Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

# *Seminario de Combinatoria*

Tarea 1

**Por:** Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

---

Notación: Para las permutaciones con repetición especifica de un conjunto de $n$ elementos donde se valen las repeticiones, pero donde cada elemento se repite un numero especifico de veces ( $k_1,..,k_n$ ) lo denotaremos por

$$\frac{n!}{k_1!\cdots k_n!} = \binom{n}{k_1,\dots,k_n}$$

## Prueba de combinaciones con repetición.

Primeramente, realizare el último ejercicio donde el inciso $a$), $b$) y $c$) nos piden comprobar -con un caso particular- que efectivamente la formula funciona mediante una biyección, y luego el inciso $d$) nos pide demostrarlo en general. En este caso yo lo realizare una demostración que, en esencia, es la misma idea, pero con un planteamiento diferente. Claro, estoy consciente que esto no es lo que pide el ejercicio por lo que si no se me acepta de esta manera estoy de acuerdo en que se me cuente como no realizado el ejercicio. Realizaremos unos pasos similares a como lo plantea el problema. (este planteamiento surge de lo mencionado por la profesora donde las combinaciones con repetición se podían ver como multiconjuntos)

Veamos la definición de multiconjunto:

*Def.* – Denotamos por $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ a un conjunto en el que si nos importa cuantos elementos hay de cada uno, y le llamaremos *Multiconjunto*.

*Ejemplo:* $[1,1,1,2] = [2,1,1,1] \neq [1,1,2]$
No me importa el orden de los elementos ni que haya repeticiones, pero si cuantos elementos hay de cada uno, como se ve en el ejemplo.

Ahora, la pregunta que queremos responder es: Dado un conjunto de $n$ elementos, de cuantas formas puedo seleccionar $k$ de ellos de tal forma que no me importa el orden y si puedo hacer repeticiones? si lo pensamos, esto es justamente preguntarnos cuantos multiconjuntos de $k$ elementos puedo formar con los $n$ elementos, pues estos son selecciones de $k$ elementos sin importar el orden y donde puedo repetir elementos, entonces bastara saber cuantos de estos puedo formar.

Consideremos el conjunto $\{1,..,n\}$ y hagamos la siguiente identificación: tomemos $k$ bolitas y $n-1$ palitos, entonces identificaremos cada casilla del siguiente diagrama como el numero de veces que aparece cada numero en cada multiconjunto de $k$ elementos

$$\underbrace{\bullet\bullet\bullet}_{1} \mid \underbrace{}_{2} \mid \underbrace{\bullet}_{3} \mid \quad \dots \quad \mid \underbrace{\bullet\bullet}_{n} \quad \leftrightarrow \quad [1,3,..,nn]$$

por ejemplo, si $A = \{1,2,3\}$ entonces

$$\begin{array}{lcl} \bullet\bullet\bullet \mid \bullet\bullet \mid & \leftrightarrow & [1,1,1,2,2] \\ \bullet \mid \bullet\bullet \mid \bullet\bullet & \leftrightarrow & [1,2,2,3,3] \end{array}$$

entonces la cantidad de multiconjuntos que puedo formar será la cantidad de formas en que puedo combinar los palitos y las bolitas, como identificaremos a todas las bolitas como distintas ($k$) y a los palitos ($n-1$) también, tendremos pues que habrá[Σ]

$$\binom{k+n-1}{k,\ n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

formas de hacerlo y esta también es la respuesta a cuantas formas puedo seleccionar $k$ elementos de un conjunto de $n$ elementos de tal forma que no me importa el orden y si puedo hacer repeticiones.

[Σ] Esto es pues la identificación me define una biyección.

## Libro de Comellas

Problema 5. –

¿Cuántos números hay entre 100 y 900 que tengan las cifras diferentes? ¿Cuántos números más grandes que 6600 con todas las cifras diferentes y sin ninguna de las cifras 7, 8 ni 9?

