MATEMÁTICAS

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Variable Compleja III
Tarea 1

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 1. –

vale(2.0) Determine si las siguientes afimaciones son verdaderas o falsas:

a) Existe una función analítica e invertible $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, con $f(\mathbb{C}) = \mathbb{D}$. Es decir, es posible deformar a $\mathbb{C}$ en el disco $\mathbb{D}$ con una homeomorfismo que preserva ángulos (con orientación).

b) Sea $\Omega \in \mathbb{C}$ conjunto simplemente conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica e invertible entonces $f(\Omega)$ es simplemente conexo en $\mathbb{C}$.

c) Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ región simplemente conexa y $z_0 \in$. La familia de funciones analíticas e invertibles de Ω en $\mathbb{D}$ que se anulan en z_0 es no vacia.

d) Sea Ω región. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función analítica e invertible entonces f^{-1} es analítica.

Demostración:

(*a*) Falso.

Si $f : \mathbb{C} \to D$ es analítica e invertible tal que $f(\mathbb{C}) = D$ entonces tendremos que f es entera y acotada, pues $\forall z \in \mathbb{C}$, $\left|f(z)\right| \le 1$ por lo que, por el Teorema de Liouville, f es contante, es decir, $f(z) = c$ para algún $c \in \mathbb{C}$ pero entonces $f(\mathbb{C}) = \{c\} \neq D$ por lo que no puede existir dicha función. ■

(*b*) Verdadero.

Sea $\gamma : [a,b] \to f(\Omega)$ y veremos que será homotópica a un punto en $f(\Omega)$. En efecto, consideremos $f^{-1} \circ \gamma : [a,b] \to \Omega$ la cual esta bien definida pues f es invertible, entonces, como Ω es simplemente conexa tendremos que $f^{-1} \circ \gamma$ es homotópica a un punto digamos $z_0 \in \Omega$, es decir, existe $H : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ continua tal que $H(t,0) = (f^{-1} \circ \gamma)(t)$ y $H(t,1) = z_0$ $\forall t \in [a,b]$. Con ello consideremos $f \circ H : [a,b] \times [0,1] \to f(\Omega)$ y veamos que esta es la homotopía buscada.

En efecto, como f es analítica, será continua y por tanto $f \circ H$ es continua y además $(f \circ H)(t,0) = (f \circ f^{-1} \circ \gamma)(t) = \gamma(t)$ y $(f \circ H)(t,1) = f(z_0)$ $\forall t \in [a,b]$, por tanto γ es homotópica a $f(z_0)$. Y como la curva fue arbitraria obtenemos que $f(\Omega)$ es simplemente conexa. ■

(*c*) Verdadero.

Como Ω es una región simplemente conexa tendremos por el Teorema 4 del 24 de agosto que existe $f : \Omega \to f(\Omega) \subseteq D$ biholomorfismo (analítica e invertible). Ahora sea $g(z) = \frac{1}{2}[f(z) - f(z_0)]$ y veamos que esta es la función buscada. En efecto de forma inmediata, como f es biholomorfismo tendremos que g lo será, y además $\left|g(z)\right| = \left|\frac{1}{2}[f(z)-f(z_0)]\right| = \frac{1}{2}\left|f(z)-f(z_0)\right|^{\delta} < \frac{1}{2}[2] < 1$ por lo que $g:\Omega \to g(\Omega) \subseteq D$, analítica, invertible y tal que $g(z_0)=0$, por tanto la familia es no vacía.

■

(d) Falso.

Esto es claro tomando $f(z)=z^n$ es analítica e invertible en $\mathbb{C}$ pero su inversa (la raiz) no es analítica en $\mathbb{C}$.

■

Problema 2. –

vale(2.0) Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ región simplemente conexa. Si existe un biholomorfismo $f:\Omega \to \mathbb{D}$ entonces este es único.

Demostración: Supongamos que existe un biholomorfismo $f:\Omega \to D$.

Entonces por el inciso (c) del problema 1 sabemos que $g:\Omega \to D$ dada por $g(z)=\frac{1}{2}[f(z)-f(0)]$ será un biholomorfismo tal que $g(0)=0$ y por ser biholomorfismo, debe de existir $z_0 \in \Omega$ tal que $g'(z_0)\neq 0$ por lo que usando el teorema 5 del 19 de agosto, tendremos que g es única y por tanto f es única.

■

Problema 3. –

vale(2.0) Sea Ω una región y $f:\Omega \to \mathbb{C}$ función. Demuestre que f es analítica con $f'(z)\neq 0$ si y solo si f (como función de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) es conforme (preserva ángulos con orientación).

Demostración: Supongamos que f es analítica y $f'(z_0)\neq 0$ entonces podemos pensar a $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $f(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$ y entonces

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \underset{C.R}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} \Leftrightarrow DJ_f = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

$$= \left|f'(z)\right|$$

por lo que al tener como radio a $\left|f'(z)\right|$ y el ángulo respectivo $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\partial u/\partial x}{\left|f'(z_0)\right|}\right)$ (pues $f'(z_0)\neq 0$) tendremos que

$$J_f = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

que por lo visto en clase me dice que f es conforme.

■

$^{\delta}$ Esto es pues $\forall z \in \Omega \quad f(z)\in D$ y $f(z_0)\in D$ por lo que a lo mas la distancia entre ambos complejos es 2.

Problema 4. –

vale(2.0) Sea $\Omega \in \mathbb{C}$ región y $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ sucesión de funciones analíticas que convergen normalmente a f. Demuestre que f es analítica en Ω. (Hint: Teorema de Morera y Cauchy)

Demostración: Sea $\gamma \subset \Omega$ curva cerrada simple, entonces existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $\gamma \subseteq K$, pues de no ser así tendríamos que $\gamma \cap \partial\Omega \neq \varnothing$ y querría decir que $\gamma \not\subset \Omega$ lo cual no pasa, con ello

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)dz$$

y como $f_n \to f$ normalmente, entonces converge uniformemente en $\gamma \subseteq K$ por lo que

$$\int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz$$

y como f_n son analíticas en γ, tendremos por el teorema de cauchy que $\int_\gamma f_n(z)dz = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, es decir

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

por lo que al ser γ arbitraria el teorema de Morera me asegura que f es analítica en Ω.

■

Problema 5. –

vale(2.0) Considere el potencial complejo $w = z + 2iz^2$. Calcular la rapidez $|V|$ en los puntos $z = 0, 1, i$ para el flujo en el semiplano superior asociado al potencial complejo dado. Determina si hay puntos estacionarios. Encuentre las ecuaciones de las lineas de corriente y las lineas equipotenciales.

Demostración: