MATEMÁTICAS

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Variable Compleja III
Tarea 5

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 1. –

vale(2.0) Determine si las siguientes afimaciones son verdaderas o falsas:

a) Si el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ converge entonces converge absolutamente.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} Log(1+z_n)$ converge absolutamente entonces $z_n \to 0$ (cuando $n \to \infty$). Log es cualquier rama del logaritmo.

c) Sea $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$, con $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge. Si definimos

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ln} z_k$$

donde Ln es la rama principal del logaritmo, entonces se cumple que:

$$s_n = \mathrm{Ln}\Big(\prod_{k=1}^{n} z_k\Big)$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s_n &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ln}\Big(\prod_{k=1}^{n} z_k\Big)\\ &= \mathrm{Ln} p\end{aligned}$$

donde $p = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$

d) Sea $\{z_n\}$ una sucesión en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|}$ converge entonces

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

es entera y se anula únicamente en $\{z_n\}$

Demostración:

(*a*) Falso.

Consideremos $z_n = e^{-1/n^2} - 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces:

(1) $1 + z_n \neq 0 \ \forall n \geq 1$ pues $e^{-1/n^2} \neq 1 \ \forall n \geq 1$.
(2) Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} [1 + z_k] = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} [e^{-1/k^2}] = \lim_{n\to\infty} e^{\sum_{k=1}^{n} -1/k^2} = e^{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} -1/k^2} = e^{-\pi^2/6} \neq 0$$

por tanto, el producto infinito es convergente.

Sin embargo, por otro lado.

(1) $1 + |z_n| = 1 + |e^{-1/n^2} - 1| = 2 - e^{-1/n^2} \neq 0 \ \ \forall n \geq 1$ pues $e^{-1/n^2} \neq 1 \ \forall n \geq 1$.
(2) Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} [1 + |z_k|] = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} [2 - e^{-1/k^2}] \geq \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} 2 = \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$$

por tanto, este segundo producto infinito no converge. Así la convergencia normal no implica convergencia absoluta.

■

(*b*) Verdadero.
En efecto si la serie converge absolutamente entonces es convergente y por el teorema 2 (17 de octubre) tendremos que el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} 1 + z_n$$

converge, por lo que (teorema 1, 17 de octubre)

$$\lim_{n\to\infty} (1 + z_n) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

■

(*c*) Falso.
Pues para el paso

$$\sum_{k=1}^{n} Ln(z_k) = Ln(\prod_{k=1}^{n} z_k)$$

se usa implícitamente que

$$Ln(zw) = Ln(z) + Ln(w)$$

lo cual es falso en general para el logaritmo complejo, lo correcto es que

$$Ln(zw) = Ln(z) + Ln(w) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

es por ello que el paso no es válido.

■

(*d*) Verdadero.
Usaremos el criterio M de Weierstrass (para productos). Consideremos $f_n(z) = -z/z_n$ funciones analíticas para cada n, y sea $R > 0$ con $z \in \overline{D(0,R)}$, entonces

- $|f_n(z)| = |-z/z_n| = |z|/|z_n| = |z| \cdot 1/|z_n| \leq R \cdot 1/|z_n| := M_n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = R \sum_{n=1}^{\infty} 1/|z_n| < \infty$ (por hipótesis)

Por lo tanto tenemos que f converge uniformemente en discos cerrados de $\mathbb{C}$ por tanto converge normalmente y así, f es entera (ya que las f_n eran analíticas).

Para los ceros supongamos que $w \in \mathbb{C}$ es tal que $f(w) = 0$ pero por el teorema 2 (20 octubre) esto pasa si y solo si $1 - z/z_n = 0$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$ $z = z_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, por lo que son los únicos ceros.

■

Problema 2. –
vale(2.0) Determine si los siguientes productos convergen o divergen

a) $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - 2^{-n})$

b) $\prod_{n=1}^{\infty}\left|1 + \frac{i}{n}\right|$

c) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{i}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

Demostración:

(*a*) El producto es convergente. Consideremos $z_n = -2^{-n}$ y tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}|-2^{-n}| = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n < \infty$$

por tanto, la serie es convergente. Y entonces por el teorema 2 y 3 (17 octubre) el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty}[1 + z_n] = \prod_{n=1}^{\infty}[1 - 2^{-n}]$$

converge.