Solución:

⊙ Notemos que el numero 900 repite dígitos por lo que no será contado, con ello los números más grandes serán entre 800 y 899, por lo que para el primer digito tendré 8 posibles dígitos (el cero no pues ya no sería un numero de tres cifras ni el numero 9 por lo anterior mencionado) para el segundo digito tengo 9 opciones (agrego el cero, pero quito la cifra ya elegida) y para el tercer digito tengo 8 posibles. Por lo que en total son $8 \cdot 9 \cdot 8 = 576$ números de tres cifras tales que todas las cifras son distintas.

⊙ Como no podemos repetir cifras y no pueden aparecer los dígitos 7, 8 ni 9 entonces el número más grande que podemos formar será un numero de 7 cifras y el número más chico que cumple dichas condiciones será de 5 cifras (pues se tiene que ninguno de la lista 66xx, 67xx, 68xx, 69xx, 7xxx, 8xxx, 9xxx no cumplen las condiciones) entonces nos vasta contar los números de 5, 6 y 7 cifras que cumplan las condiciones.

Para el numero de 5 cifras tenemos 6 opciones para la primera cifra (no contamos el 0), para la segunda tendremos 6 opciones (ahora si contamos el 0 y quitamos la cifra anterior) y para las demás cifras habrá 5, 4, 3 opciones, siendo un total de $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2160$ números. Análogamente para los números de 6 cifras y 7 tendremos $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4320$ y $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4320$ números, siendo pues un total de $10800$ números mayores a 6600 con todas las cifras diferentes y sin ninguna de las cifras 7, 8 ni 9.

■

Problema 6. –

¿Cuántas palabras de longitud 4 se pueden formar con las cinco vocales sin que se repita ninguna? ¿Y de longitud 5 (también sin que se repita ninguna)?

Solución:

⊙ La primera letra tiene 5 opciones, la segunda tiene 4 opciones, la tercera 3 y la cuarta 2, por lo que hay $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ posibles palabras.

⊙ Serán la mista cantidad, pues en este caso tendremos (haciendo el procedimiento análogo) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

■

Problema 7. –

Un código de colores con barras usa 6 colores para pintar 4 barras, pero dos barras consecutivas no pueden tener el mismo color. ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar?

Solución: La primera barra tiene 6 opciones de color, la segunda barra tendrá 5 opciones pues descartamos el color de la primera barra, la tercera tendrá nuevamente 5 opciones de color pues agregamos el color de la primera barra (ya que ya no son consecutivas) pero le restamos el color de la segunda barra, y la cuarta barra (por el mismo razonamiento) tiene 5 posibles colores a elegir. Por lo que hay $6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 750$ diferentes palabras.

■

Problema 11. –

Sea $A = \{1, 2, \dots, n\}$ y $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ un conjunto de $k$ símbolos. Una aplicación $f : X \to A$ es *ordenada* si $f(x_1) \leqslant f(x_2) \leqslant \cdots \leqslant f(x_k)$ y *estrictamente ordenada* si las desigualdades son estrictas. ¿Cuántas aplicaciones ordenadas y cuántas estrictamente ordenadas hay de $X$ en $A$?

Solución: **ESTA MAL se tiene que pensar como bolitas el valor de las funciones y cajas el valor al que darán, asi se tiene el resultado correcto.**

⊙ Empecemos con la segunda pregunta. Primeramente, notemos que si $k > n$ entonces necesariamente habrá una repetición (pues $f$ es función) y en ese caso ya no sería totalmente ordenada (o en su defecto hay 0 funciones totalmente ordenadas), por lo que se necesita que $k \leq n$ . Con lo anterior tenemos que cada función únicamente dependerá de su valor inicial, pues todos los demás quedaran determinados. Hagamos un ejemplo:

Consideremos $n = 10$ y $k = 7$ entonces tenemos que podemos seleccionar como primer valor al 1, 2, 3 o 4 únicamente, pues so por ejemplo tomamos el 5, entonces $f(x_1) = 5 \Rightarrow f(x_2) = 6 \Rightarrow \cdots \Rightarrow f(x_6) = 10 \Rightarrow f(x_7) = 11$ !!! lo cual no es posible.

