Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Variable Compleja III
Tarea 7

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 1. –

vale(2.0) Determine si las siguientes afirmaciones son veraderas o falsas

a) El orden de una función elíptica es al menos 2. $ord(f) \geq 2$

b) Sea $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$-L.I), $L = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ el retículo asociado. Entonces se cumple que

$$\sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{\omega^{n+2}} = 0$$

para todo entero n positivo e impar.

Demostración:

a) Verdadero.

Sea f función elíptica y supongamos que $ord(f) < 2$. Como f es elíptica sabemos que debe de ser meromorfa, por lo que no puede pasar que $ord(f) = 0$ entonces necesariamente tendríamos que $ord(f) = 1$, es decir, f tendría un polo simple (digamos z_0), pero por el teorema 1 (7 noviembre) se debe de tener que

$$0 = \sum_{z_k \in R} \text{Res}(f, z_k) = \text{Res}(f, z_0) \iff \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = 0 \iff z_0 \text{ es removible!!!}$$

pero esto contradice que z_0 fuera un polo simple (además de que también diría que f es entera), por lo tanto $ord(f) \geq 2$.

■

a) Verdadero.

Por el desarrollo hecho en clase, tenemos que

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\left[\sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{\omega^{n+2}}\right] z^n$$

pero como la función $\wp$ es par, tenemos que no puede haber exponentes impares en la expansión de Laurent, por lo que los coeficientes impares son cero, es decir

$$(n+1)\left[\sum_{\omega\in L^*}\frac{1}{\omega^{n+2}}\right]=0,\quad \forall n \text{ impar} \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{\omega\in L^*}\frac{1}{\omega^{n+2}}=0,\quad \forall n \text{ impar}$$

∎

Problema 2. –

vale(2.0) Sean los retículos $L=\omega_1\mathbb{Z}+\omega_2\mathbb{Z}$ y $L'=\omega_1'\mathbb{Z}+\omega_2'\mathbb{Z}$ donde cada par de generadores es $\mathbb{R}$-linealmente independiente. Demuestre que ambos retículos coinciden si y solo si existe una matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con determinante ± 1 tal que

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

Demostración:

$\Rightarrow$] Como los retículos coinciden y sabemos que dado un retículo solo hay 4 vectores los cuales están sobre el origen y sobre el retículo, los cuales son

$$(\omega_1',\omega_2')=(\omega_1,\pm\omega_2),(\omega_2,\pm\omega_1),(-\omega_1,\pm\omega_2),(-\omega_2,\pm\omega_1)$$

por lo que

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_3 & \delta_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

donde la matriz tiene determinante ± 1 (esto es checando todas las combinaciones).

$\Leftarrow$] De la matriz obtenemos que $\omega_1'=a\omega_1+b\omega_2$ y $\omega_2'=c\omega_1+d\omega_2$ por lo que $\omega_1',\omega_2'\in L$ ya que son generados por este. Recíprocamente tendremos que como el determinante de la matriz es ± 1 entonces es invertible y por lo tanto

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix}\frac{1}{\pm 1}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

por lo que análogamente $\omega_1,\omega_2\in L'$. De esta manera dado que ambos pares de generadores pertenecen al retículo opuesto tendremos que todos los elementos generados también, es decir, $L=L'$.

∎

Problema 3. –

vale(2.0) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ función analítica con periodo ω. Pruebe que existe $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ (coeficientes de Fourier) tal que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi n i}{\omega} z}$$

(Hint: use la función $h(v) := f(\frac{\omega}{2\pi i} \log v)$).

Demostración: Notemos que la función $h : \mathbb{C}^* \to \overline{\mathbb{C}}$ es meromorfa. En efecto, para cada $v \in \mathbb{C}^*$ tomamos su logaritmo con una rama conveniente y esto no dependerá de la rama pues si tenemos w_1, w_2 dos ramas de v entonces $w_1 = w_2 + 2\pi i k$ por lo que $h(w_1) = h(w_2)$ entonces esta bien definida y es analítica. Por lo que tendrá una serie de Laurent

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

pero $h(e^{2\pi i z/w}) = f(\frac{\omega}{2\pi i} \log e^{2\pi i z/w}) = f(\frac{\omega}{2\pi i} 2\pi i z/w) = f(z)$ por lo que

$$f(z) = h(e^{2\pi i z/\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{[2\pi n i/\omega] z}$$

■

Problema 4. –

vale(2.0) Sea $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$-L.I), $L = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ el retículo asociado y $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ una función elíptica con periodos en L. Si f tiene ceros z_k y polos p_k, $k = 1, \cdots, m$ (contando multiplicidades) en el paralelogramo fundamental, demuestre que

$$\sum_{k=1}^{m} z_k - \sum_{k=1}^{m} p_k \in L.$$

por que el número de polos y ceros coinciden?

Demostración: Primero veamos que el numero de polos y ceros de una función elíptica coinciden.

⊙ Si f es elíptica entonces por el teorema 1 (nov 7), f tiene un número finito de polos en el paralelogramo fundamental. Entonces, como $1/f$ también es función doblemente periódica necesariamente debe de ser meromorfa, es decir, también es función elíptica y por tanto f también tendrá un número finito de ceros en el paralelogramo fundamental.

