MATEMÁTICAS

# Universidad Nacional Autónoma de México
## Facultad de Ciencias

# Variable Compleja III
## Tarea 6

**Por:** Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

---

Problema 1. –

**vale(4.0)** Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una sucesión de funciones sin puntos de acumulación finitos tal que
$$0 < |a_1| \leq |a_2| < \cdots \leq |a_n| < \cdots ,$$
y $f$ meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos simples únicamente en $\{a_n\}$ tal que
$$\operatorname{Res}(f, a_n) = b_n.$$
Si existe una sucesión de curvas $\{\Gamma_n\}$ cerradas simples positivamente orientadas tal que $\Gamma_n$ contiene únicamente a $a_1, a_2, \cdots, a_n$ y ademas se cumple que

*a)* $R_n = dist(0, \Gamma_n) = \text{mín}\{|z| : z \in \Gamma_n\} \to \infty$ cuando $n \to \infty$,

*b)* $L_n \leq c_0 R_n$ para $n$ suficientemente grande, donde $L_n$ es la longitud de $\Gamma_n$ y $c_0$ constante positiva,

*c)* $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{|f(z)|}{R_n} = 0$ para todo $z \in \Gamma_n$.

Demuestre que
$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( \frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right)$$

Demostración: Seguiremos el procedimiento hecho en clase.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea (tomando $w \in \operatorname{int}\Gamma_n$ y $w \neq a_1, .., a_n$)
$$G_n(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{f(z)}{z(z-w)} dz$$
con ello tenemos que
$$|G_n(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \frac{|f(z)|}{|z||z-w|} dz \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \frac{|f(z_0)|}{R_n\,|z-w|} dz$$
donde $z_0 = \max_{z\in\Gamma_n} |f(z)|$ y además como $|z| \geq R_n \;\Rightarrow\; |z-w| \geq R_n - |w|$ por lo que
$$|G_n(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{|f(z_0)|}{R_n[R_n - |w|]} \int_{\Gamma_n} dz = \frac{1}{2\pi} \frac{|f(z_0)|}{R_n[R_n - |w|]} L_n \underset{b)}{\leq} \frac{1}{2\pi} \frac{|f(z_0)|}{R_n[R_n - |w|]} c_0 R_n$$

$$= \frac{c_0 \left|f(z_0)\right|}{2\pi} \frac{1}{R_n - |w|} \underset{a)}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} G_n(w) = 0$$

Pero por otro lado tenemos por el mismo razonamiento del teorema 1 (26 de octubre) que la función $f(z)/[z(z-w)]$ es analítica en $\operatorname{int}\Gamma_n$ excepto en $z = 0, z = w$ y $z = a_k$ siendo todos polos simples con residuos:

$$\operatorname{Res}(\frac{f(z)}{z(z-w)}, 0) = -\frac{f(0)}{w}, \qquad \operatorname{Res}(\frac{f(z)}{z(z-w)}, w) = \frac{f(w)}{w} \quad \text{y} \quad \operatorname{Res}(\frac{f(z)}{z(z-w)}, a_k) = \operatorname{Res}(f, a_k)\frac{1}{a_k(a_k - w)} = b_k \frac{1}{a_k(a_k - w)}$$

asi por el teorema del residuo tendremos

$$\begin{aligned} G_n(w) &= \operatorname{Res}(\frac{f(z)}{z(z-w)}, 0) + \operatorname{Res}(\frac{f(z)}{z(z-w)}, w) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(\frac{f(z)}{z(z-w)}, a_k) \\ &= -\frac{f(0)}{w} + \frac{f(w)}{w} + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{1}{a_k(a_k - w)} \end{aligned}$$

tendiendo $n \to \infty$ obtenemos

$$0 = -\frac{f(0)}{w} + \frac{f(w)}{w} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{1}{a_k(a_k - w)} \Rightarrow f(w) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{w}{a_k(a_k - w)} = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k [\frac{1}{w - a_k} + \frac{1}{a_k}]$$

■

Problema 2. –
**vale(2.0)** Demuestre que

$$\frac{1}{e^z - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - 4\pi^2 n^2}$$