Con esto tenemos que para el valor inicial tenemos $n - k + 1$ posibles primeros valores que puedo elegir para la función, por lo que entonces hay únicamente esta cantidad de funciones totalmente ordenadas con $k \leq n$.

⊙ En este caso tenemos que notar que los símbolos son irrelevantes para el problema, esto es pues, dado una ordenación $(n_1, .., n_k)$ con $n_i = 1, \dots, n$ esta nos da una relación biyectiva asignándole la imagen de la función para cada $x_i$. Entonces lo que nos importara será saber de cuantas formas poder reordenas los valores de la función (de 1 a $n$ ) tal que se cumpla lo que queremos. Ahora, sea $g : \{1, .., n\}^k \to \mathrm{Im}(g)$ dada por $g(a_1, \dots, a_k) = (b_1, \dots, b_k)$ con $b_i = a_j$ con $b_1 \leq \dots \leq b_k$ es decir dada una $k$-tupla me regresa la misma pero reordenada en orden creciente. Es claro de forma directa que esta es una función biyectiva entre las $k$-tuplas cuales quiera y las $k$-tuplas ordenadas en orden creciente con repetición ( $\mathrm{Im}(g)$ ), las cuales, son las que queremos contar, por lo que la cantidad de funciones ordenadas será $|\mathrm{Im}\, g| = \left|\{1, .., n\}^k\right| = n^k$.

■

Problema 13. –

Una empresa de sondeos escoge una muestra de 20 estudiantes al azar de entre una comunidad de 500 estudiantes para hacer una encuesta. ¿Cuántas muestras diferentes puede obtener? Uno de los estudiantes está encantado de que le pasen la encuesta. ¿Cuántas de estas muestras contienen a este estudiante?

Solución:

⊙ Es claro que el orden de la elección de los estudiantes no importa y también no hay alumnos repetidos (aún no existe la clonación lamentablemente) por lo que la cantidad de grupos de 20 estudiantes en una comunidad de 500 será la cantidad de subconjuntos de 20 alumnos de un conjunto de 500, siendo pues

$$\binom{500}{20}$$

⊙ Queremos dejar fijo a un alumno por lo que ahora tendremos que elegir a otros 19 alumnos entre un grupo de 499, por lo que el total de muestras con ese estudiante serán

$$\binom{499}{19}$$

■

Problema 14. –

¿De cuántas maneras se pueden poner $n$ bolas numeradas en $k$ cajas numeradas de manera que en cada caja haya al menos una bola? ¿Y si las bolas no están numeradas?

Solución: Para que haya al menos una bola en cada caja tenemos que tener que $k \leq n$. Aclarando esta condición podemos notar que es lo mismo contar de la forma en que esta descrita la pregunta a primero colocar una bola en cada caja $(k)$ y luego ordenar las bolas restantes $(n-k)$ en las cajas.

⊙ Primero consideremos que las bolas no están numeradas. Entonces tenemos la siguiente analogía: las cajas funcionan como separadores de las bolas que coloquemos, viéndolo como el diagrama

$$\lfloor \bullet \rfloor \lfloor \bullet \bullet \rfloor \;\; \ldots \;\; \lfloor \bullet \bullet \rfloor$$

pero dichos separadores los podemos pensar como cualquier otro símbolo que nos separe las bolitas simplemente (por lo que los extremos no nos importan), teniendo que el diagrama de arriba es análogo al siguiente

$$\bullet \mid \bullet\bullet \mid \;\; \ldots \;\; \mid \bullet \bullet$$

donde las bolitas sumaran el total de $n$ y cada separación me representa las separaciones de las cajas.

.

