MATEMÁTICAS

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Variable Compleja II
Tarea 6

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera y Francisco Javier Alvarado Cabrera

---

Problema 1. –

vale(1.5) Determine si las siguientes afimaciones son verdaderas o falsas:

a) El teorema de Hurwitz es valido para sucesiones reales que satisfacen las hipótesis del teorema. (cambiar analítica por derivable)

b) Las raices o preimagenes cuya existencia es garantizada por el teorema 1 de la clase del 18 de abril son todas distintas para R suficientemente pequeño.

c) Sea Ω una región y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica. Si $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$ entonces f es inyectiva en Ω.

Demostración:

a) Falso

Consideremos $f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}$, que son analíticas en la región $(-1,1)$ para toda n, además, converge normalmente en $(-1,1)$ a la función $f(x) = x^2$ (ya que son continuas en intervalos cerrados), sin embargo, tenemos que f tiene un cero de orden 2 ($x = 0$) pero para todo $r > 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que f_n no tiene ceros en $D(r,0) \subset (-1,1)$, por lo cual no es cierto el teorema de Hurwitz.

$\blacksquare$

b) Verdadero

1

(b) Tenemos que $f(z) - w_0 = (z - z_0)^n g(z) \quad \forall z \in D(z_0, \delta) \subseteq \Omega$

$\Rightarrow f'(z) = n(z - z_0)^{n-1} g(z) + (z - z_0)^n g'(z)$

Ahora sea z_k un cero ó raiz dado por el Teorema visto y

s.p que es de orden ≥ 2

$\Rightarrow 0 = f'(z_k) = n(z_k - z_0)^{n-1} g(z_k) + (z_k - z_0)^n g'(z_k)$

$\Rightarrow -n(z_k - z_0)^{n-1} g(z_k) = (z_k - z_0)^n g'(z_k) \quad \Rightarrow -n\, g(z_k) = (z_k - z_0)\, g'(z_k)$

$\Rightarrow g(z_k) = -\frac{1}{n}(z_k - z_0)\, g'(z_k)$

Por otro lado $f(z_k) - w_0 = (z_k - z_0)^n g(z_k) = -\frac{1}{n}(z_k - z_0)^{n+1} g'(z_k)$

$\Rightarrow$ ...

c) Falso

Consideremos $f : \{x + it : x \in \mathbb{R},\ t \in (0, 3\pi)\} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = e^z$, tenemos que f es analítica en la región y es tal que $f(z) \neq 0$ pero f no es inyectiva, ya que $f(0) = e^0 = 1 = e^{0+2\pi i} = f(0 + 2\pi i)$ ∎

Problema 2. –
vale(1.5) Considere la ecuación en 2 variables complejas (z, w):

$$e^z - |w|(z+1) = 0.$$

Si $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0, 0\}$ fijo satisface la ecuación anterior, Â¿ Es posible despejar z en términos de w de tal modo que localmente se obtiene una función $z = g(w)$? en caso afirmativo escriba una formula para dicha función. Â¿Es esta función analítica?

Demostración:

2 (1) Notemos que $F(z,w) = e^z - |w|(z+1)$ es analitica $\forall w$ fijo

(2) Ahora notemos que si tomamos $(0,1), (0,-1) \Rightarrow F(0,1) = F(0,-1) = 0$

pero $\frac{\partial F}{\partial w}(0,1) = \frac{\partial F}{\partial w}(0,-1) = 0$

Asi, descartemos estos puntos y s.p. (z_0, w_0) fijo satisface que

$F(z_0, w_0) = 0$, y que $z_0 \neq 0$

$\Rightarrow e^{z_0} = |w_0|(z_0+1)$ ademas $\frac{\partial F}{\partial w}(z_0, w_0) = e^{z_0} - |w_0| = |w_0| - |w_0|(z_0+1)$

$= |w_0| z_0 \neq 0$ ya que $z_0 \neq 0$

$\therefore$ Por el Teorema de la función implicita $\exists \delta > 0$ y $g : D(w_0, \delta) \to \mathbb{C}$

tal que $g(w_0) = z_0$ y $F(g(w), w) = 0$ con

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta - z_0| = R} \frac{\eta \frac{\partial F}{\partial \eta}(\eta, w)}{F(\eta, w)} \, d\eta$$ la cual no es analitica pues

$F(z,w) = e^z - |w|(z+1)$ no es analitica respecto a w. ($|w|$ no es analitica)

■

Problema 3. –
vale(2.0) Sea f analítica sobre una región Ω. Pruebe que si $(f(z))^2 = \overline{f(z)}$ para todo $z \in \Omega$ entonces f debe ser constante. Encuentre todos los posibles valores de f.