■

(*b*) El producto es convergente. Consideremos $z_n = 1/n^2$ y tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}|1/n^2| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$

por tanto, la serie es convergente. Y entonces por el teorema 2 y 3 (17 octubre) el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty}[1+z_n]=\prod_{n=1}^{\infty}[1+\frac{1}{n^2}]$$

converge. Y al ser la función raíz continua tendremos que

$$\sqrt{\prod_{n=1}^{\infty}[1+z_n]}=\sqrt{\lim_{k\to\infty}\prod_{n=1}^{k}[1+\frac{1}{n^2}]}=\lim_{k\to\infty}\sqrt{\prod_{n=1}^{k}[1+\frac{1}{n^2}]}=\lim_{k\to\infty}\prod_{n=1}^{k}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}=\prod_{n=1}^{\infty}\left|1+\frac{i}{n}\right|$$

por lo que el producto converge.

■

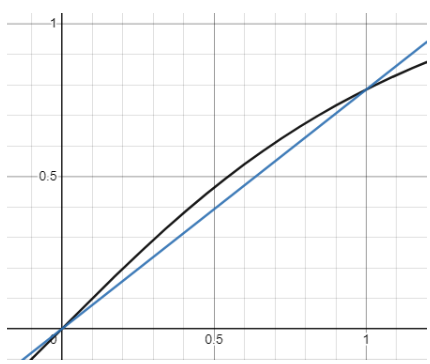
(c) El producto diverge. Sea $z_n=1+i\big/\sqrt{n^2+n}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}Ln(z_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln|z_n|+iArg(z_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)+i\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$$

trabajando únicamente con la imaginaria tenemos que (usando el hecho de que la arcotangente es creciente para los reales positivos)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right)\geq\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

ahora usando la gráfica de arcotangente tenemos que la recta que une los puntos $(0,0)$ y $(1,\pi/4)$ queda por debajo de la grafica



por lo que se tiene que $\arctan(x)\geq(\pi/4)x$ para $x\in[0,1]$ y dado que $0<1/n+1<1$ tendremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)\geq\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{n+1}=\infty$$

por tanto, la serie diverge y al ser la parte imaginaria de la serie originar tendremos que entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} Ln(z_n) \text{ diverge}$$

$\therefore$ usando el teorema 2 (17 octubre) concluimos que

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{i}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

diverge.

$\blacksquare$

Problema 3. –
vale(2.0) Demuestre que la fución

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\sqrt{n}}\right)e^{\frac{z}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{n}}$$

es entera y se anula únicamente en $z=\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Verifique el orden de cada zero.

Demostración: Veamos que es entera comprobando que converge uniformemente.

(1) Sea $R>0$, consideremos $z \in D(0,R)$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq 4R^2$ entonces tenemos que para $n > N$

$$\left|\frac{z}{\sqrt{n}}\right| = \frac{|z|}{\sqrt{n}} < \frac{R}{\sqrt{N}} \leq \frac{1}{2} < 1$$

por lo que $1 - z/\sqrt{n} \neq 0$ y entonces la sucesión interna no es cero.

(2) Consideremos $f_n(z) = (1-z/\sqrt{n})e^{z/\sqrt{n}+z^2/2n}$, así

- $|f_n(z)| = \left|e^{\ln(1-z/\sqrt{n})+z/\sqrt{n}+z^2/2n} - 1\right| \leq e^{\left|\ln(1-z/\sqrt{n})+z/\sqrt{n}+z^2/2n\right|} - 1$ y recordando lo visto en clase se cumple que

$$Ln(1+w) - w = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}w^k, \quad |w|<1$$

