Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Seminario de Combinatoria

Tarea 2

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Lema 1- Si $\{1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}\}$ son las raíces n-ésimas de la unidad entonces

$$1 + w + w^2 + \ldots + w^{n-1} = 0$$

Lema 2.- Si $\{1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}\}$ son las raíces n-ésimas de la unidad y $(m, n) = 1$ entonces $\{1^m, w^m, w^{2m}, \ldots, w^{(n-1)m}\} = \{1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}\}$.

Lema 3.- Si w es raíz de la unidad entonces $\overline{w}$ es raíz de la unidad también.

La demostración de estos lemas se ve en cualquier curso de algebra superior II.

Primeramente, veamos una forma distinta a la vista en clase de calcular la cantidad de subconjuntos de cardinalidad par e impar de un conjunto de tamaño n. Se tiene por el teorema del binomio que

$$(1 + 1)^n + (1 - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}[1 + (-1)^k] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} 2$$

$$\Rightarrow \quad 2^n = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$$

que es la cantidad de subconjuntos de cardinalidad par. Por lo que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k+1} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

notemos que el problema se basó en tomar ingeniosamente la suma de los binomios de la forma $(1 + y)^n$ con $y = \pm 1$ que son las raíces cuadradas de la unidad. Con esto en mente haremos el siguiente procedimiento.

Libro de Cameron

Problema 4. –

4. Following the method in the text, calculate the number of subsets of an n-set of size congruent to $m \pmod 3$ $(m = 0, 1, 2)$ for each value of $n \pmod 6$.

Demostración: Sea $y = e^{(2\pi/3)i}$ entonces y^0, y^1 y y^2 son justamente las raíces cubicas de la unidad (esto es de suma importancia, pues usaremos las propiedades de dichas raíces), con ello tendremos la siguiente suma (usando el teorema del binomio)

$$\begin{aligned}(1+1)^n + (1+y)^n + (1+y^2)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[1 + y^k + y^{2k}] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[1 + (y)^k + (y^2)^k]\end{aligned}$$

ahora, por el lema 1 y 2 tendremos que si $(k,3) = 1$ entonces $1 + (y)^k + (y^2)^k = 0$, únicamente nos quedaran los sumandos donde k es múltiplo de 3 en donde

$$1 + y^k + y^{2k} = 1 + (y^3)^m + (y^3)^{2m} = 1 + 1 + 1 = 3$$

por tanto, nos queda

$$2^n + (1+y)^n + (1+y^2)^n = 3\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k} = \frac{1}{3}\left[2^n + (1+y)^n + (1+y^2)^n\right]$$

pero como $y^2 = \overline{y}$ tenemos $(1+y)^n + (1+y^2)^n = (1+y)^n + \overline{(1+y)}^n = 2\,\mathrm{Re}[(1+y)^n]$ y como $1 + y = 1 + e^{(2\pi/3)i} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{(\pi/3)i} \Rightarrow (1+y)^n = e^{(\pi n/3)i}$ por lo que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k} = \frac{1}{3}2^n + \frac{2}{3}\cos(\frac{n\pi}{3})$$

es la cantidad de subconjuntos de cardinalidad múltiplo de 3 (o congruente con cero modulo 3).

Ahora para las demás congruencias necesitamos hacer un poco de trabajo extra. Sabemos que

$$\begin{aligned}2^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+2} \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+2} &= 2^n - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k} = \frac{1}{3}2^{n+1} - \frac{2}{3}\cos(\frac{n\pi}{3}) \quad (1)\end{aligned}$$

y por otro lado

$$(1+y)^n-(1+y^2)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^k-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{2k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[y^k-y^{2k}]$$

aquí nuevamente, si k es múltiplo de 3 tendremos que $y^k-y^{2k}=1-1=0$, si $k=3m+1$ entonces $y^k-y^{2k}=(y^3)^m y-(y^3)^{2m}y^2=y-y^2=\sqrt{3}i$ y si $k=3m+2$ entonces $y^k-y^{2k}=(y^3)^m y^2-(y^3)^{2m}y^4=y^2-y^4=-\sqrt{3}i$, por lo que

$$(1+y)^n-(1+y^2)^n=\sqrt{3}i\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+1}-\sqrt{3}i\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+2}$$

y del lado izquierdo tenemos $(1+y)^n-(1+y^2)^n=(1+y)^n-\overline{(1+y^2)}^n=2i\,\mathrm{Im}[(1+y)^n]$ y como $1+y=1+e^{(2\pi/3)i}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{(\pi/3)i}\Rightarrow(1+y)^n=e^{(\pi n/3)i}$ por lo que

$$\begin{aligned}2i\sin(\frac{n\pi}{3})&=\sqrt{3}i\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+1}-\sqrt{3}i\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+2}\\ \Rightarrow\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+1}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+2}&=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\frac{n\pi}{3})\quad(2)\end{aligned}$$

por lo que sumando (1) y (2) obtenemos

$$\begin{aligned}2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+1}&=\frac{1}{3}2^{n+1}-\frac{2}{3}\cos(\frac{n\pi}{3})+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\frac{n\pi}{3})\\ \Rightarrow\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+1}&=\frac{1}{3}2^{n}-\frac{1}{3}\cos(\frac{n\pi}{3})+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\frac{n\pi}{3})\end{aligned}$$

y de donde sustituyendo

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+2}=\frac{1}{3}2^{n}-\frac{1}{3}\cos(\frac{n\pi}{3})-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\frac{n\pi}{3})$$

por lo tanto, dado n la cantidad de subconjunto de cardinalidad congruentes con 0, 1 o 2 es

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k}&=\frac{1}{3}2^{n}+\frac{2}{3}\cos(\frac{n\pi}{3})\\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+1}&=\frac{1}{3}2^{n}-\frac{1}{3}\cos(\frac{n\pi}{3})+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\frac{n\pi}{3})\\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+2}&=\frac{1}{3}2^{n}-\frac{1}{3}\cos(\frac{n\pi}{3})-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\frac{n\pi}{3})\end{aligned}$$

este resultado es en general sin importar la congruencia del n con el 6.