Demostración: Sea

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{1}{2}z$$

función meromorfa con polos en $z = 2\pi i n,\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Definamos la sucesión de los polos de la manera siguiente:

$$a_n := \begin{cases} -2\pi i k & n = 2k \\ 2\pi i k & n = 2k-1 \end{cases}; \qquad a_1 = 2\pi i,\ a_2 = -2\pi i,\ a_3 = 4\pi i,\ a_4 = -4\pi i, \ldots$$

la cual es una sucesión sin puntos de acumulación finitos tal que

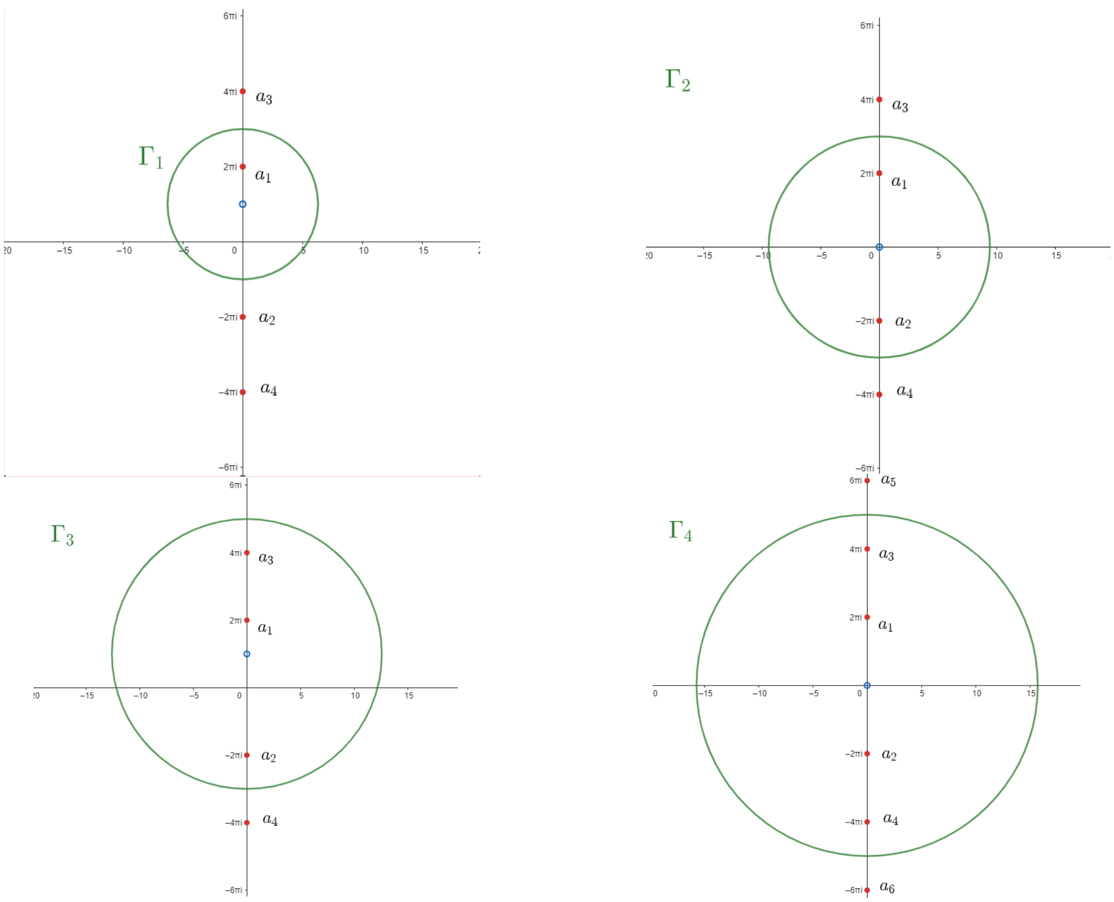
$$0 < |a_1| \le |a_2| \le |a_3| \le \cdots$$