Demostración: Supongamos que $\forall x + iy \in \Omega$ se tiene que $f^2(x+iy) = \overline{f(x+iy)}$, si consideramos a $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ entonces tendremos que

$$f^2(x+iy) = \overline{f(x+iy)} \iff (u^2 - v^2) + (2uv)i = u - iv$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} u^2 - v^2 &= u \\ 2uv &= -v \end{aligned}$$

pero de la segunda ecuación obtenemos que $2uv = -v \Leftrightarrow (2u+1)v = 0 \Leftrightarrow 2u+1 = 0$ o $v = 0$

• Si $2u(x,y)+1 = 0$ entonces $u(x,y) = -\frac{1}{2}$, con lo que de la primera ecuación $(-\frac{1}{2})^2 - v^2 = -\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{4} - v^2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow v^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow v = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, por lo que $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son constantes y por tanto f lo es.

• Si $v = 0$ entonces por la primera ecuación tenemos que $u^2 + 0^2 = u \Rightarrow u^2 = u \Rightarrow u = 0$ o $u = 1$, entonces $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son constantes y por tanto f lo es.

Los posibles valores de $f(z)$ son

$$f(z) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \ f(z) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \ f(z) = 0 \ \text{ y } \ f(z) = 1$$

■

Problema 4. –

vale(2.0) Suponga que f es analítica en z_0, $w_0 = f(z_0)$ y $f'(z_0) \neq 0$. Demuestre que la función inversa satisface:

$$f^{-1}(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w - w_0)^n, \quad a_n := \frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{z - z_0}{f(z) - w_0}\right)^n \Big|_{z=z_0}$$

Use el resultado para demostrar que si $w = ze^z$ entonces su inversa satisface

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^{n-2}}{(n-1)!} w^n, \quad |w| < \frac{1}{e}.$$

Esta última se conoce como función de Lambert.

Demostración:

(4) Suponga que f es analítica en z_0, $w_0 = f(z_0)$ y $f'(z_0) \neq 0$. Demuestre que la función inversa satisface:

$$f^{-1}(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w-w_0)^n \quad , \quad a_n := \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{z-z_0}{f(z)-w_0} \right)^n \Big|_{z=z_0} \quad *$$

Dem: Dadas las hipótesis $\exists R, \rho > 0$ t.q. $f^{-1}(D(w_0,\rho)) \subseteq D(z_0,R)$ y $f^{-1}: D(w_0,\rho) \to f^{-1}(D(w_0,\rho))$ es analítica. Así tendrá una expansión con series de potencias en w_0.

$$\Rightarrow f^{-1}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-w_0)^n \quad \text{con} \quad a_n = \frac{(f^{-1})^{(n)}(w_0)}{n!} \qquad \text{Pd } a_n = *$$

Primero notemos que $a_0 = f^{-1}(w_0) = z_0 \Rightarrow f^{-1}(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w-w_0)^n$

Ent. por el Teorema de la función Inversa, tenemos que:

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{z f'(z)}{f(z)-w} dz \quad \text{y por lo visto en clase} \quad (f^{-1})'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z f'(z)}{(f(z)-w)^2} dz$$

$\Gamma : |z-z_0| = R$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(w) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z \, d\left(\frac{1}{f(z)-w} \right) = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \gamma(t) \, d\left(\frac{1}{f(\gamma(t))-w} \right) \gamma'(t) \, dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \left[\cancel{\left[\frac{\gamma(t)}{f(\gamma(t))-w} \right] \Big|_0^{2\pi}}^{\,0} - \int_0^{2\pi} \gamma'(t) \frac{\cdot 1}{f(\gamma(t))-w} dt \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \gamma'(t) \frac{1}{f(\gamma(t))-w} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{f(z)-w} dz$$

Donde $\gamma(t)$ es una parametrización de la circunferencia Γ, y por esta razón $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$. (Se usó integración por partes en $\mathbb{R}$)