tendremos que

$$Ln(1-\frac{z}{\sqrt{n}})) + \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{n} = Ln(1+(-\frac{z}{\sqrt{n}})) - (-\frac{z}{\sqrt{n}}) + \frac{1}{2}(-\frac{z}{\sqrt{n}})^2 = \sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(-\frac{z}{\sqrt{n}})^k$$
$$= -\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}(\frac{z}{\sqrt{n}})^k \quad \Rightarrow \quad \left|Ln(1-\frac{z}{\sqrt{n}})) + \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{n}\right| \leq \sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}\left|\frac{z}{\sqrt{n}}\right|^k \leq \frac{1}{3}\sum_{k=3}^{\infty}\left|\frac{z}{\sqrt{n}}\right|^k$$
$$\leq \frac{1}{3}\sum_{k=3}^{\infty}(\frac{R}{\sqrt{n}})^k = \frac{1}{3}(\frac{R}{\sqrt{n}})^3\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{R}{\sqrt{n}})^k = \frac{1}{3}(\frac{R}{\sqrt{n}})^3\frac{1}{1-R/\sqrt{n}} \leq (\frac{R}{\sqrt{n}})^3$$

por lo tanto

$$\left|f_n(z)\right| \leq e^{(\frac{R}{\sqrt{n}})^3} - 1 \leq (\frac{R}{\sqrt{n}})^3 e^{(\frac{R}{\sqrt{n}})^3} \leq (\frac{R}{\sqrt{n}})^3 e := M_n$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{R}{\sqrt{n}})^3 e = R^3 e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$

Por lo tanto, el producto infinito converge normalmente en $\mathbb{C}$, y ademas como f_n es analítica para cada n, tendremos que f es entera. Finalmente supongamos que $w \in \mathbb{C}$ es tal que $f(w) = 0$ pero por el teorema 2 (20 octubre) esto pasa si y solo si $1 - w/\sqrt{n} = 0$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$ $w = \sqrt{n}$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, por lo que son los únicos ceros. Y sus órdenes serán 1.

■

Problema 4. –
vale(2.0) Sea $R > 0$. Pruebe que si $z \in D(0, R)$ entonces

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \left(\frac{z}{R}\right)^{2^k}\right) = \frac{R^2}{R^2 - z^2}$$

Demostración: Veamos que el producto converge. Sea $z_n = (z/R)^{2^n}$, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|z_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|(\frac{z}{R})^{2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{|z|}{R}\right]^{2^n} \underset{|z|/R<1}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{|z|}{R}\right]^{n} < \infty$$

esta última pues es una serie geométrica, por lo que por el teorema 2 y 3 (17 de octubre) el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} [1 + z_n] = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + (\frac{z}{R})^{2^n}]$$

converge. Con ello son válidos los siguientes procedimientos

$$\prod_{n=1}^{\infty} [1 + (\frac{z}{R})^{2^n}] = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + (\frac{z}{R})^{2^n}] \frac{[1 - (\frac{z}{R})^{2^n}]}{[1 - (\frac{z}{R})^{2^n}]} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (\frac{z}{R})^{2^{n+1}}]}{[1 - (\frac{z}{R})^{2^n}]} = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} [1 - (\frac{z}{R})^{2^{n+1}}]}{\prod_{n=1}^{\infty} [1 - (\frac{z}{R})^{2^n}]}$$

$$= \frac{\prod_{n=2}^{\infty} [1 - (\frac{z}{R})^{2^n}]}{[1 - (\frac{z}{R})^2] \prod_{n=2}^{\infty} [1 - (\frac{z}{R})^{2^n}]} = \frac{1}{1 - (\frac{z}{R})^2} = \frac{R^2}{R^2 - z^2}$$

■

Problema 5. –
vale(2.0) Sea $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Demuestre que el producto infinito $\prod_{n=1}(1+a_n)$ converge si y solo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Demostración: Notemos que si $a_n \geq 0 \ \Rightarrow \ 1+a_n \geq 1$ por lo que

$$Log(1+a_n) = \ln(1+a_n) \in \mathbb{R}^+$$

pues $1+a_n \geq 1 \ \Rightarrow \ \ln(1+a_n) \geq 0$, de esta manera tenemos que

$$\left|Log(1+a_n)\right| = Log(1+a_n)$$

Y simplemente recordando que el día 17 de octubre demostramos las equivalencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|z_n\right| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|Log(1+z_n)\right| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} Log(1+z_n) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n) < \infty$$

pero por lo mencionado al inicio tendremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|Log(1+a_n)\right| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} Log(1+a_n) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) < \infty$$

■