Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

MATEMÁTICAS

Seminario de Combinatoria

Tarea 3

Por: Lorenzo Antonio Alvarado Cabrera

Problema 4. –

1.Completar el siguiente ejercicio. Sea X={1,2,3,4}.
a) Enlistar todas las particiones de X.
b) Enlistar todas las relaciones de equivalencia en X.
c) Establecer una biyección entre ambos conjuntos.
2. Demostrar el teorema 3.8.1 del libro de Cameron.

Demostración:

a) Tenemos que las particiones son 15 particiones

- $\{\{1,2,3,4\}\}$

- $\{\{1\},\{2,3,4\}\}$, $\{\{2\},\{1,3,4\}\}$, $\{\{3\},\{2,1,4\}\}$, $\{\{4\},\{1,2,3\}\}$, $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$, $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$

- $\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$, $\{\{2\},\{3\},\{4,1\}\}$, $\{\{3\},\{4\},\{1,2\}\}$, $\{\{4\},\{1\},\{2,3\}\}$, $\{\{1\},\{3\},\{2,4\}\}$, $\{\{2\},\{4\},\{1,3\}\}$

- $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$

b) Las relaciones de equivalencia también son 15

- $\{1,2,3,4\}^2$

- $\{(1,1)\} \cup \{2,3,4\}^2$, $\{(2,2)\} \cup \{1,3,4\}^2$, $\{(3,3)\} \cup \{2,1,4\}^2$, $\{(4,4)\} \cup \{1,2,3\}^2$, $\{1,2\}^2 \cup \{3,4\}^2$, $\{1,3\}^2 \cup \{2,4\}^2$, $\{1,4\}^2 \cup \{2,3\}^2$

- $\{(1,1),(2,2)\} \cup \{3,4\}^2$, $\{(2,2),(3,3)\} \cup \{4,1\}^2$, $\{(3,3),(4,4)\} \cap \{1,2\}^2$, $\{(4,4),(1,1)\} \cup \{2,3\}^2$, $\{(1,1),(3,3)\} \cup \{2,4\}^2$, $\{(2,2),(4,4)\} \cup \{1,3\}^2$

- $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

$c,d)$ Establecer una biyección es prácticamente la demostración del teorema, así que lo demostraremos.

Tomaremos la siguiente notación, dada R una relación, denotaremos al hecho de que a esta relacionado con b que normalmente se denota por $(a,b) \in R$ o aRb como $a \sim b$.

Teorema 3.8.1.- *Sea X un conjunto. Toda relación de equivalencia en X me induce una partición, y viceversa, toda partición de X me induce una relación de equivalencia.*

Demostración:

$\Rightarrow]$ Sea $\sim$ una relación de equivalencia ($\sim := R \subseteq X \times X$), entonces veamos que el conjunto de clases

$$X_{\sim} := \{[x] : x \in X\} \text{ con } [x] = \{z : z \sim x\}$$

es una partición del conjunto X. En efecto:

- Tenemos de forma clara que $X_{\sim} \in \wp(X)$
- Supongamos que existen $[x], [y] \in X_{\sim}$ distintos tales que $[x] \cap [y] \neq \varnothing$, entonces tenemos que existe $z \in [x] \cap [y]$ por lo que $z \in [x] \ \wedge \ z \in [y] \ \Rightarrow \ z \sim x \ \wedge \ z \sim y$ por lo que $x \sim y$ (por ser relación de equivalencia) entonces $[x] = [y]$ ¡!! (esto se debe a que al tener que $x \sim y \ \Rightarrow \ [x] \subseteq [y]$ y por propiedad simétrica $y \sim x \ \Rightarrow \ [y] \subseteq [x]$), pero habíamos supuesto que eran distintos, por lo que necesariamente tenemos que $[x] \cap [y] = \varnothing \ \ \forall [x] \neq [y]$
- Tenemos que $\bigcup_{x \in X}[x] = X$, la primera contención es obvia pues cada clase es un subconjunto de X, para la segunda tomemos $x \in X$ entonces por la propiedad reflexiva $x \in [x] \ \Rightarrow \ x \in \bigcup_{x \in X}[x]$.

Por tanto, es partición de X.

$\Leftarrow]$ Sea $\tilde{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ partición del conjunto X y definamos la siguiente relación:

$$x \sim y \ \Leftrightarrow \ x,\ y \in X_i \text{ para algún } i = 1, \ldots, n$$

es decir, dos elementos están relacionados si pertenecen al mismo elemento de la partición. Veamos que esto es una relación de equivalencia. Primeramente notemos que si $x \in X$ entonces existe una única $i = 1,..,n$ tal que $x \in X_i$, esto es claro de la definición de partición, pues como $X = \bigcup_{k=1}^{n} X_k$ tenemos que si $x \in X$ entonces $x \in X_i$ para al menos un i, pero como dos elementos de la partición distintos son ajenos, entonces únicamente puede estar en uno. Con ello tenemos lo siguiente

- Sea $x \in X$, entonces existe un único $i = 1,..,n$ tal que $x \in X_i$, es decir, $x \in X_i$ y $x \in X_i \ \Rightarrow \ x \sim x$.
- Sean $x, y \in X$ tales que $x \sim y$ PD] $y \sim x$. En efecto, como $x \sim y$ tenemos pues que existe un único $i = 1, \ldots, n$ tal que $x, y \in X_i \ \Rightarrow \ y, x \in X_i \ \Rightarrow \ y \sim x$.

• Sean $x, y, z \in X$ tales que $x \sim y \ \wedge \ y \sim z$ PD] $x \sim z$. En efecto, como $x \sim y$ y $y \sim z$ tenemos pues que existen dos únicos $i, j = 1, \ldots, n$ tal que $x, y \in X_i \ \wedge \ y, z \in X_j$, pero como estos índices son únicos y tenemos que $y \in X_i, X_j$ necesariamente $X_i = X_j$ por lo que $x, y, z \in X_i$ de donde $x \sim z$.

Por tanto, es relación de equivalencia.

$\blacksquare$