En resumen, saber la cantidad de maneras que se pueden poner $n$ bolas no numeradas en $k$ cajas será la cantidad de formas de ordenar las $n$ bolitas $(\bullet)$ y $k-1$ palitos $(|)$ (son estos pues si quiero por ejemplo 3 cajas solo necesito 2 palitos para diferenciarlas), pero como necesito que al menos haya una bola en cada separación, entonces separo $k$ bolitas al inicio, quedándome $n-k$ bolitas y $k-1$ palitos

$$\underbrace{\bullet \bullet \ldots \bullet}_{n-k}\underbrace{|| \ldots |}_{k-1}$$

con esto solo necesito saber la cantidad de combinaciones que puedo tener entre estos dos símbolos, los cuales serán

$$\binom{(n-k)+(k-1)}{n-k,\ k-1} = \binom{n-1}{n-k,\ k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \binom{n-1}{k-1}$$

y una vez esto hecho simplemente coloco de una en una las $k$ bolas que separe al inicio en cada separación, rellenado cualquier posible hueco que haya quedado. Por lo que la cantidad de maneras que se pueden poner $n$ bolas no numeradas en $k$ cajas es

$$\binom{n-1}{k-1}$$

⊙ Ahora consideremos que las bolas están numeradas. Por el inciso anterior tenemos que la cantidad de maneras de poner $n$ bolas no numeradas en $k$ cajas es

$$\binom{n-1}{k-1}$$

pero como ahora son numeradas (por tanto, distinguibles), tenemos que por cada una de estas combinaciones contaremos todas las permutaciones de las bolas de esa colocación (notemos que la separación es irrelevante, pues esa la ponemos nosotros) y como en cada una son $n$ entonces tenemos $n!$ permutaciones por cada combinación, siendo pues entonces la cantidad de maneras que se pueden poner $n$ bolas numeradas en $k$ cajas :

$$\binom{n-1}{k-1} \cdot n!$$

■

## Libro de Cameron

Problema 3. –

**3. Prove the following identities:**

**(a)** $\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$.

**(b)** $\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$

**(recall the convention that $\binom{n}{k} = 0$ if $k < 0$ or $k > n$).**

**(c)** $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$.

**(d)** $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

**(e)** $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}^2 = \begin{cases} 0 & \text{if } k \text{ is odd;} \\ (-1)^m\binom{2m}{m} & \text{if } n = 2m. \end{cases}$

Demostración:

*(a)*

**Prueba combinatoria:**

Imaginemos que de un grupo de $n$ alumnos del seminario queremos escoger a $k \leq n$ de ellos para formar un grupo el cual realizara un proyecto, y de ese grupo elegiremos a $l$ representantes que serán los presenten el proyecto. ¿De cuantas formas podemos hacer estas selecciones? Tenemos dos opciones:

• Primero elegimos al grupo de $k$ alumnos de donde hay $[n \text{ en } k]$ formas de hacerlo y por cada una de esas hay $[k \text{ en } l]$ formas de elegir a los representantes. Con lo que en total serán

$$\binom{n}{k}\binom{k}{l}$$

• Primero elegimos a los $l$ representantes de donde hay $[n \text{ en } l]$ formas de hacerlo y luego elegimos a los miembros restantes para formar el grupo siendo $[n-l \text{ en } k-l]$ por lo que el total de formas será

$$\binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$$

por lo tanto, podemos concluir que ambas expresiones son iguales.

**Prueba analítica:**

Tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l} &= \frac{n!}{l!(n-l)!}\cdot\frac{(n-l)!}{(k-l)!(n-k)!} = \frac{k!}{k!}\frac{n!}{l!(n-l)!}\cdot\frac{(n-l)!}{(k-l)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{l!(n-l)!}\cdot\frac{k!(n-l)!}{(k-l)!} = \binom{n}{k}\frac{k!}{l!(k-l)!} = \binom{n}{k}\binom{k}{l}\end{aligned}$$

