b]}$ curva cerrada simple.



Ahora regresemos al punto t_1 y prosigamos hasta encontrar un $\tilde{t}_1 \in \mathrm{A}$ tal que $t_1 < \tilde{t}_1$, con ello partiremos ahora desde $\tilde{t}_1{}'$, hasta llegar a un $\tilde{t}_2 \in \mathrm{A}$ tal que $\tilde{t}_1{}' < \tilde{t}_2$, y así sucesivamente. Notemos que como partimos de t_1 y $t_1 \in \mathrm{A}$ entonces en algún momento de este proceso tenemos que llegar a $t_1{}'$ pues estamos avanzando sobre las diferentes intersecciones, con ello llamamos $\gamma_2 = C_{[t_1,\tilde{t}_1]} \cup C_{[\tilde{t}_1{}',\tilde{t}_2]} \cup \cdots \cup C_{[\tilde{\overline{t}},t_1{}']}$ curva cerrada simple.

Haciendo este procedimiento para cada primer cambio de rumbo, tendremos una familia de curvas cerradas simples γ_i tales que su unión es toda la curva C.

Con esto podemos demostrar el inciso, en efecto, como C es curva cerrada entonces por el lema anterior $C = \bigcup_{i\in I}\gamma_i$ donde γ_i es una curva cerrada simple para toda $i \in I$ y entonces

$$I(C,z)=\sum_{i\in I} I(\gamma_i,z)$$

Pero para cada curva cerrada simple γ tenemos que $I(\gamma,z)=\begin{cases}0 & \text{si } z\in\overline{\text{int}}(\gamma)^c\\ n & \text{si } z\in\text{int}(\gamma)\end{cases}$, en efecto, si pasara que $z\in\overline{\text{int}}(\gamma)^c$ entonces la función $\frac{1}{w-z}$ es analítica sobre y dentro de la curva, con lo que $I(\gamma,z)=0$, en cambio si $z\in\text{int}(\gamma)$ tendremos por el teorema de la deformación que $I(\gamma,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z|=r}\frac{1}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i}2\pi in=n$, por lo que $I(C,z)=\sum_{i\in I} I(\gamma_i,z)\in\mathbb{Z}$

■

b) Verdadero

Primero notemos que $f(z)\neq 0$ sobre C, ya que de serlo se tendría que $0\le |g(z)|<0$!!! lo cual es absurdo. Entonces con esto tenemos que $\frac{|g(z)|}{|f(z)|}=\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|<1$ para toda $z\in C$, por lo que $\frac{g}{f}(C)\subseteq D(0,1)$ y entonces $-1\notin\frac{g}{f}(C)$ $\therefore$ $I(\frac{g}{f}(C),-1)=0$.

■

c) Falso

Sea $f(z)=e^{z^2}$ que es función entera y además

$$\int_{|z|=R}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\int_{|z|=R}\frac{e^{z^2}2z}{e^{z^2}}dz=\int_{|z|=R}2zdz=0 \quad \forall R>100$$

sin embargo, f no es constante.

■

d) Falso

Se demuestra en el inciso *a*) que es un numero entero, es decir, si puede ser negativo.

■

Problema 2. –

vale(2.0) Sea $\alpha\ge 1$ real. Pruebe que la ecuación

$$\alpha-8z^2+z^4+e^{-z}=0$$

tiene 2 raices en el semiplano $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re} z>0\}$.

Demostración: Sean $f(z)=z^4+\alpha$ y $g(z)=-8z^2$. Sabemos que $\lim_{|z|\to\infty}\frac{|f(z)|}{|g(z)|}=\infty$, por lo cual existe $r>\alpha$ (pues en particular existe un $r'>0$ que lo cumple, y entonces solo tomo uno más grande) tal que $\forall |z|>r$, $|g(z)|<|f(z)|$. Entonces si consideramos $R>r$ y $\gamma=L_R+C_R$ tal que

L_R es el segmento de recta que une a $-Ri$ con Ri y C_R la media circunferencia de radio R centrada en 0, tenemos que $\forall z \in \gamma$, $|g(z)| < |f(z)|$ y al ser f y g analíticas en $\operatorname{int}\gamma$ tendremos por el teorema de Rouche que $f(z) = z^4 + \alpha$ y $(f+g)(z) = z^4 + \alpha - 8z^2$ tienen las mismas raíces sobre $\operatorname{int}\gamma$.