■

Con el método usado, como se puede observar, es fácil obtener los subconjuntos de cardinalidad múltiplo de 3 pero se complica al querer calcular los demás, por lo que, como dato extra, dejo el siguiente resultado.

Proposición. – *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $1 \le m \le n$ entonces el número de subconjuntos de cardinalidad un múltiplo de m es*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{mk} = \frac{2^n}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left| \cos^n(\frac{\pi k}{m}) \right| \cos(\frac{n\pi k}{m})$$

con $y = e^{(2\pi/m)i}$ raíz m-ésima de la unidad.

Demostración. - Sea $y = e^{(2\pi/m)i}$ entonces $y^0,\ y^1,...,y^{m-1}$ son las raíces m-ésimas de la unidad, con ello tendremos la siguiente suma (usando el teorema del binomio)

$$\begin{aligned}(1+1)^n + (1+y)^n + \ldots + (1+y^{m-1})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k + \ldots + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{(m-1)k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [1 + y^k + \ldots + y^{(m-1)k}] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [1 + (y)^k + \ldots + (y^{m-1})^k]\end{aligned}$$

ahora, por el lema 1 y 2 tendremos que si $(k,m) = 1$ entonces $1 + (y)^k + \ldots + (y^{m-1})^k = 0$, únicamente nos quedaran los sumandos donde k es múltiplo de m en donde

$$1 + y^k + \ldots + y^{(m-1)k} = 1 + (y^m)^t + \ldots + (y^m)^{t(m-1)} = 1 + 1 + \ldots + 1 = m$$

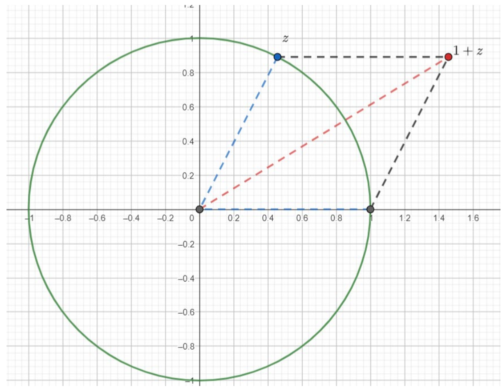
por tanto, nos queda

$$\begin{aligned} 2^n + (1+y)^n + \ldots + (1+y^{m-1})^n &= m \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{mk} \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{mk} &= \frac{1}{m} \left[2^n + (1+y)^n + \ldots + (1+y^{m-1})^n \right] \end{aligned}$$

ahora trabajaremos con el lado derecho, de donde primeramente tenemos que observar que la parte de la derecha tiene que ser real, por lo que para cada sumando de la forma siguiente se tiene

$$\begin{aligned}(1+y^r)^n &= \mathrm{Re}(1+y^r)^n = \left|1+y^r\right|^n \cos(n \arg(1+y^r)) = \left|1 + \cos(\frac{2\pi}{m} r) + i \sin(\frac{2\pi}{m} r)\right|^n \cos(n \arg(1+y^r)) \\ &= \left|2\cos(\frac{1}{2}\frac{2\pi}{m} r)\right|^n \cos(n \arg(1+y^r)) = \left|2\cos(\frac{\pi}{m} r)\right|^n \cos(n \arg(1+y^r))\end{aligned}$$

ahora, tendremos que si $|z| = 1$ entonces $\arg(1+z) = \arg(z)/2$ esto se ve por le siguiente diagrama



ya que los números complejos forman un paralelogramo donde la diagonal biseca el ángulo. Por lo cual

$$\begin{aligned}(1+y^r)^n &= 2^n \left|\cos^n(\frac{\pi}{m}r)\right| \cos(n\frac{1}{2}\arg(y^r)) = 2^n \left|\cos^n(\frac{\pi}{m}r)\right| \cos(n\frac{1}{2}r\arg(y)) \\ &= 2^n \left|\cos^n(\frac{\pi}{m}r)\right| \cos(n\frac{1}{2}r\frac{2\pi}{m}) = 2^n \left|\cos^n(\frac{\pi}{m}r)\right| \cos(n\frac{\pi r}{m})\end{aligned}$$

por lo que sustituyendo en cada sumando

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{mk} &= \frac{1}{m}\left[2^n + 2^n\left|\cos^n(\frac{\pi}{m})\right|\cos(\frac{n\pi}{m}) + \ldots + 2^n\left|\cos^n(\frac{\pi(m-1)}{m})\right|\cos(\frac{n\pi(m-1)}{m})\right] \\ \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{mk} &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}2^n\left|\cos^n(\frac{\pi k}{m})\right|\cos(\frac{n\pi k}{m}) = \frac{2^n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left|\cos^n(\frac{\pi k}{m})\right|\cos(\frac{n\pi k}{m})\end{aligned}$$

■