■

$(b)$

**Prueba combinatoria:**

Sabemos que en el seminario de combinatoria hay $n$ hombres y $m$ mujeres, por lo que si queremos formar un grupo de $k$ alumnos sabemos que habrá $[n+m$ en $k]$ formas de hacerlo. Ahora veamos otra forma de armar este grupo. Sabemos que en cada grupo habrá una cierta cantidad de hombres y el restante será de mujeres (podría no haber ninguno de algún genero) por lo que podemos formar los grupos de la siguiente manera: de los $k$ alumnos que tengo que escoger para armar el grupo puedo tener a cero, uno, dos,..., o hasta $k$ hombres digamos que elijo $j$, por lo que me restara elegir a las mujeres que estarán en el grupo, teniendo $m$ posibles mujeres seleccionare a $k-j$ que son los lugares que me quedan, por lo que habrá $[m$ en $k-j]$ formas de hacerlo para cada $j$ cantidad de hombres que elija, esto quiere decir que en total tendremos

$$\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$$

formas de elegir a $j$ hombres y $k-j$ mujeres, pero recordemos que quiero saber la cantidad total de grupos que puedo formar, entonces necesito contabilizar por cada cantidad de hombres que escoja, teniendo en total

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$$

que debe ser igual a elegirlos de la primera manera que mencionamos.

**Prueba analítica:**

Por un lado, tenemos que

$$(1+x)^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+m}{k}x^k$$

pues por definición $\binom{s}{t} = 0$ si $t > s$ por lo que podemos tender la suma a infinito ya que a partir de un punto solo sumaremos ceros, pero por el otro tenemos que

$$(1+x)^n(1+x^m) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k$$
$$\underset{\text{producto de cauchy}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\Sigma_{j=1}^{k} a_j b_{k-j}\right)x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\Sigma_{j=1}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}\right)x^k$$

por lo tanto, tendremos que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+m}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\Sigma_{j=1}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}\right)x^k \iff \binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$$

que es lo que queríamos demostrar.

■

$(c)$

**Prueba combinatoria:**
Sabemos que el número de multiconjuntos de $k$ elementos de un conjunto de $n$ elementos es

$$\binom{n+k-1}{k}$$

los cuales son contados como vimos al inicio de este documento. Ahora veamos otra forma de contarlos. Contar cuantos multiconjuntos hay es equivalente a contar todos aquellos para los cuales el primer elemento no está más aquellos donde se repite una vez, mas aquellos donde se repite dos veces, etc hasta llegar a aquellos donde se repite $k$ veces, siendo así, tomemos $k$ bolitas y $n-1$ palitos como nuestras representaciones de los multiconjuntos, y sea $i$ el número de veces que se repite el primer elemento, por lo que tenemos que descartar $i$ bolitas y un palito de nuestra selección los cuales representar que en el multiconjunto el primer elemento se repite $i$-veces, quedando en total $k-i$ bolitas y $n-2$ palitos

$$\underbrace{\bullet\,\bullet \ldots \bullet}_{k-i}\underbrace{|| \ldots |}_{n-2}$$

Entonces la cantidad de formas de ordenar estos restantes serán

$$\binom{k-i+n-2}{k-i,\ n-2} = \binom{k-i+n-2}{k-i}$$

y como esto lo hacemos para cada $0 \leq i \leq k$ tendremos que el total de multiconjuntos de $k$ elementos será

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k-i+n-2}{k-i} \underset{i\to k-i}{=} \sum_{i=0}^{k}\binom{i+n-2}{i} = \sum_{i=0}^{k}\binom{n+i-2}{i}$$

por lo tanto, concluimos que

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n+i-2}{i} = \binom{n+k-1}{k}$$

de donde haciendo el cambio $n \to n+2$ obtenemos el resultado pedido.

**Prueba analítica:**
Por inducción sobre $k$. Para $k=1$ tenemos que

$$\sum_{i=0}^{1}\binom{n+i}{i} = \binom{n+0}{0} + \binom{n+1}{1} = 1+n+1 = n+2 = \binom{n+2}{1} = \binom{n+1+1}{1}$$

cumpliéndose lo pedido. Ahora supongamos que dicha propiedad se cumple para algún $k > 1$, tenemos pues

$$\sum_{i=0}^{k+1}\binom{n+i}{i} = \sum_{i=0}^{k}\binom{n+i}{i} + \binom{n+k+1}{k+1} \underset{H.I}{=} \binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+2}{k+1}$$

cumpliéndose lo que queríamos y donde la última igualdad se da por la propiedad vista en clase:

$$\binom{m+1}{j} = \binom{m}{j} + \binom{m}{j-1}$$

que dando así demostrado.