además, se tiene

$$b_n := \operatorname{Res}(f, a_n) = \begin{cases} \lim\limits_{z\to -2\pi ik} \dfrac{z}{e^z - 1}(z + 2\pi ik) & n = 2k \\ \lim\limits_{z\to 2\pi ik} \dfrac{z}{e^z - 1}(z - 2\pi ik) & n = 2k-1 \end{cases} \overset{L'H}{=} \begin{cases} -2\pi ik & n = 2k \\ 2\pi ik & n = 2k-1 \end{cases} = a_n$$

y más aún, si definimos las curvas cerradas simples

$$\Gamma_n := \begin{cases} \partial D(0, [2k+1]\pi) & n = 2k \\ \partial D(\pi i, 2k\pi) & n = 2k-1 \end{cases}$$




son tales que

(1) $\Gamma_n$ únicamente contiene a $a_1, \ldots, a_n$.

(2) $R_n = \min\limits_{z\in\Gamma_n} |z| = \begin{cases} [2k+1]\pi & n = 2k \\ 2k\pi - \pi & n = 2k-1 \end{cases} \Rightarrow R_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$

(3) $L_n = \begin{cases} [4k+2]\pi^2 & n = 2k \\ [4k]\pi^2 & n = 2k-1 \end{cases}$ por lo que

$$5\pi R_n = \begin{cases} 5\pi[2k+1]\pi & n = 2k \\ 10k\pi^2 - 5\pi^2 & n = 2k-1 \end{cases}$$

pero $5\pi[2k+1]\pi \geq 2\pi[2k+1]\pi = [4k+2]\pi^2$ y $10k\pi^2 - 5\pi^2 \geq 4k\pi^2 \iff 6k \geq 5$ por lo que

$$L_n \leq 5\pi R_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

(4) Tenemos dos casos:
Falto : (

Por lo tanto, por todo lo anterior tendremos usando el problema 1 que

$$\begin{aligned}
\frac{z}{e^z-1} + \frac{1}{2}z = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{z}{a_n(z-a_n)}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{z-a_n} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{z-a_{2k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{z-a_{2k}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{z-2\pi i k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{z+2\pi i k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{z-2\pi i k} + \frac{z}{z+2\pi i k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z^2}{z^2+4\pi^2k^2}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{e^z-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2+4\pi^2k^2}$$

■

Problema 3. –

**vale(2.0)** Demuestre que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$$

converge normalmente en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Concluya que la serie define una función meromorfa con polos simples en $\mathbb{Z}$.

Demostración: Sean $R>0$ fijo y $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > 2R$ entonces para cada $n \geq N$

$$\left|z^2-n^2\right| = \left|n^2-z^2\right| \geq n^2 - \left|z^2\right| \geq n^2 - R^2 \geq \frac{3}{4}n^2 \;\; (\text{pues } n > 2R)$$

entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2} = \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1}\frac{2z}{z^2-n^2}}_{m_N} + \underbrace{\sum_{n=N}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}}_{f_N}$$

notemos que $m_N$ es una función meromorfa con polos en $z = \pm n,\ 0 \leq n \leq N-1$ y además como

1) $\left|\dfrac{2z}{z^2-n^2}\right| \leq \dfrac{2R}{\frac{3}{4}n^2} = \dfrac{8}{3}R\dfrac{1}{n^2} := M_n \quad \forall z \in D(0,R)$

2) $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} M_n = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{8}{3}R\frac{1}{n^2} < \infty$

por lo tanto $f_N$ converge uniformemente en cada disco, y como el denominador no se anula en dicho disco entonces $f_N$ es analítica en el disco. Con todo lo anterior tendremos que la convergencia es normal en $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ por lo que $f$ es meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos en $\mathbb{Z}$.

■

Problema 4. –

**vale(2.0)** Use el teorema de factorización de Weierstrass para mostrar que dada una sucesión de números complejos sin puntos de acumulación finitos, entonces existe una función meromorfa con polos únicamente en dicha sucesión. El teorema de Mittag-Leffler es un resultado mucho mas profundo que este pues aqui no se considera la parte principal del desarrollo de Laurent alrededor de cada polo.

Demostración: Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ sucesión de números complejos sin puntos de acumulación finitos entonces por el teorema de factorización de Weierstrass existe una función entera $f$ cuyos únicos ceros son $z = a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que la función $1/f$ es una función meromorfa con polos únicamente en $z = a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

■