Así notando que $f(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 = -\alpha = \alpha e^{\pi i} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{\alpha} e^{(\pi/4 + k\pi/2)i}$ con $k = 0,1,2,3$ son las raíces, y entonces $z = \sqrt[4]{\alpha} e^{\pi/4i}$ y $z = z = \sqrt[4]{\alpha} e^{-\pi/4i}$ son ceros de f y ya que $|z_i| = \sqrt[4]{\alpha} < \alpha$ pues $\alpha \geq 1$, se tiene que $z_1, z_2 \in \operatorname{int}\gamma$ (pues $R > \alpha$), por lo que $z^4 + \alpha - 8z^2$ tiene dos ceros en $\operatorname{int}\gamma$.

Ahora, sean $h(z) = z^4 + \alpha - 8z^2$ y $k(z) = e^{-z}$, y consideremos la misma R, entonces para $z \in \gamma$ tendremos que $|h(z)| \geq R^4 + \alpha + 8R^2 > \alpha \geq 1 \geq |e^{-z}|$, esta última se da ya que como $0 \leq \operatorname{Re}(z) < R$ $\Rightarrow -\operatorname{Re}(z) \leq 0 \Rightarrow |e^{-z}| = e^{-\operatorname{Re}(z)} \leq 1$, y al ser las funciones analíticas en $\operatorname{int}\gamma$ tenemos por el teorema de Rouche que $h(z)$ y $(h+k)(z) = z^4 + \alpha - 8z^2 + e^{-z}$ tienen las mismas raíces en $\operatorname{int}\gamma$ y como $h(z)$ tiene dos raices en esta región, $z^4 + \alpha - 8z^2 + e^{-z}$ tiene dos raices en la misma región, y para terminar, como $\operatorname{int}\gamma \subseteq \{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ entonces $z^4 + \alpha - 8z^2 + e^{-z}$ tiene dos raices en $\{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

■

Problema 3. –

vale(2.0) Sea C una curva cerrada simple, f analítica en C y meromorfa en $\operatorname{int}(C)$ tal que $f(z) \neq 0$ sobre C. Si g es analítica en $\operatorname{int}(C)$, demuestre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C g(z) \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{m} M_k g(z_k) - \sum_{k=1}^{n} N_k g(p_k)$$

donde z_k es un cero de orden M_k para $1 \leq k \leq m$ y p_k un polo de orden N_k para $1 \leq k \leq n$; todos contenidos en $\operatorname{int}(C)$.

Demostración:

Demo: Como f es meromorfa en int(C) y dados los polos y ceros ent. para toda $1 \le r \le m$, $\exists \varepsilon_r > 0$ tal que:

$$f(z) = (z-z_r)^{M_r} h_r(z) \quad \text{donde } h_r(z) \text{ es analítica y no nula en } D_r := D(z_r, \varepsilon_r)$$

y para todo $1 \le s \le n$ $\exists \varepsilon'_s > 0$ tal que:

$$f(z) = (z-p_s)^{-N_s} J_s(z) \quad \text{donde } J_s(z) \text{ es analítica y no nula en } D'_s := D(p_s, \varepsilon'_s)$$

Así, en D_r

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{M_r (z-z_r)^{M_r-1} h_r(z) - (z-z_0)^{M_r} h_r'(z)}{(z-z_r)^{M_r} h_r(z)} = \frac{M_r}{z-z_r} + \frac{h_r'(z)}{h_r(z)}$$

$$\Rightarrow g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{M_r g(z)}{z-z_r} + \frac{g(z) h_r'(z)}{h_r(z)}$$

Análogamente

$$g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-N_s g(z)}{z-p_s} + \frac{g(z) J_s'(z)}{J_s(z)} \quad \text{en } D'_s.$$

Por tanto como $g(z) \frac{f'(z)}{f(z)}$ es analítica entre las curvas $D_1, \dots, D_m, D'_1, \dots, D'_n$ y C por el Teo. de la deformación

$$\int_C g(z) \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{m} \int_{D_k} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{D'_k} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_C g(z) \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{k=1}^{m} \int_{D_k} \frac{M_k g(z)}{z-z_k} + \frac{g(z) h_k'(z)}{h_k(z)}\, dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{D'_k} \frac{-N_k g(z)}{z-p_k} + \frac{g(z) J_k'(z)}{J_k(z)}\, dz \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{k=1}^{m} M_k \int_{D_k} \frac{g(z)}{z-z_k} + \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\int_{D_k} \cancel{\frac{g(z) h_k'(z)}{h_k(z)}}}_{\substack{0 \\ \text{Analítica en } D_k}} - \sum_{k=1}^{n} N_k \int_{D'_k} \frac{g(z)}{z-p_k} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\int_{D'_k} \cancel{\frac{g(z) J_k'(z)}{J_k(z)}}}_{\substack{0 \\ \text{Analítica en } D'_k}} \right]$$