■

*(d)*

**Prueba combinatoria:**
Tenemos que en el seminario de combinatoria hay $n$ alumnos y queremos formar un grupo de alumnos para organizar un convivio, donde uno de ellos será el capitán. ¿De cuantas formas puedo formar a dicho grupo con su respectivo capitán?

Veamos las dos formas de contar esto:

• Primero elegimos al capitán del grupo que formaremos de donde tenemos $n$ posibles elecciones, y luego elegiremos a los demás miembros, pero como no se nos especifica el tamaño, entonces tenemos que contar cuantos grupos puedo formar con los $n-1$ alumnos restantes, pero esto no es mas que la cantidad de subconjuntos que puedo formar, los cuales sabemos que son $2^{n-1}$ siendo pues el total de formas que puedo formar los grupos con su capitán $n2^{n-1}$ (aquí el conjunto vacío me representa que nadie quiso hacer convivio :( )

• Primero formaremos los grupos que pueden ser de 1, 2,..., $n$ personas, digamos que hacemos un grupo de $k$ alumnos, esto lo puedo hacer de $[n \text{ en } k]$ formas y luego de estos $k$ alumnos tengo $k$ opciones para elegir al capitán por lo que hay $k \cdot [n \text{ en } k]$ maneras de formar un grupo de $k$ alumnos con su capitán, y como no se especifica el tamaño tendremos que el total de formas de formar un grupo con su capitán será

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$

**Prueba analítica:**
Tenemos que

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \underset{\text{derivando}}{\Rightarrow} n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} \underset{x=1}{\Rightarrow} n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$

■

*(e)*

**Prueba combinatoria:**
En esta no se me ocurrió : p

**Prueba analítica:**
Por el teorema del binomio sabemos que

$$(1-x)^n(1+x)^n = (1-x^2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{2k}$$

y por otro lado

$$(1-x)^n(1+x)^n = \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^k\right]\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right] = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}(-1)^k x^k\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k\right]$$

que el ultimo paso lo podemos hacer (cambiar las sumas al infinito) pues $\binom{s}{t} = 0$ si $t > s$, entonces por el producto de cauchy nos queda que

$$(1-x)^n(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{n}{k-j}x^k = \sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{n}{k-j}x^k$$

pues la mayor potencia será $2n$. De esta manera tenemos que los coeficientes de $x^n$ deben ser iguales, pero para el primer resultado tenemos que la variable $x^n$ existe solo si existe $0 \le m \le n$ tal que $n = 2m$ de lo contrario no hay variable, con ello tendremos pues que

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}^2 = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impar} \\ (-1)^m\binom{2m}{m} & \text{si } n = 2m \end{cases}$$

■

Problema 10. –
**10. How many words can be made from the letters of the word ESTATE?**

Solución: Tenemos que en la palabra ESTATE hay dos letras E, una letra S, dos letras T y una letra A, por lo que tenemos habrá entonces quiero saber de cuantas formas puedo reordenar estas letras tratando como distintas todas las letras que forman la palabra, que son

$$\binom{2+1+2+1}{2,1,2,1} = \frac{6!}{2!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!} = 180$$

■

Problema 11. –

**11. Given $n$ letters, of which $m$ are identical and the rest are all distinct, find a formula for the number of words which can be made.**

Solución: Nuevamente, tenemos $n$ letras donde $m$ son la misma y las $n - m$ restantes son distintas, por lo que la cantidad de palabras que podemos hacer será

$$\binom{n}{m, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-m}} = \frac{n!}{m! \cdot 1! \cdots 1!} = (n - m + 1)!$$

■