$\therefore (f^{-1})'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{f(z)-w} dt$. Así derivando respecto a w $n-1$ veces

$$(f^{-1})^{(n)}(w) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{(f(z)-w)^n} dz \Rightarrow (f^{-1})^{(n)}(w_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{(f(z)-w_0)^n} dz$$

$$\Rightarrow (f^{-1})^{(n)}(w_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\left(\frac{z-z_0}{f(z)-w_0} \right)^n}{(z-z_0)^n}$$ que por la formula integral de cauchy

$$(f^{-1})^{(n)}(w_0) = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{z - z_0}{f(z) - w_0} \right)^n \Bigg|_{z=z_0} \qquad \therefore\ a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{z - z_0}{f(z) - w_0} \right)^n \Bigg|_{z=z_0}$$

- Usando este resultado demostrar que si $w = ze^z$ entonces su inversa satisface

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^{n-2}}{(n-1)!} w^n, \quad |w| < 1/e$$

Tenemos que $f(z) = ze^z$ es analítica en $z_0 = 0$, $w_0 = f(z_0) = 0$ y $f'(z) = e^z(z+1)$

$\Rightarrow f'(z_0) = 1 \neq 0$.

$$\therefore\ z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n, \quad a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{z}{f(z)} \right)^n \Bigg|_{z=0} = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{1}{e^z} \right)^n \Bigg|_{z=0}$$

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (e^{-nz}) \Big|_{z=0}$ así:

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (e^{-nz}) = \frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}} (-ne^{-nz}) = -n \frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}} (e^{-nz}) = n^2 \frac{d^{n-3}}{dz^{n-3}} (e^{-nz}) = -n^3 \frac{d^{n-4}}{dz^{n-4}} (e^{-nz})$$

$$= \dots = (-1)^{n-1} n^{n-1} e^{-nz}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{(-1)^{n-1} n^{n-1} e^{-nz}}{n!} \Bigg|_{z=0} = \frac{(-1)^{n-1} n^{n-2}}{(n-1)!}$$

$$\therefore\ z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^{n-2}}{(n-1)!} w^n$$

■

Problema 5. –

vale(3.0) Bajo las hipótesis del teorema de la funcón implicta demuestre que si ademas $F = F(z, w)$ es analítica respecto a w entonces la función implicita $z = g(w)$ es es analítica.

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta - z_0| = \rho} \frac{\eta \frac{\partial F(\eta, w)}{\partial \eta}}{F(\eta, w)} \, d\eta, \quad w \in D(w_0, \delta)$$

Demostración: Consideremos $\gamma(t)$ parametrización de $C : |z - z_0| = \rho$. Entonces tendremos que

$$g(w) = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(t) \partial_\eta F(\gamma(t), w)}{F(\gamma(t), w)} \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} G(t, w) dt$$

donde $G : [0, 2\pi] \times D(w_0, \delta) \to \mathbb{C}$.

Notemos que la función G es analítica respecto a w para toda $t \in [0, 2\pi]$. En efecto, tenemos que $\gamma(t), \gamma'(t)$ son constantes respecto a w, entonces solo basta checar la analiticidad para

$\frac{\partial_\eta F(\gamma(t),w)}{F(\gamma(t),w)}$. Como $F(\eta,w)$ es analítica respecto a w para toda $\eta \in C$, tendremos que en particular $F(\gamma(t),w)$ es analítica respecto a w, y al ser F analítica respecto a η y respecto a w tendremos que existirán las parciales de distintos ordenes y además estas serán analíticas, por lo que $\partial_w \partial_\eta F(\eta,w)$ existe, así $\partial_\eta F(\eta,w)$ es analítica respecto a w.

Finalmente dado que $\gamma(t) \in C$ tendremos que $z \neq \gamma(t)$ y por tanto $F(\gamma(t),w)$ no se anula. Con todo lo anterior $\frac{\partial_\eta F(\gamma(t),w)}{F(\gamma(t),w)}$ es analítica respecto a w $\therefore$ G es analítica respecto a w para toda $t \in [0,2\pi]$ y además $\partial G(t,w)$ será continua (ya que todo es analítico), por lo que por la Regla de Leibniz compleja, existe $g'(w)$ y además

$$g'(w) = \int_0^{2\pi} \partial_w G(t,w)dt$$

■