Y como $g(z)$ es analítica en $\overline{\text{int}(C)}$ en particular en D_k y D'_k por tanto

$$\int_{D_k} \frac{g(z)}{z-z_k}\, dz = 2\pi i\, g(z_k) \quad \text{y} \quad \int_{D'_k} \frac{g(z)}{z-p_k}\, dz = 2\pi i\, g(p_k)$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i} \int_C g(z) \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \left[2\pi i \left(\sum_{k=1}^{m} M_k g(z_k) - \sum_{k=1}^{n} N_k g(p_k) \right) \right] = \sum_{k=1}^{m} M_k g(z_k) - \sum_{k=1}^{N} N_k g(p_k) \quad \blacksquare$$

Problema 4. –

vale(2.0) Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Demuestre que si $|\alpha| > e$ entonces la ecuación $e^z - \alpha z^n = 0$ tiene n raices en $D(0,1)$

Demostración: Consideremos $\gamma(t) = e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ y sean $f(z) = -\alpha z^n$, $g(z) = e^z$ y veamos que tienen el mismo número de ceros en $\operatorname{int}\gamma = D(0,1)$.

En efecto, se tiene que ambas funciones son analíticas en $\overline{\operatorname{int}\gamma}$ y además $\forall z \in \gamma$

$$|g(z)| = |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$$

y como $z \in \gamma$ entonces $-1 \le \operatorname{Re}(z) \le 1 \;\Rightarrow\; e^{-1} \le e^{\operatorname{Re}(z)} \le e$ y $|z| = 1$ por lo que

$$|g(z)| \le e \underset{|\alpha|>e}{<} \alpha \le |\alpha| = |\alpha| \cdot 1 = |-\alpha||z|^n = |-\alpha z^n| = |f(z)|$$

$$\therefore \quad |g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \gamma$$

con lo que, por el teorema de Rouche, f y $f+g$ tienen el mismo número de ceros en $\operatorname{int}\gamma$, y como sabemos que $f(z) = -\alpha z^n$ tiene n ceros en $D(0,1)$ ($z = 0$ de multiplicidad n), entonces $f(z) + g(z) = e^z - \alpha z^n$ tiene n ceros, es decir, la ecuación $e^z - \alpha z^n = 0$ tiene n soluciones en $D(0,1)$.

$\blacksquare$

Problema 5. –

vale(2.0) Sea $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones analiticas inyectivas (1-1) que convergen uniformemente sobre compactos de Ω a una función f no constante. Demuestre que f es inyectiva.

Demostración: Sean $z_1, z_2 \in \Omega$ tales que $f(z_1) = f(z_2)$ PD $z_1 = z_2$.

Consideremos γ una curva cerrada simple contenida en Ω tal que $z_1, z_2 \in \operatorname{int}\gamma$ y sea $g_k(z) = f_k(z) - f_k(z_1)$. Notemos que dicha función únicamente tiene un cero que es $z = z_1$, pues de existir otro tendríamos que $g(w) = 0 \;\Rightarrow\; f_k(w) = f_k(z_1) \;\Rightarrow\; w = z_1$ pues $\forall k \in \mathbb{N}$ f_k es inyectiva, entonces dado que $g_k(z)$ es analítica en $\overline{\operatorname{int}\gamma}$ y distinta de cero en γ tendremos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g_k'(z)}{g_k(z)}\,dz = 1$$

pues este es el número de ceros de $g_k(z)$.

Por otro lado, notemos que $g_k \to g$ normalmente en $\overline{\text{int}\gamma}$, donde, $g(z) = f(z) - f(z_1)$, en efecto, como $f_k \to f$ normalmente en Ω, converge uniformemente en el compacto $\overline{\text{int}\gamma}$, por lo que $f_k - f_k(z_1)$ converge uniformemente a g en $\overline{\text{int}\gamma}$ (es fácil demostrarlo por definición).
Con esto dado que la convergencia es uniforme, las funciones g_k son analíticas (pues f_k lo son), $g_k(z)$ y $g(z)$ no se anula en γ, tendremos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g_k'(z)}{g_k(z)}dz = 1 \;\Rightarrow\; 1 = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g_k'(z)}{g_k(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lim_{k\to\infty}\frac{g_k'(z)}{g_k(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\lim\limits_{k\to\infty} g_k'(z)}{\lim\limits_{k\to\infty} g_k(z)}dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz$$

por lo que el número de ceros de la función $g(z)$ es 1, es decir, $g(z)$ solo tiene un cero, sin embargo, notemos que $g(z_1) = 0$ y $g(z_2) = 0$, entonces necesariamente $z_1 = z_2$.

■