Con esto tendemos que la función f'/f es elíptica (f' es elíptica y $1/f$ lo es) con los mismos polos de f, por lo tanto por el *Principio del Argumento* sobre uno de los paralelogramos tendremos que (aquí asumimos que la función no tiene polos en la frontera, pues de tenerlos podemos usar otro paralelogramo)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial R} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \# \, zeros - \# \, polos$$

pero como f'/f es meromorfa en R tendremos que

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial R}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{z_k\ \text{polo}}\text{Res}(\frac{f'}{f},z_k)=0$$

donde la suma de los residuos es cero por el teorema 1 (7 nov), por lo que

$$\#\,zeros-\#\,polos=0\iff\#\,zeros=\#\,polos$$

⊙ Ahora, nuevamente aplicando el Principio del Argumento al paralelogramo fundamental (por lo mencionado anteriormente podemos hacerlo) y dado que la curva ∂R es homotópica a un punto entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial R}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{k=1}^{m}z_k-\sum_{k=1}^{m}p_k$$

por lo que separando a $\partial R=l_1+l_2+l_3+l_4$ como en la clase, tendremos que

- $$\begin{aligned}\omega_2\int_{l_1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz &\underset{z\to -z}{=}-\omega_2\int_{l_1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\int_{l_1}(z-z-\omega_2)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\int_{l_1}z\frac{f'(z)}{f(z)}dz-\int_{l_1}(z+\omega_2)\frac{f'(z)}{f(z)}dz\\ &\underset{z\to z+\omega_2}{=}\int_{l_1}z\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\int_{l_3}z\frac{f'(z)}{f(z)}dz\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\omega_1\int_{l_4}\frac{f'(z)}{f(z)}dz &\underset{z\to -z}{=}-\omega_1\int_{l_4}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\int_{l_4}(z-z-\omega_1)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\int_{l_4}z\frac{f'(z)}{f(z)}dz-\int_{l_4}(z+\omega_1)\frac{f'(z)}{f(z)}dz\\ &\underset{z\to z+\omega_1}{=}\int_{l_2}z\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\int_{l_4}z\frac{f'(z)}{f(z)}dz\end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\omega_2\int_{l_4}\frac{f'(z)}{f(z)}dz-\omega_1\int_{l_1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial R}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{m}z_k-\sum_{k=1}^{m}p_k=\frac{1}{2\pi i}\left[\omega_2\int_{l_4}\frac{f'(z)}{f(z)}dz-\omega_1\int_{l_1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right]$$

pero

$$\int_{l_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \log \frac{f(w_1)}{f(0)} = \log 1 = 2n\pi i$$
$$\int_{l_4} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \log \frac{f(w_4)}{f(0)} = \log 1 = 2m\pi i$$

por lo que

$$\sum_{k=1}^{m} z_k - \sum_{k=1}^{m} p_k = \omega_2 n - \omega_1 m \in L$$

■

Problema 5. –

vale(2.0) Sea $L = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ el retículo generado por $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$-L.I) y $\wp$ la función p-Weierstrass asociada a L. Demuestre que

$$\left(\wp'(z)\right)^2 = 4\left(\wp(z) - e_1\right)\left(\wp(z) - e_2\right)\left(\wp(z) - e_3\right).$$

donde

$$e_1 = \wp(\omega_1/2),\ e_2 = \wp(\omega_2/2),\ e_3 = \wp(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2})$$

Demostración: Consideremos $z_1 = \omega_1/2$, $z_2 = \omega_2/2$ y $z_3 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ entonces por el teorema 2 (15 nov) sabemos que z_i es un cero de $\wp'$ y como $\wp(z_i) = e_i \iff \wp(z_i) - e_i = 0$ entonces tendremos que z_i es cero de $\wp - e_i$ de orden ≥ 2, pero sabemos que la función $\wp$ es de orden 2, por lo que por el problema 4 tendremos que z_i es el único cero y tiene orden 2.

Con lo anterior tendremos que $4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$ es una función con tres ceros de orden 2. Ahora, por el teorema 2 (17 nov) sabemos que

$$[\wp'(z)]^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$$

donde $[\wp']^2$ es una función con tres ceros de orden 2 que de hecho son exactamente e_1, e_2, e_3 (teorema 2, 15 nov) por lo que la función

$$\frac{[\wp'(z)]^2}{4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)}$$

es una función elíptica entera, por tanto, (teo 2, 3 nov) es constante

$$\frac{[\wp']^2}{4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)} = C \iff [\wp']^2 = C4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$$

para saber el valor de C tenemos

$$C = \lim_{z\to 0} \frac{[\wp'(z)]^2}{4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)} = \lim_{z\to 0} \frac{4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3}{4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\wp^3(z)}{\wp^3(z)} \frac{4 - g_2 \dfrac{1}{\wp^2(z)} - g_3 \dfrac{1}{\wp^3(z)}}{\dfrac{1}{\wp^3(z)} 4(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)} = \lim_{z\to 0} \frac{4+g(z)}{4+h(z)} = \frac{4}{4} = 1$$

donde las funciones $g, h \underset{z\to 0}{\rightarrow} 0$ por lo que $C = 1$, es decir

$$4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 = [\wp'(z)]^2 = 4(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)$$

■